Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 52 Aufgaben

Aufgabe A1

Gib von der ganzrationalen Funktion f den Grad, die Koeffizienten und das Absolutglied an.

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3x + 6$
b) $f(x) = -7x^4 + x^3 - 4x$
c) $f(x) = x^6 + 2x^4 - x^2 + 2$
d) $f(x) = 0{,}4x^4 - 0{,}8x^2 + 1{,}7$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$
g) $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)$
h) $f(x) = 3(x + 3)(x - 2)^2$
i) $f(x) = x^3\left(2 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) - 4$
j) $f(x) = -2(x - 3)^2(x + 2)$

Aufgabe A2

Überlege, welche Vorzeichen die Funktionswerte $f(500)$ und $f(-500)$ haben könnten.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$
b) $f(x) = -x^5 + 2x^3 + 15000$
c) $f(x) = x^6 - 2x^3 + x^2 - x + 1$
d) $f(x) = 3x^8 - 0{,}0001x^5$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$
g) $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)$
h) $f(x) = 3(x + 3)(x - 2)^2$

Aufgabe A3

Gib eine Funktion h mit $h(x) = a_n x^n$ an, die das Verhalten der Graphen von f für die Werte von $\pm\infty$ beschreibt.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - x$
b) $f(x) = 3x^9 - 2x^5 + 15000x$
c) $f(x) = x^5 + 100000x - 1$
d) $f(x) = 3x^8 - 0{,}0001x^6$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$
g) $f(x) = 3x(x^5 + x^2 - 1500)$
h) $f(x) = 3x^4(x + 2)(x - 3)$

Aufgabe A4

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe.

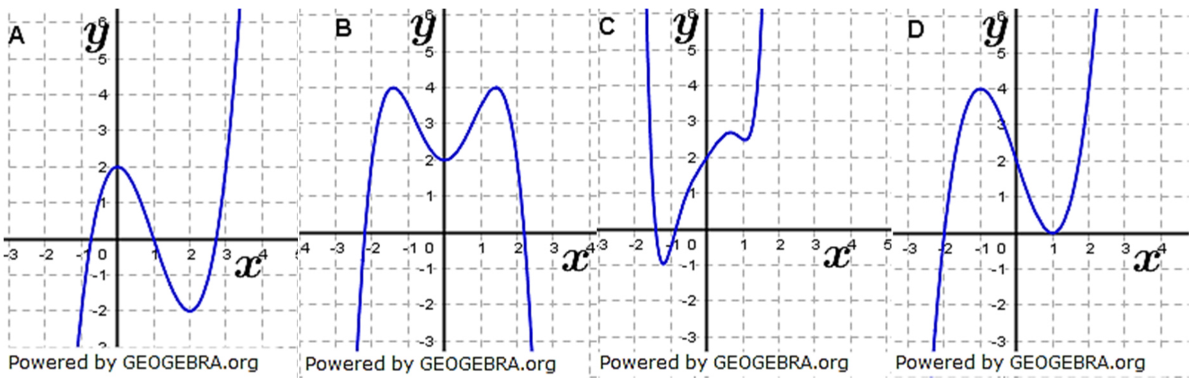
$f_1(x) = x^6 - 2x^4 + 1{,}5x + 2$

$f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f_3(x) = x^3 - 3x + 2$

$f_4(x) = -0{,}5x^4 + 2x^2 + 2$

$f_5(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1) + 4$



Aufgabe A5

Gib eine Funktion an, die das Verhalten des Graphen von f nahe 0 beschreibt.

a) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 02x^3 - x + 2$

c) $f(x) = 3x^3 + 0{,}5x^2 + 10000x$

d) $f(x) = -3x^4 + x^2$

e) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 - 1$

f) $f(x) = x(x-2)(x+3)$

g) $f(x) = 3x(x^3 + x^2 - x)$

h) $f(x) = 3x(x^3 + x^2 - 1) + \sqrt{2}$

Aufgabe A6

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe. Es sind zwei Funktionen zu viel angegeben. Skizziere von diesen Funktionen die Graphen.

