Aufgabenblatt zur Teilbarkeit und Primzahlen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 12 Aufgaben

Aufgabe A1

Xenia, Yasmin und Zoé treffen am 19. Januar im Hallenbad aufeinander. Aufgrund unterschiedlicher Trainingspläne sehen sie sich nicht immer. So trainiert Xenia jeden 4., Yasmin jeden 9. und Zoé jeden 6. Tag.
An welchem nächsten Datum treffen sie sich?

a) Zoé und Xenia? b) Xenia und Yasmin? c) alle drei Mädchen?

Aufgabe A2

a) Eine Mädchengruppe wird im Sportunterricht aufgeteilt. Bei 2, 4 oder 5 gleich großen Gruppen bleibt immer eine Person übrig. Wie viele Schülerinnen zählt diese Klasse mindestens?

b) Eine Studiengruppe wird aufgeteilt. Bei zwei gleich großen Gruppen bleibt eine Person übrig, bei vier gleich großen Gruppen bleiben drei Personen übrig und bei fünf gleich großen Gruppen bleiben vier Personen übrig. Wie viele Studierende zählt diese Gruppe mindestens und wie viele Personen bleiben bei sechs gleich großen Gruppen übrig?

Aufgabe A3

Auf einem Wochenmarkt verkauft eine Bäuerin Äpfel. Sie überlegt sich, wie sie die Äpfel auf ihrem Markstand am schönsten hinlegen könnte. Ein Apfel bleibt jedoch immer übrig, unabhängig davon, ob sie 2, 3 oder 4 gleich große Haufen macht.

a) Wie viele Äpfel bringt die Bäuerin höchstens zum Markt, wenn es nicht mehr als 400 Äpfel sind?

b) Ein Gedankenexperiment: Wie viele Äpfel könnte sie zum Markt bringen, wenn sie beliebig viele Äpfel hätte? Notiere das Resultat als Term mit einer Variablen.

Aufgabe A4

In der Mensa werden jeden Tag zwei verschiedene Menüs angeboten. Menü 1 kostet € 8,50, Menu 2 kostet € 10,20. Das Essen wird nicht bar, sondern mit Essensmarken bezahlt. Welchen Wert haben die Essensmarken sinnvollerweise, damit beide Menüs mit den gleichen Essensmarken bezahlt werden können? Wie viele Essensmarken werden für Menü 1 und für Menü 2 benötigt?

Aufgabe A5

In einer Maschine wird ein kleines Zahnrad mit 20 Zähnen von einem Großen mit 72 Zähnen angetrieben.

a) Nach wie vielen Umdrehungen des großen Zahnrades stehen sich die beiden Räder erstmals wie am Anfang gegenüber? Wie viele Umdrehungen hat das kleine Zahnrad dabei gemacht?

b) Wievielmal pro Minute dreht sich das kleine Zahnrad, wenn sich das große Zahnrad 15-mal in einer Minute dreht?

Aufgabe A6

Für einen Post-Camion, dessen Laderaum $600\,x\,240\,x\,180\,cm$ hat, soll ein möglichst großes, würfelförmiges Post-Paket entwickelt werden, mit dem der Lastwagen gefüllt werden kann. Welche Kantenlänge hat ein solches Post-Paket und wie viele haben im Lastwagen Platz?

Aufgabe A7

Quaderförmige Klötze, die $36\,mm$ lang, $27\,mm$ breit und $24\,mm$ hoch sind, werden kompakt zu einem kleinstmöglichen Würfel zusammen gebaut. Welche Kantenlänge besitzt der entstandene Würfel? Wie viele Klötze brauchst du?

Lösung A1

Gesucht ist jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache von:

a) Zoé jeden 6. Tag und Xenia jeden 4. Tag.
$kgV = 12$, denn 12 ist die kleinste Zahl, in die sowie die 6 als auch die 4 ohne Rest hineinpasst.
Zoé und Xenia treffen sich 12 Tage später wieder, also am $31.$ Januar.

b) Xenia jeden 4. Tag und Yasmin jeden 9. Tag.
$kgV = 36$, denn 36 ist die kleinste Zahl, in die sowie die 4 als auch die 9 ohne Rest hineinpasst.
Zoé und Xenia treffen sich 36 Tage später wieder, also am $24.$ Februar.

c) Alle drei Mädchen mit Xenia jeden 4. Tag, Yasmin jeden 9. Tag und Zoé jeden 6. Tag.
$kgV = 36$, denn 36 ist die kleinste Zahl, in die sowie die 4 als auch die 6 als auch die 9 ohne Rest hineinpasst.
Alle drei Mädchen treffen sich 36 Tage später wieder, also am $24.$ Februar.

