

Übungsaufgaben Sparen, Zinsen, Zinseszins RS-Abschluss Klasse 10

Lösung A1

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 4 Jahre mit festem Zinssatz.

Gegeben: $n = 4$ Jahre; $K_0 = 7500,00$ € Anfangskapital; $K_4 = 8723,43$ € Endkapital

Zinssatz $p\%$:

$$K_4 = K_0 \cdot q^4$$

$$8723,43 = 7500 \cdot q^4$$

$$\frac{8723,43}{7500} = q^4$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{8723,43}{7500}} \approx 1,0385$$

$$q = 1 + \frac{p\%}{100}$$

$$1,0385 = 1 + \frac{p\%}{100} \Rightarrow p\% = 3,85 \%$$

Der Zinssatz, zu dem das Kapital angelegt wurde, betrug 3,85 %.

Kapitalzuwachs in den vier Jahren:

Grundwert $G = 7500,00$ €, Prozentwert $P = 8723,43$ € als erhöhter Grundwert, gesucht $p\%$.

$$\frac{p\%}{100} = \frac{P}{G} = \frac{8723,43}{7500} \approx 1,16 \Rightarrow p\% = 116 \%$$

Zuwachs wegen erhöhtem Grundwert: $116\% - 100\% = 16\%$

Das Kapital ist im Anlagezeitraum um 16% angewachsen.

Lösung A2

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 5 Jahre mit variablem Zinssatz.

Gegeben: $n = 5$ Jahre; $K_0 = 6500,00$ € Anfangskapital; $K_5 = 8185,59$ € Endkapital

$q_1 = 1,0425$; $q_2 = 1,045$; $q_4 = q_5$; Zinsen im 3. Jahr $Z = 329,27$ €.

Rechnerische Lösung (einfach)

Zinssatz für das vierte und fünfte Jahr:

$$p_4\% = p_5\%$$

$$K_5 = (K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 + Z_3) \cdot q_4^2$$

$$8185,59 = (6500 \cdot 1,0425 \cdot 1,045 + 329,27) \cdot q_4^2$$

$$8185,59 = 7410,45 \cdot q_4^2$$

$$q_4^2 = \frac{8185,59}{7410,45} = 1,1046$$

$$q_4 \approx 1,051$$

$$q_4 = 1 + \frac{p_4\%}{100} \Rightarrow p_4\% = 5,1\%$$

Der Zinssatz im vierten und fünften Jahr betrug 5,1%.

Gleicher Anlageerfolg bei gleichbleibendem Zinssatz:

$$K_5 = K_0 \cdot q^5$$

$$8185,59 = 6500 \cdot q^5$$

$$\frac{8185,59}{6500} = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{8185,59}{6500}} \approx 1,047$$

$$q = 1 + \frac{p\%}{100}$$

$$1,047 = 1 + \frac{p\%}{100} \Rightarrow p\% = 4,7 \%$$

Der gleichbleibende Zinssatz muss 4,7 % betragen, um den gleichen Anlageerfolg zu erzielen.

Übungsaufgaben Sparen, Zinsen, Zinseszins RS-Abschluss Klasse 10

Lösung A3

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über 4 Jahre mit variablem Zinssatz.

Gegeben: $n = 4$ Jahre; $K_4 = 17336,97$ € Endkapital, $q_2 = 1,035$; $q_3 = 1,0375$; $q_4 = 1,045$; Zinsen im 1. Jahr $Z_1 = 450,00$ €.

Rechnerische Lösung (einfach)

Anfangskapital K_0 :

$$K_4 = (K_0 + Z_1) \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$$

$$17336,97 = (K_0 + 450) \cdot 1,035 \cdot 1,0375 \cdot 1,045$$

$$17336,97 = (K_0 + 450) \cdot 1,122134 \quad | \quad : 1,122134$$

$$15450,00 = K_0 + 450 \quad | \quad -450$$

$$K_0 = 15450,00 - 450$$

$$K_0 = 15000,00$$

Das angelegte Kapital betrug 15.000 €.

Zinssatz für das erste Jahr:

$$\frac{p\%}{100} = \frac{450}{15000} = 0,03 \Rightarrow p\% = 3,00\%$$

Im ersten Jahr lag ein Zinssatz von 3,00% zugrunde.

Zinsen für das vierte Jahr:

Diese Zinsen errechnen sich aus dem Endkapital abzüglich des Endkapitals des 3. Jahres:

$$Z_4 = K_4 - K_3$$

$$Z_4 = 17336,97 - 15000 \cdot 1,03 \cdot 1,035 \cdot 1,0375$$

$$Z_4 = 746,57$$

Im vierten Jahr wurden 746,57 € Zinsen gutgeschrieben.

Tabellarische Lösung (umständlich)

Auch diese Aufgabe kann tabellarisch gelöst werden, wenn du nicht auf die Formeln der rechnerischen Lösung kommst. In diesem Fall musst du aber von hinten nach vorne rechnen, da das Anfangskapital nicht bekannt ist (siehe nachfolgende Tabelle, grün markierte Felder sind gegeben, rot markierte Felder sind errechnet).