$f_1(x) = -2x^3 - 2x + 10$

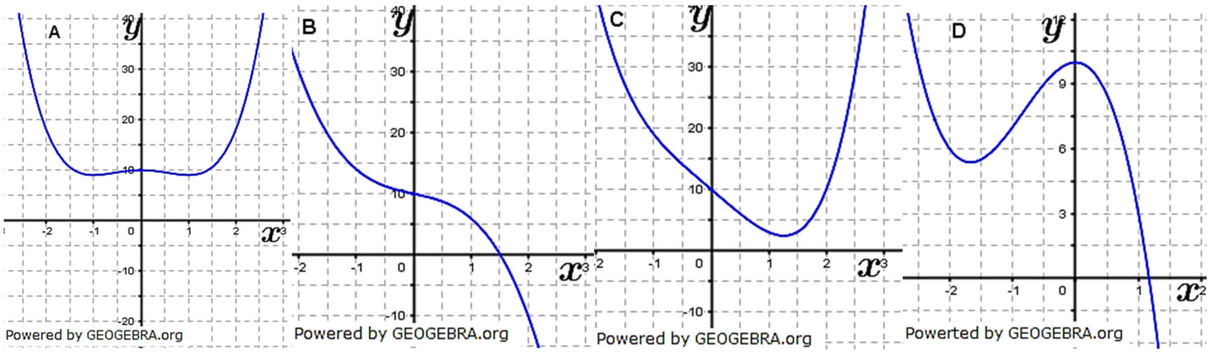
$f_2(x) = x^4 - 2x^2 + 10$

$f_3(x) = x^4 + 2x^2 + 10$

$f_4(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10$

$f_5(x) = x^4 - 8x + 10$

$f_6(x) = -2x^3 + 5x + 10$



Aufgabe A7

Mithilfe der fünf Zahlen $-2;\ -1;\ 0;\ 1$ und 2 als Koeffizienten können verschiedene, ganzrationale Funktionen gebildet werden, wobei in jeder Funktionsgleichung die genannten Koeffizienten nur einmal vorkommen dürfen, aber jeder einzelne vorkommen muss.

Beispiele:

$f(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$ oder

$f(x) = 0 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 1$

Bestimme eine derartige Funktion so, dass

a) der Graph von f die y-Achse im Punkt $P(0|1)$ schneidet,

b) der Graph von f durch den Ursprung geht,

c) $f(-1) = 6$ ist,

d) der Graph von f aus dem dritten in den ersten Quadranten verläuft,

e) der Graph von f aus dem vierten in den zweiten Quadranten verläuft,

f) die Funktionswerte von f für $x \to |\infty|$ gegen Unendlich streben,

g) das Verhalten von f nahe 0 durch die Funktion $g(x) = x - 2$ beschrieben wird,

h) das Verhalten von f für sehr große und sehr kleine Werte von x durch die Funktion $h(x) = 2x^4$ beschrieben wird.

Lösung A1

Lösungslogik:

Das Funktionsglied mit dem höchsten Exponenten von x bestimmt den Grad der Funktion.
Die Vorzahlen der einzelnen Potenzen von x sind die Koeffizienten.
Die einzelne Zahl innerhalb der Funktionsgleichung nennt man auch „absolutes Glied".

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3x + 6$ ist 3. Grades mit $a_3 = 3$, $a_2 = -4$, $a_1 = 3$ und $a_0 = 6$.
b) $f(x) = -7x^4 + x^3 - 4x$ ist 4. Grades mit $a_4 = -7$, $a_3 = 1$ und $a_1 = -4$.
c) $f(x) = x^6 + 2x^4 - x^2 + 2$ ist 6. Grades mit $a_6 = 1$, $a_4 = 2$, $a_2 = -1$ und $a_0 = 2$.
d) $f(x) = 0{,}4x^4 - 0{,}8x^2 + 1{,}7$ ist 4. Grades mit $a_4 = 0{,}4$, $a_2 = -0{,}8$ und $a_0 = 1{,}7$.
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$ ist 7. Grades mit $a_7 = -0{,}1$, $a_5 = 2{,}5$, $a_3 = -0{,}1$, und $a_0 = 1$.
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$ ist 5. Grades mit $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{9}$ und $a_0 = -6{,}6$.
g) $f(x) = x(x^2 - 2x + 2) = x^3 - 2x^2 + 2x$ ist 3. Grades mit $a_3 = 1$, $a_2 = -2$ und $a_1 = 2$.
h) $f(x) = 3(x + 3)(x - 2)^2 = (3x + 9)(x^2 - 4x + 4) = 3x^3 - 3x^2 - 30x + 36$ ist 3. Grades mit $a_3 = 3$, $a_2 = -3$, $a_1 = -30$ und $a_0 = 36$.
i) $f(x) = x^3\left(2 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) - 4 = \frac{1}{2}x^5 - 2x^4 + 2x^3$ ist 5. Grades mit $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -2$ und $a_3 = 2$.
j) $f(x) = -2(x - 3)^2(x + 2) = (-2x - 4)(x^2 - 6x + 9) = -2x^3 + 8x^2 + 6x - 36$ ist 3. Grades mit $a_3 = -2$, $a_2 = 8$, $a_1 = 6$ und $a_0 = -36$.

