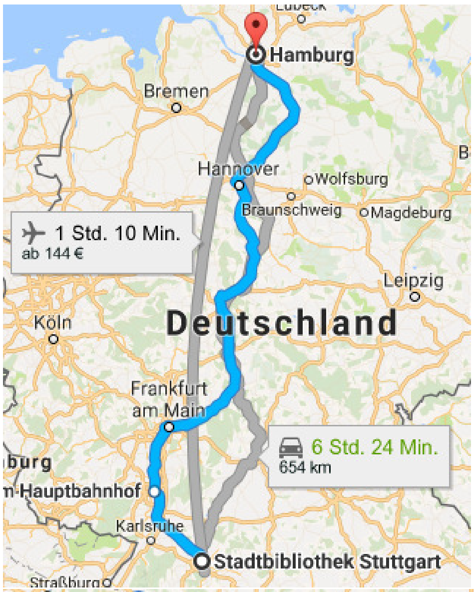
WIKI zu Änderungsraten

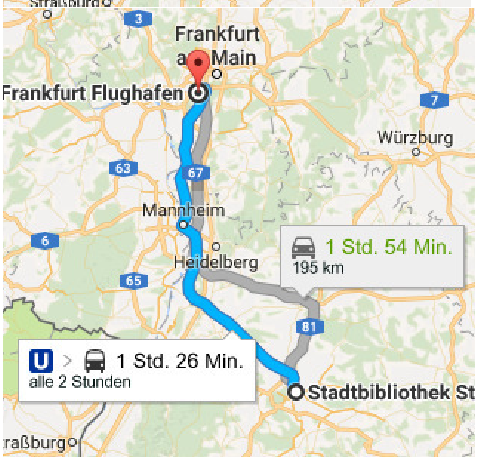
Wir können viele Bereiche unseres Lebens ja mit messbaren Größen beschreiben. So messen wir z. B. die Entfernung zwischen zwei Städten in Kilometer. Wir bestimmen den Inhalt einer Flasche in Litern, das Gewicht eines Körpers in Gramm oder Kilogramm, die Konzentration eines Medikaments in Milliliter, usw., usw.

Wir bezeichnen diese unterschiedlichen Messgrößen mit dem Buchstaben G.

Auf der anderen Seite kann es ja vorkommen, dass eine solche Messgröße G nicht konstant ist, sondern im Verlaufe eines Zeitabschnittes sich verändert. Wenn wir mit dem Auto von Stuttgart nach Hamburg fahren, so ist die gesamte Wegstrecke ja etwa $650\,km$. Wir benötigen hierzu etwa $6{,}5$ Stunden. Sind wir aber erst etwa zwei Stunden gefahren, so befinden wir uns erst im Raum Frankfurt am Main und haben somit erst $195\,km$ Wegstrecke zurückgelegt.

Die zurückgelegte Wegstrecke auf unserer Fahrt ist also abhängig von der Zeit, die wir von Stuttgart aus gesehen, unterwegs sind.





Die bezeichnen diese Zeitdifferenz mit Δt, wobei $\Delta t = t_2 - t_1$ ist, mit t_1 als Anfangszeit und t_2 als aktuelle Zeit zum Messpunkt.

Auf unser Beispiel angewandt: Δt wäre für die gesamte Strecke Stuttgart -> Hamburg damit $\Delta t = 6{,}5 - 0 = 6{,}5$ Stunden und für die Strecke Stuttgart -> Frankfurt $\Delta t = 2 - 0 = 2$ Stunden. Und damit wäre Δt für die Strecke Frankfurt -> Hamburg $\Delta t = 6{,}5 - 2 = 4{,}5$ Stunden.

Merksatz

Die ***Änderungsrate*** *einer zeitabhängigen Messgröße* $\boldsymbol{G}$ beschreibt das Ausmaß der Veränderung von $\boldsymbol{G}$ in einem bestimmten Zeitraum im Verhältnis zur Dauer des Zeitraums Δt. Anschaulich gesprochen ist sie ein Maß dafür, wie schnell sich die Größe $\boldsymbol{G}$ ändert.

Änderungsraten unterscheiden sich von *Veränderungsangaben* dadurch, dass sie immer ein *Verhältnis* der Form „Größe pro Zeit" mit entsprechender Maßeinheit sind.