Jahr	Kapital am Jahresende	Zinssatz $p\%$	q	Zinsen	Kapital am Jahresanfang
4	17336,97 €	4,50 %	1,0450	746,57 €	16590,40 €
3	16590,40 €	3,75 %	1,0375	599,65 €	15990,75 €
2	15990,75 €	3,50 %	1,0350	540,75 €	15450,00 €
1	15450,00 €	3,00 %	1,0300	450,00 €	15000,00 €

Lösung A4

Aufgabentyp: Ratensparvertrag über 5 Jahre mit variablem Zinssatz.

Rechnerische Lösung (einfach)

Berechnung der Kapitalbildung der einzelnen Jahre:

Angebot I:

Die erste Rate abzüglich der Bearbeitungsgebühr wird 4 Jahre lang verzinst.

$$K_5 = (R - \text{Gebühr}) \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$$

$$K_5 = 2600 \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,0425 \cdot 1,045 = 3063,60$$

Die zweite Rate wird 3 Jahre lang verzinst.

$$K_4 = R \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$$

$$K_4 = 2750 \cdot 1,04 \cdot 1,0425 \cdot 1,045 = 3115,72$$

RS-Abschluss Übungsaufgaben

zu Sparen, Zinsen, Zinseszins

Lösungen

Übungsaufgaben Sparen, Zinsen, Zinseszins RS-Abschluss Klasse 10

Die dritte Rate wird 2 Jahre lang verzinst.

$$K_3 = R \cdot q_3 \cdot q_4$$

$$K_3 = 2750 \cdot 1,0425 \cdot 1,045 = 2995,88$$

Die vierte Rate wird 1 Jahre lang verzinst.

$$K_2 = R \cdot q_4$$

$$K_2 = 2750 \cdot 1,045 = 2873,75$$

Im letzten Jahr wird zur Rate ein fester Zinsbetrag ausbezahlt.

$$K_1 = R + Z$$

$$K_1 = 2750 + 750 = 3500,00$$

Berechnung des Endkapitals:

Das Gesamtkapital ist die Summe der einzelnen Kapitale.

$$K_{ges} = K_5 + K_4 + K_3 + K_2 + K_1$$

$$K_{ges} = 3063,60 + 3115,72 + 2995,88 + 2873,75 + 3500,00 = 15548,95$$

Angebot II:

Die erste Rate abzüglich der Bearbeitungsgebühr wird 5 Jahre lang mit festem Zinssatz verzinst.

$$K_5 = (R - \text{Gebühr}) \cdot q^5$$

$$K_5 = 2630 \cdot 1,045^5 = 3277,46$$

Die zweite Rate wird 4 Jahre lang verzinst.

$$K_4 = R \cdot q^4$$

$$K_4 = 2750 \cdot 1,045^4 = 3279,43$$

Die dritte Rate wird 3 Jahre lang verzinst.

$$K_3 = R \cdot q^3$$

$$K_3 = 2750 \cdot 1,045^3 = 3138,21$$

Die vierte Rate wird 2 Jahre lang verzinst.

$$K_2 = R \cdot q^2$$

$$K_2 = 2750 \cdot 1,045^2 = 3003,07$$

Im letzten Jahr wird 1 Jahre lang verzinst.

$$K_1 = R \cdot q$$

$$K_1 = 2750 \cdot 1,045 = 2873,75$$

Berechnung des Endkapitals:

Das Gesamtkapital ist die Summe der einzelnen Kapitale.

$$K_{ges} = K_5 + K_4 + K_3 + K_2 + K_1$$

$$K_{ges} = 3277,46 + 3279,43 + 3138,21 + 3003,07 + 2873,75 = 15571,92$$

Familie Kugler erzielt mit dem Angebot II den höheren Anlageerfolg.

Tabellarische Lösung (umständlich)

Die einzelnen Berechnungen sind hier nicht mehr näher aufgeführt. Die grünen Werte in den Tabellen sind gegeben, die roten Werte sind errechnet.

Angebot I:

Jahr	Kapital am Jahresanfang	Zinssatz p%	q	Zinsen	Kapital am Jahresende
1	2750,00 € – 150,00 € = 2600,00 €	4,00 %	1,0400	104,00 €	2704,00 €
2	5454,00 €	4,00 %	1,0400	218,16 €	5672,16 €
3	8422,16 €	4,25 %	1,0425	357,94 €	8780,10 €
4	11530,10 €	4,50 %	1,0450	518,85 €	12048,95 €
5	14798,95 €	5,10 %	1,0510	750,00 €	15548,95 €

Angebot II:

Jahr	Kapital am Jahresanfang	Zinssatz $p\%$	q	Zinsen	Kapital am Jahresende
1	2750,00 € – 120,00 € = 2630,00€	4,50 %	1,0450	118,35 €	2748,35 €
2	5498,35 €	4,50 %	1,0450	247,43 €	5745,78 €
3	8495,78 €	4,50 %	1,0450	382,31 €	8878,09 €
4	11628,09 €	4,50 %	1,0450	523,26 €	12151,35 €
5	14901,35 €	4,50 %	1,0450	670,56 €	15571,91 €

Familie Kugler erzielt mit dem Angebot II den höheren Anlageerfolg.