Lösung A2

Lösungslogik:

Für den Funktionswert der Funktionen bei sehr großen bzw. sehr kleinen Werten von x muss lediglich das Funktionsglied mit der höchsten Potenz betrachtet werden.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^3.
$f(500) > 0; \quad f(-500) < 0$
b) $f(x) = -x^5 + 2x^3 + 15000$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-x^5$.
$f(500) < 0; \quad f(-500) > 0$
c) $f(x) = x^5 + 100000x - 1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^5.
$f(500) > 0; \quad f(-500) < 0$
d) $f(x) = 3x^8 - 0{,}0001x^5$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^8.
$f(500) > 0; \quad f(-500) > 0$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-x^7$.
$f(500) < 0; \quad f(-500) > 0$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^5.
$f(500) > 0; \quad f(-500) < 0$
g) $f(x) = 3x(x^5 + x^2 - 1500)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^6.
$f(500) > 0; \quad f(-500) < 0$
h) $f(x) = 3x^4(x + 2)(x - 3)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^6.
$f(500) > 0; \quad f(-500) < 0$

Lösung A3

Lösungslogik:

Für das Verhalten von Graphen für die x-Werte ∞ bzw. $-\infty$ muss lediglich das Funktionsglied mit der höchsten Potenz betrachtet werden.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - x$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-3x^3$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = -3x^3$

b) $f(x) = 3x^9 - 2x^5 + 15000x$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^9$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = 3x^9$

c) $f(x) = x^5 + 100000x - 1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^5.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = x^5$

d) $f(x) = 3x^8 - 0{,}0001x^6$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^8$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = 3x^8$

e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-0{,}1x^7$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = -0{,}1x^7$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $\frac{1}{2}x^5$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = \frac{1}{2}x^5$

g) $f(x) = 3x(x^5 + x^2 - 1500)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^6$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = 3x^6$

h) $f(x) = 3x^4(x+2)(x-3)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^6$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x) = 3x^6$

Lösung A4

Klausuraufschrieb:

Abbildung A gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach $-\infty$ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-3x^2 + 2$.

Abbildung B gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_4(x) = -0{,}5x^4 + 2x^2 + 2}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach $-\infty$ und für $x \to \infty$ nach $-\infty$. Der Graph verläuft nahe 0 wie $2x^2 + 2$.

Abbildung C gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_1(x) = x^6 - 2x^4 + 1{,}5x + 2}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $1{,}5x + 2$.

Abbildung D gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_3(x) = x^3\text{-3x+2}}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach $-\infty$ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-3x + 2$.

Lösung A5

Lösungslogik:

Für das Verhalten von Graphen für die x-Werte nahe 0 muss lediglich das Funktionsglied mit der niedrigsten Potenz sowie das absolute Glied (falls vorhanden) betrachtet werden.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $2x - 1$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 02x^3 - x + 2$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-x + 2$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -x + 2$

c) $3x^3 + 0{,}5x^2 + 10000x$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $10000x$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = 10000x$

d) $f(x) = -3x^4 + x^2$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist x^2.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = x^2$

e) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 - 1$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $x^2 - 1$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = x^2 - 1$

f) $f(x) = x(x-2)(x+3) = x^3 + x^2 - 6x$
Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-6x$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -6x$

g) $3x(x^3 + x^2 - x)$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-3x^2$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -3x^2$

h) $f(x) = 3x(x^3 + x^2 - 1) + \sqrt{2}$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-3x + \sqrt{2}$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -3x + \sqrt{2}$

Lösung A6

Klausuraufschrieb:

Abbildung A gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_2(x) = x^4 - 2x^2 + 100}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-2x^2$.

Abbildung B gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_1(x) = -2x^3 - 2x + 10}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach $-\infty$. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-2x + 10$.

