Funktionsklassen Ganzrationale Funktionen

Kapitel mit 351 Aufgaben

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Definition des Begriffs „Funktion“

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, *x*-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, *y*-Wert) zuordnet.

Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen sind zusammengesetzte Funktionen, deren einzelne Glieder wiederum aus Potenzfunktionen mit ganzzahlig positivem Exponenten bestehen.
Die allgemeinen Form einer Ganzrationalen Funktion lautet:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

n ist höchste Potenz, $n-1$ ist die um 1 verminderte höchste Potenz, $n-2$ die um 2 verminderte höchste Potenz usw. bis zur Potenz 1 bei $a_1 x$. Am Ende der Funktionsgleichung steht dann das absolute Glied a_0.
Die a-Werte in der Gleichung werden als Koeffizienten bezeichnet. Alle a sind Element von $\mathbb{R}$. Die Indices von a_n, a_{n-1}, a_{n-2} usw. verweisen auf die Teilfunktion mit dem entsprechenden n als Exponenten.

Klassifizierung ganzrationaler Funktionen, Definitionsmenge

Entsprechend der höchsten Potenz n von x wird den ganzrationalen Funktionen ein Grad zugesprochen. Ist $n = 3$, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Ist $n = 4$, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 4. Grades.
Ganzrationale Funktionen werden auch Polynome oder (seltener für Funktionen mit einem Grad größer 2) Parabeln genannt.
Auch die lineare Funktion g mit $g(x) = mx + c$ zählt zu den ganzrationalen Funktionen, sie ist vom Grad 1.
Der Nullfunktion f mit $f(x) = 0$ (für alle reellen Werte von x) wird kein Grad zugeordnet.
Die maximale Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion ist $\mathbb{R}$.

Merksatz Definition ganzrationaler Funktionen

Eine Funktion f, deren Funktionsgleichung man in der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

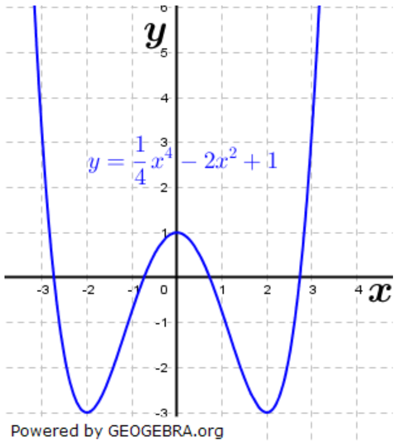
schreiben kann, heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades. Dabei sind $a_0, a_1, \dots a_n$ reelle Zahlen ($a_n \neq 0$). n ist eine natürliche Zahl.

n bestimmt gleichzeitig den Grad der Funktion. Wir sprechen von ganzrationalen Funktionen *n-ten Grades*.

Auswirkung des Exponenten n

Je nachdem ob die höchste Potenz n der Funktions-gleichung gerade oder ungerade ist, hat der Graph einer ganzrationalen Funktion unterschiedlichen Verlauf.

Auswirkung gerader Werte von n.



Wir betrachten eine Funktion mit $n = 4$.
Der Graph der rechts dargestellten Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$. Gemäß der Klassifizierung von zuvor handelt es sich um eine ganzrationale Funktion *4. Grades*.
Wir wollen uns nun anhand des Funktionsterms ein ungefähres Bild vom Verlauf des Graphen der ganzrationalen Funktion machen.
Dazu untersuchen wir zunächst, wie sich die Funktion für sehr große und sehr kleine Werte von x verhält. Eine Auswahl entsprechender Werte findet sich in nachfolgender Tabelle.

x	-1000000	-100000	-1000	0	1000	100000	1000000
$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$	$5 \cdot 10^{23}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{11}$	2	$5 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{23}$
$\frac{1}{2}x^4$	$5 \cdot 10^{23}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{11}$	2	$5 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{23}$

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung währen in der dritten Tabellenzeile nur das erste Glied der Funktionsgleichung berücksichtigt ist.
Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktions-gleichung als auch für die Rumpfgleichung dieselben Werte, was ja auch aus obiger Grafik hervorgeht, der Graph der Funktion verläuft von links oben nach rechts oben.