Lösung A5

Detaillierte Lösung

Lösungsschritte rechnerische Lösung (einfach)

1. Aus dem Text heraus musst du erkennen, dass es sich um einen Ratensparvertrag über 4 Jahre mit variablem Zinssatz handelt mit $R = 3600$; $q_1 = 1,0325$; $q_2 = 1,035$; $q_3 = 1,038$; $q_4 = 1,0425$

2. Berechnung der Kapitalbildung der einzelnen Jahre.

Die 1. Rate wird ja 4 Jahre lang verzinst, also

$$K_4 = R \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$$

Die 2. Rate wird 3 Jahre lang verzinst mit den Zinssätzen der Jahre 2 bis 4, also

$$K_3 = R \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$$

Die 3. Rate wird 2 Jahre lang verzinst mit den Zinssätzen der Jahre 3 bis 4, also

$$K_2 = R \cdot q_3 \cdot q_4$$

Die 4. Und letzte Rate wird nur 1 Jahr lang verzinst mit den Zinssatz des 4. Jahres, also

$$K_1 = R \cdot q_4$$

Das Kapital über die 4 Jahre ist also die Summe der einzelnen Kapitalbeträge, also

$$K_{\text{gesamt}} = K_4 + K_3 + K_2 + K_1$$

$$K_{\text{gesamt}} = R \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + R \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + R \cdot q_3 \cdot q_4 + R \cdot q_4$$

In dieser Formel lässt sich R ausklammern und du erhältst:

$$K_{\text{gesamt}} = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_3 \cdot q_4 + q_4)$$

3. Berechnung des Endkapitals durch Einsetzen in die Formel

$$K_{\text{gesamt}} = 3600 \cdot (1,0325 \cdot 1,035 \cdot 1,038 \cdot 1,0425 + 1,035 \cdot 1,038 \cdot 1,0425 + 1,038 \cdot 1,0425 + 1,0425)$$

$$K_{\text{gesamt}} = 3600 \cdot (1,1564 + 1,12 + 1,0821 + 1,0425)$$

$$K_{\text{gesamt}} = 3600 \cdot 4,401 = 15843,60$$

Der Auszahlungsbetrag nach Ablauf von 4 Jahren beträgt 15.843,60 €.

Lösungsschritte tabellarische Lösung (umständlich)

1. Aus dem Text heraus musst du erkennen, dass es sich um einen Ratensparvertrag über 4 Jahre mit variablem Zinssatz handelt mit $R = 3600$; $q_1 = 1,0325$; $q_2 = 1,035$; $q_3 = 1,038$; $q_4 = 1,0425$

Übungsaufgaben Sparen, Zinsen, Zinseszins RS-Abschluss Klasse 10

2. Aufbau einer Tabelle

Anfangs-kapital	Zuzahlung	Jahr	Kapital zum Jahresanfang	Zinssatz $p\%$	q	Kapital am Jahresende
0,00 €	3600,00 €	1	3600,00 €	3,25 %	1,0325	3717,00 €
3717,00 €	3600,00 €	2	7317,00 €	3,50 %	1,0350	7753,10 €
7753,10 €	3600,00 €	3	11173,10 €	3,80 %	1,0380	11597,68 €
11597,68 €	3600,00 €	4	15197,68 €	4,25 %	1,0425	15843,58 €

Der Auszahlungsbetrag nach Ablauf von 4 Jahren beträgt 15.843,60 €.

Lösung A6

Aufgabentyp: Kapitalentwicklung über verschiedene Jahre mit unterschiedlichen Zinssätzen.

a) $K_0 = 241\,500 \text{ €}; n = 4 \text{ Jahre, Zinssatz } p \% = 7,5 \%$

$$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 241500 \cdot 1,075^4 = 322515,80$$

Die Summe wächst auf 322 515,80 € an.

b) $K_0 = 241\,500 \text{ €}; n = 5 \text{ Jahre, Endkapital } K_5 = 400\,000 \text{ €}$

$$K_5 = K_0 \cdot q^5$$

$$400000 = 241500 \cdot q^5 \quad | \quad : 241500$$

$$q^5 = 1,6563147 \quad | \quad \sqrt[5]{\quad}$$

$$q = 1,1062$$

$$p \% = (q - 1) \cdot 100 = (1,1062 - 1) \cdot 100 \approx 10,6 \%$$

Der Gewinn muss mit 10,6 % angelegt werden.

c) $K_2 = 300\,000 \text{ €}; n = 2 \text{ Jahre, } p \% = 7,5 \%$

$$K_2 = K_0 \cdot q^2$$

$$300000 = K_0 \cdot 1,075^2 \quad | \quad : 1,075^2$$

$$K_0 = 259599,78$$

Herr Clausen müsste 259 599,78 € anlegen.