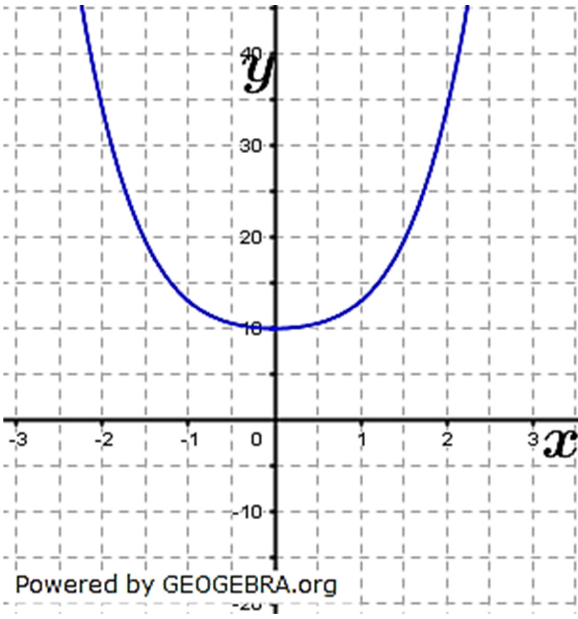
Abbildung C gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_5(x) = x^4 - 8x + 10}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-8x + 10$.

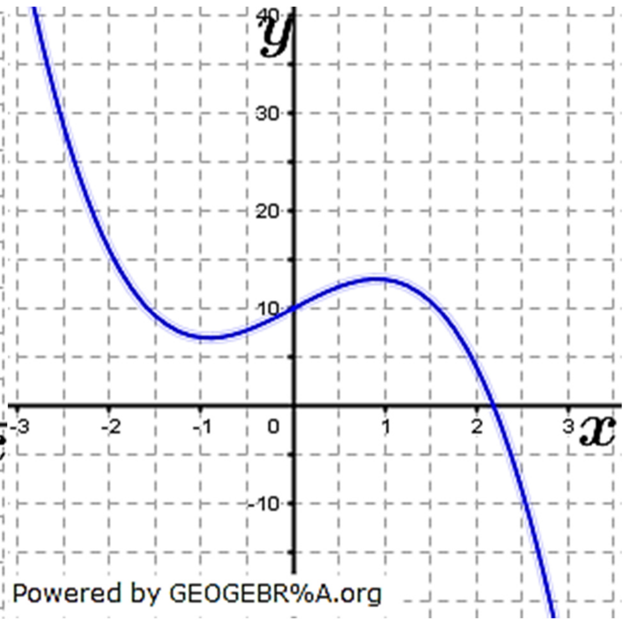
Abbildung D gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_4(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach $-\infty$. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-5x^2 + 10$.

Verbleibende Funktionsgleichungen ohne Abbildung:

$f_3(x) = x^4 + 2x^2 + 10$

$f_6(x) = -2x^3 + 5x + 10$





Lösung A7

Lösungslogik:

Aufgrund der Aufgabenstellung sind stets Funktionsgleichungen von ganzrationalen Funktionen 4. Grades aufzustellen. Gegebenenfalls ist a_4 auf 0 zu setzen.

Klausuraufschrieb:

a) der Graph von f die y-Achse im Punkt $P(0|1)$ schneidet,
$f(x) = -2 \cdot x^4 - 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$

b) der Graph von f durch den Ursprung geht,
$f(x) = -2 \cdot x^4 - 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 0$

c) $f(-1) = 6$ ist,
$f(x) = 2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 0$

d) der Graph von f aus dem dritten in den ersten Quadranten verläuft,
$f(x) = 0 \cdot x^4 - 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

e) der Graph von f aus dem vierten in den zweiten Quadranten verläuft,
$f(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$

f) die Funktionswerte von f für $x \to |\infty|$ gegen Unendlich streben,
$f(x) = 2 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 - 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 2$

g) das Verhalten von f nahe 0 durch die Funktion $g(x) = x - 2$ beschrieben wird,
$f(x) = 2 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2$

h) das Verhalten von f für sehr große und sehr kleine Werte von x durch die Funktion $h(x) = 2x^4$ beschrieben wird.
$f(x) = -2 \cdot x^8 - 1 \cdot x^7 + 0 \cdot x^6 + 2 \cdot x^5 + 2x^4$