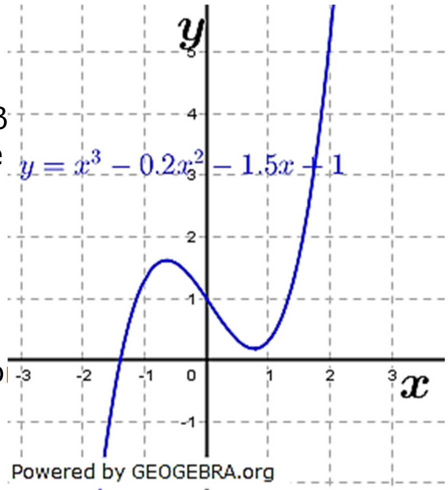
Betrachten wir jetzt das Verhalten von f nahe Null über die nachfolgend aufgeführte Tabelle:

x	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}05$	$0{,}1$
$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$	$1{,}98$	$1{,}995$	$1{,}9998$	2	$1{,}9998$	$1{,}995$	$1{,}98$
$-2x^2 + 2$	$1{,}98$	$1{,}995$	$1{,}9998$	2	$1{,}9998$	$1{,}995$	$1{,}98$

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung während in der dritten Tabellenzeile nur die letzten beiden Glieder der Funktionsgleichung berücksichtigt sind. Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktionsgleichung als auch für die Rumpfgleichung dieselben Werte. Das Verhalten nahe Null wird somit nur durch die letzten beiden Glieder beeinflusst.

Auswirkung ungerader Werte von n.

Wir betrachten nun eine Funktion mit $n = 3$.
Der Graph der rechts dargestellten Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 1$. Gemäß der Klassifizierung von zuvor handelt es sich um eine ganzrationale Funktion *3. Grades*.
Wir machen uns wieder anhand des Funktionsterms ein ungefähres Bild vom Verlauf des Graphen dieser ganzrationalen Funktion.



Dazu untersuchen wir wiederum, wie sich die Funktion für sehr große und sehr kleine Werte von x verhält. Eine Auswahl entsprechender Werte findet sich in nachfolgender Tabelle.

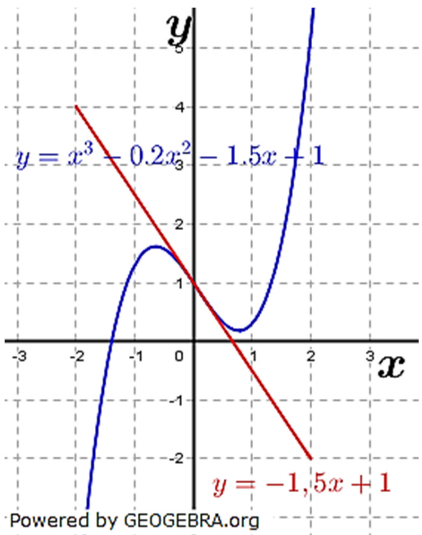
x	-1000000	-100000	-1000	0	1000	100000	1000000
$x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 1$	-10^{18}	-10^{15}	-10^9	2	10^9	10^{15}	10^{18}
x^3	-10^{18}	-10^{15}	-10^9	2	10^9	10^{15}	10^{18}

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung währen in der dritten Tabellenzeile nur das erste Glied der Funktionsgleichung berücksichtigt ist.
Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktions-gleichung als auch für die Rumpfgleichung dieselben Werte. Allerdings im Gegensatz zu geraden Werten von n stellen wir fest, dass, je kleiner der x-Wert wird, umso kleiner wird der $f(x)$-Wert. Und je größer x wird, umso größer wird der $f(x)$-Wert. Der Graph der Funktion verläuft von links unten nach rechts oben.

Betrachten wir jetzt das Verhalten von f nahe Null über die nachfolgend aufgeführte Tabelle:

x	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}05$	$0{,}1$
$x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 1$	$1{,}147$	$1{,}074$	$1{,}015$	1	$0{,}985$	$0{,}925$	$0{,}849$
$-1{,}5x + 1$	$1{,}15$	$1{,}075$	$1{,}015$	1	$0{,}985$	$0{,}925$	$0{,}85$

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung während in der dritten Tabellenzeile nur die letzten beiden Glieder der Funktionsgleichung berücksichtigt sind. Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktionsgleichung als auch für die Rumpfgleichung ungefähr dieselben Werte. Das Verhalten nahe Null wird somit nur durch die letzten beiden Glieder beeinflusst, wie dies auch aus nebenstehender Grafik hervorgeht.