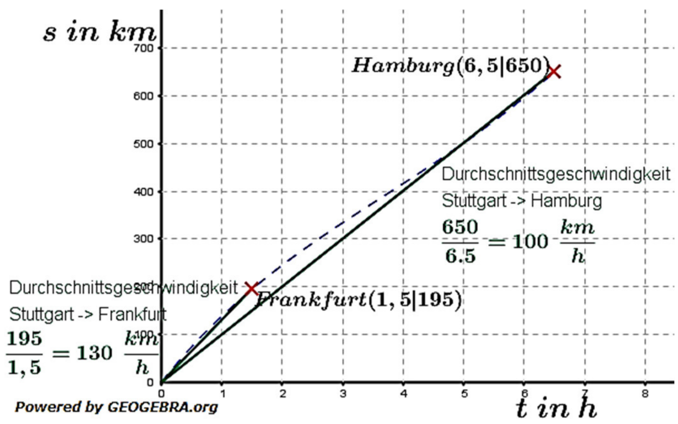
Wir unterscheiden dabei zwischen

mittlerer Änderungsrate *und* ***momentaner Änderungsrate.***

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Änderungsrate

Mittlere Änderungsrate

Einmal angenommen, wir hätten auf unserer Fahrt zwischen Stuttgart und Hamburg alle 10 Minuten die zurückgelegte Strecke über das Tachometer gemessen und die sich ergebenden Punkte in einem Koordinatensystem eingetragen und miteinander verbunden. Wir erhielten dann die in nebenstehender Grafik gestrichelt blau markierte Kurve.



Jetzt wird Vater Jan von seinem fünfjährigen Sohn Berti gefragt, wie schnell er denn gefahren sei.

Vater Jan überlegt nicht lange und sagt: „Berti, ich bin mit $100\,\frac{km}{h}$ von Stuttgart nach Hamburg gefahren." Wie kommt Vater Jan darauf?
Nun, er hat ganz einfach gerechnet: in $6{,}5$ Stunden bin ich $650\ km$ weit gekommen, das entspricht ja genau $\frac{650\ km}{6{,}5\ h} = 100\,\frac{km}{h}$. Vater Jan hat damit seine Durchschnitts-Geschwindigkeit errechnet. Und diese Durchschnittsgeschwindigkeit ist nichts anderes, als die mittlere Änderungsrate im Zeitraum zwischen Abfahrtszeit (Stunde null) und Ankunftszeit Hamburg (Stunde $6{,}5$).
Betrachten wir noch die Strecke zwischen Stuttgart und Frankfurt. Für $195\ km$ hat Vater Jan $1{,}5$ Stunden benötigt. Also fuhr er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $\frac{195\ km}{1{,}5\ h} = 130\,\frac{km}{h}$. Die mittlere Änderungsrate im Zeitraum zwischen Abfahrtszeit (Stunde null) und Ankunftszeit Frankfurt (Stunde $1{,}5$) beträgt $130\,\frac{km}{h}$.

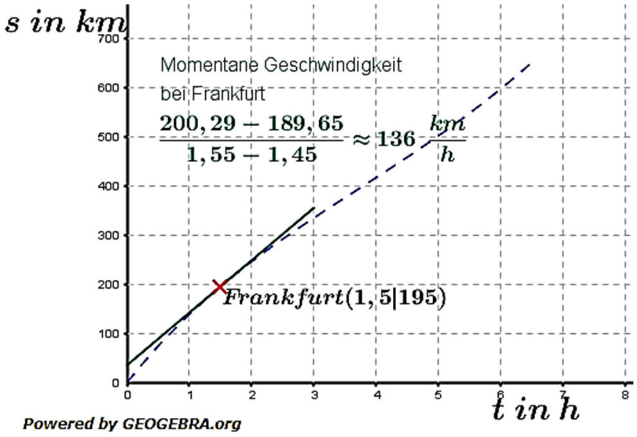
Betrachten wir uns noch einmal die Grafik. Wir sehen, dass die grün eingezeichneten Durchschnittsgeschwindigkeiten die blau gestrichelte Messkurve schneiden. Die grünen Linien sind ja Geraden. Bekanntlich haben Geraden ja eine Steigung m. Und der Wert dieser Steigung ist gleich dem Wert der mittleren Änderungsrate, in unserem Beispiel die Durchschnittsgeschwindigkeit.