Lösung A2

a) Gesucht wird jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache mit Rest 1. Man nennt dies auch Modulo n Rest $1.$
$kgV = 20$, denn 20 ist die kleinste Zahl, in die sowie die 2 als auch die 4 als auch die 5 ohne Rest hineinpasst.
Wegen „Rest 1„ zählt die Klasse somit mindestens 21 Schüler.
Probe:
5 Gruppen: $21:5 = 4\,R1$
4 Gruppen: $21:4 = 5\,R1$
2 Gruppen: $21:2 = 10\,R1$

b) Gesucht wird auch hier jeweils das kleines gemeinsame Vielfache, jedoch dieses Mal mit unterschiedlichem Rest.
Wir betrachten zunächst die Gruppe mit dem größten Rest, das ist die 5-er Gruppe. Also werden Zahlen gesucht, die durch 5 geteilt den Rest 4 ergeben.
Dies sind die Zahlen $9; 14; 19; 24; 29; \ldots$
Wir betrachten die 4-er Gruppe. Also werden Zahlen gesucht, die durch 4 geteilt den Rest 3 ergeben.
Dies sind die Zahlen $7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; \ldots$
Zuletzt betrachten die 2-er Gruppe. Also werden Zahlen gesucht, die durch 2 geteilt den Rest 1 ergeben.
Dies sind die Zahlen $3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; \ldots$
In diesen Zahlenreihen ist 19 die kleinste gemeinsam enthaltene Zahl.
Die Studiengruppe besteht aus mindestens 19 Personen.
Wir betrachten die 6-er Gruppe:
$21:6 = 3\,R1$
Bei 6 gleich großen Gruppen bleibt eine Person übrig.

Lösung A3

Gesucht ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3 und 4.
$kgV = 12$, denn 12 ist die kleinste Zahl, in die sowie die 2 als auch die 3 als auch die 4 ohne Rest hineinpasst.

a) $400 : 12 = 33\ R4$
$400 \cdot 12 = 396$
Die Bäuerin hat höchstens 396 Äpfel mitgebracht.

b) Bei beliebiger Anzahl mitgebrachter Äpfel müsste sie jeweils ein Vielfaches von 12 Äpfeln mitbringen. Die Anzahl mitgebrachter Äpfel ließe sich über den Term $12 \cdot x$ errechnen.

Lösung A4

Gesucht ist das größte gemeinsame Teile von $€\,8{,}50$ und $€\,10{,}20$.
Um nicht mit Kommas rechnen zu müssen, können wir auch den ggT von 85 und 102 suchen und dieses dann wieder durch 10 teilen.
Am schnellsten geht dies mit Primzahlzerlegung. Wir zerlegen sowohl die 85 als auch die 102 in Primzahlen.
$P(85) = 5 \cdot 17$
$P(102) = 2 \cdot 3 \cdot 17$
In beiden Zahlen steckt also die Primzahl 17.
Da wir ja eingangs die Eurozahlen mit 10 multipliziert haben, müssen wir unser Ergebnis jetzt durch 10 dividieren.
Die Essensmarken haben sonnvollerweise einen Wert von € 1,70.
In der Mensa werden jeden Tag zwei verschiedene Menüs angeboten. Menü 1 kostet $€\,8{,}50$, Menu 2 kostet $€\,10{,}20$. Das Essen wird nicht bar, sondern mit Essensmarken bezahlt. Welchen Wert haben die Essensmarken sinnvollerweise,
Für Menü 1 werden damit 5 und für Menü 2 6 Essensmarken benötigt.

Lösung A5

Gesucht ist der kleinste gemeinsame Teiler von 20 und 72.
$kgV = 360$, denn 360 ist die kleinste Zahl, in die sowie die 20 als auch die 72 ohne Rest hineinpasst.

a) Für das kleine Zahnrad gilt:
$18 \cdot 20 = 360$
Für das große Zahnrad gilt:
$5 \cdot 72 = 360$
Somit dreht das große Zahnrad 5 mal, bis sich die beiden Räder erstmals wie am Anfang wieder gegenüber stehen. Das kleine Zahnrad hat dabei 18 Umdrehungen gemacht.

b) Wenn sich das große Zahnrad -mal dreht, so dreht es sich ja dreimal mehr als in Aufgabenteil a). Also muss sich auch das kleine Zahnrad dreimal mehr drehen.
$3 \cdot 18 = 54$
Das kleine Zahnrad dreht sich 54-mal pro Minute.

Lösung A6

Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler der drei Abmessungen $600\ cm$, $240\ cm$ und $180\ cm$.
Es fällt direkt ins Auge, dass der $ggT = 60\ cm$ ist.
Das würfelförmige Postpaket hate eine Kantenlänge von $60\ cm$.
In die Breite von $180\ cm$ passen somit 3 Lagen, in die Höhe von $240\ cm$ 4 Lagen und in die Länge von $600\ cm$ somit 10 Lagen.
Insgesamt also $3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$ Postpakete.

Lösung A7

Gesucht ist das kleinste gemeinsame Vielfache der drei Abmessungen $36\ mm$, $27\ mm$ und $24\ cm$. Wir zerlegen die drei Zahlen in Primzahlen:
$P(36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
$P(27) = 3 \cdot 3 \cdot 3$
$P(24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Wir haben ein Maximum von drei 3-en sowie drei 2 –en
$kgV = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$
Länge: $216 : 36 = 6$
Breite: $216 : 27 = 8$
Höhe: $216 : 24 = 9$
Wir legen also 6 Klötze hintereinander und 8 Klötze nebeneinander. Auf diese Art und Weise bilden insgesamt 48 Klötze die Grundfläche des Würfels. Auf diese Grundfläche legen wir nochmals 8 Lagen in die Höhe, sodass wir gesamthaft $48 \cdot 9 = 432$ Klötze benötigen. Dadurch entsteht ein Würfel mit einer Kantenlänge von $216\ mm$.