Fazit:
Wir haben festgestellt, dass das Verhalten ganzrationaler Funktionen für sehr kleine bzw. sehr große Werte von x nur von der ***höchsten*** Potenz von x der Funktionsgleichung beeinflusst wird, alle Glieder der Funktionsgleichung sind nicht von Interesse.
Dagegen ist beim Verhalten nahe Null nur die ***kleinste*** Potenz von x zuzüglich einem eventuell vorhandenen absoluten Glied zuständig. Dies führt uns zu nachfolgendem

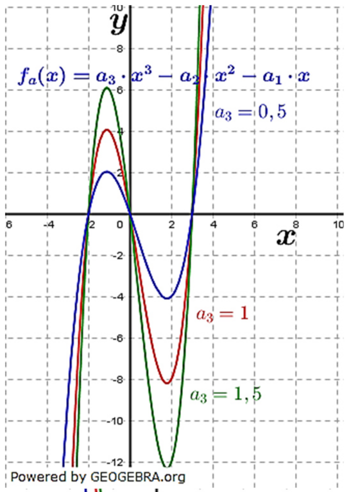
Merksatz Verhalten ganzrationaler Funktionen

Verhalten für $x \to \pm\infty$
Für $x \to \pm\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion vom Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt. Der Graph verhält sich wie der Graph mit der Gleichung $y = a_n x^n$, wobei n der Grad von f ist.

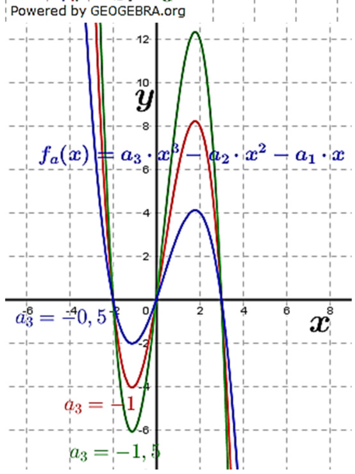
Verhalten für x nahe 0
Für x nahe 0 wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion von den Summanden mit der niedrigsten Potenz bestimmt. Der Graph verhält sich wie derjenige Graph mit der Gleichung $y = a_k x^k + a_0$, wobei k die niedrigste Hochzahl von f ist, die vorkommt.

Auswirkung des Koeffizienten a_n

Der Parameter a_n beeinflusst die Streckung des Graphen der Funktion in y-Richtung.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies anhand der Funktionsgleichung
$f(x) = a_3 \cdot x^3 - a_2 \cdot x^2 - a_1 \cdot x$.



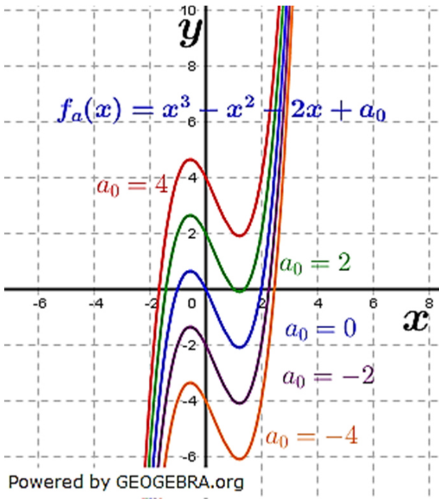
Für den Parameter $a_3 > 0$ gilt:
Ist $0 < a_3 < 1$ wird der Graph in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestaucht.
Ist $a_3 > 1$ wird der Graph in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestreckt.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies mit $a_3 = 0{,}5$, $a_3 = 1$ und $a_3 = 1{,}5$.



Ist hingegen $a_3 < 0$, so gilt:
Ist $-1 < a_3 < 0$ wird der Graph zunächst an der x-Achse gespiegelt und dann in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestaucht.
Ist $a_3 < -1$ wird der Graph zunächst an der x-Achse gespiegelt und dann in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestreckt.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies mit $a_3 = -0{,}5$, $a_3 = -1$ und $a_3 = -1{,}5$.

Auswirkung des Parameters a_0

Der Parameter a_0 beeinflusst die Verschiebung des Graphen der Funktion in y-Richtung.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies anhand der Funktionsgleichung
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + a_0$.