Merksatz

Die *mittlere Änderungsrate* ist die durchschnittliche Änderung einer zeitabhängigen Messgröße G zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2, also im Zeitraum $\Delta t = t_2 - t_1$. Berechnet wird sie als Quotient aus der Differenz der beiden Werte zu diesen Zeitpunkten $\Delta G = G(t_2) - G(t_1)$ und der Dauer Δt des Zeitraums $\frac{\Delta G}{\Delta t}$.
Im Zeit-Größen-Diagramm (Funktionsgraph, Schaubild) von $G(t)$ ist die mittlere Änderungsrate zwischen t_1 und t_2 die Steigung der Sekante durch die Punkte $(t_1|G(t_1)$ und $(t_2|G(t_2)$ auf dem Diagramm.
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Änderungsrate#Mittlere_.C3.84nderungsrate

Momentane Änderungsrate

Wie wir zuvor gesehen haben, gibt es auf der Strecke zwischen Stuttgart und Hamburg wohl unterschiedliche Geschwindigkeiten. Uns interessiert nun, welche Geschwindigkeit Vater Jan zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt fährt. Hierzu betrachten wir den Punkt Frankfurt $(1{,}5|195)$.



Nehmen wir einmal an, wir hätten die zurückgelegte Strecke zum Zeitpunkt $t_1 = 1{,}45$ Stunden und $t_2 = 1{,}55$ Stunden gemessen. Als Messergebnisse bei t_1 erhielten wir $189{,}65\ km$ und bei t_2 erhielten wir $200{,}29\ km$.

Gemäß den Regeln für die mittlere Änderungsrate bilden wir nun Quotient aus der Differenz der beiden Werte zu diesen Zeitpunkten $\Delta s = s_2 - s_1$ und der Dauer $\Delta t = t_2 - t_1$.

$\Delta s = s_2 - s_1 = 200{,}29 - 189{,}65 = 10{,}64;\quad \Delta t = t_2 - t_1 = 1{,}55 - 1{,}45 = 0{,}1$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10{,}64\ km}{0{,}1\ h} \approx 136 \frac{km}{h}$

Jetzt haben wir zwar wiederum eine mittlere Änderungsrate im Zeitintervall zwischen $1{,}45\ h$ und $1{,}55\ h$ berechnet, da dieses Zeitintervall jedoch sehr klein ist, können wir ohne Bedenken erklären, dass Berts Vater mit $136 \frac{km}{h}$ an Frankfurt vorbeigefahren ist.

Wir könnten dieses Spiel jetzt noch lange weitertreiben, indem wir unsere Zeitpunktintervalle immer kleiner machen, z. B. zwischen $t_1 = 1{,}499\ h$ und $t_2 = 1{,}501\ h$. Wir kämen damit immer näher an die momentane Geschwindigkeit heran. Und diese momentane Geschwindigkeit entspricht der momentanen Änderungsrate.

Betrachten wir uns noch einmal die Grafik. Wir sehen, dass die grün eingezeichnete Momentangeschwindigkeit die blau gestrichelte Messkurve berührt. Die grüne Linie ist wiederum eine Gerade. Der Unterscheid zur mittleren Änderungsrate ist der, dass dort die grünen Linien die Messkurve schneiden. Bei der momentanen Änderungsrate haben wir aber keine Schnittpunkte mehr, sondern einen einzigen Berührpunkt. Die Gerade ist also zur Tangente an die Messkurve geworden. Die momentane Änderungsrate entspricht also der Steigung der Tangente als auch der Kurve im untersuchten Punkt.

Merksatz

Die *momentane Änderungsrate* ist die auf einen „Moment" (sehr kurzen Zeitraum) bezogene Veränderung einer zeitabhängigen Messgröße G. Sie kann mathematisch als Ergebnis des Grenzprozesses $\frac{dG}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}$ als Ableitung $G'(t)$ einer Zeit-G-Funktion $G(t)$ dargestellt werden.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Änderungsrate#Momentane_.C3.84nderungsrate

Nähere Einzelheiten und Regeln als auch Übungen findest du in den einzelnen Kapiteln „Mittlere Änderungsrate" und „Momentane Änderungsrate" hier im Portal.