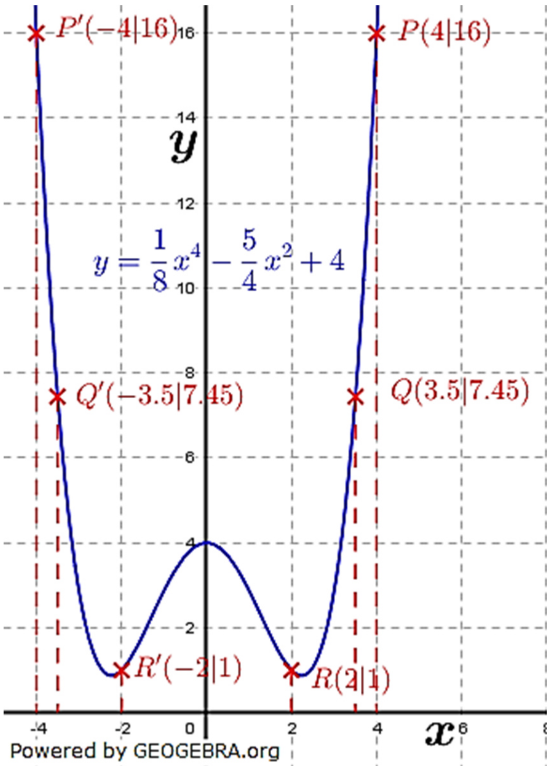


Für den Parameter a_0 gilt:
Der Graph wird in y-Richtung verschoben und zwar um die Anzahl Einheiten deren Wert von a_0 darstellt wird.
Die Funktion schneidet dabei die y-Achse im Punkt $S_y(0|a_0)$, also an der Stelle der y-Achse, die dem Wert von a_0 entspricht.
Der Parameter a_0 wird auch y-Achsenabschnitt genannt (vergleiche lineare Funktionen mit $y = mx + c$ sowie quadratische Funktionen mit $y = ax^2 + bx + c$, das dortige c entspricht dem hiesigen a_0).

Symmetrie

Neben dem Verhalten für $x \to \pm\infty$ und für x nahe 0 haben ganzrationale Funktionen noch weitere Eigenschaften, die das Zeichnen ihrer Graphen erleichtern.
Hier behandeln wir nun zwei grundlegende Symmetrieeigenschaften, nämlich die **Achsensymmetrie** (Symmetrie zu x-Achse) und die **Punktsymmetrie** (Symmetrie zum Ursprung).

Achsensymmetrie
Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 4$. Die rechte Abbildung zeigt den Graphen von f.
Betrachten wir die Punkte P, Q und R sowie deren „Spiegelpunkte" P', Q' und R', so stellen wir fest, dass die jeweiligen y-Werte identisch, die x-Werte die jeweiligen Spiegel an der y-Achse sind.



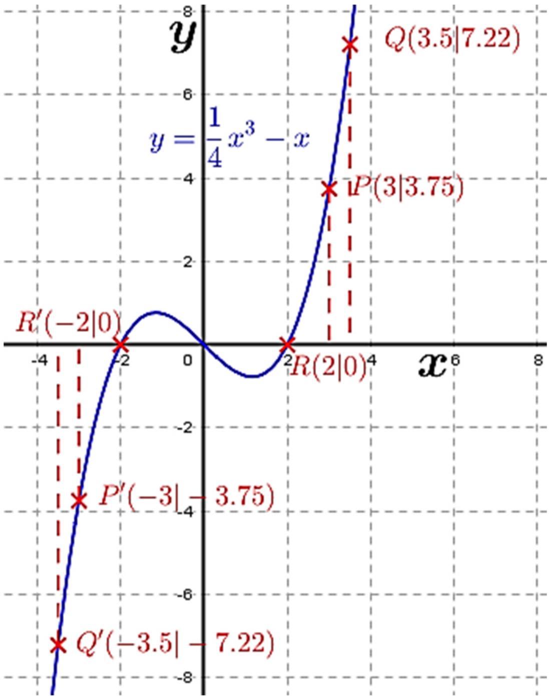
Wir können hieraus den Merksatz für die Achsensymmetrie herleiten, nämlich

Merksatz Achsensymmetrie

Der Graph einer Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:
$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie

Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$. Die rechte Abbildung zeigt den Graphen von f.
Betrachten wir die Punkte P, Q und R sowie deren „Spiegelpunkte" P', Q' und R', so stellen wir fest, dass die jeweiligen y-Werte die Spiegel an der x-Achse, die x-Werte die jeweiligen Spiegel an der y-Achse sind.
Wir können hieraus den Merksatz für die Punktsymmetrie herleiten, nämlich



Merksatz Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung $O(0|0)$, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$-f(-x) = f(x)$$

Hinweis:
Im Schulbetrieb wird eigentlich gelehrt, dass *f(-x)=-f(x)* ist. Die hier aufgeführte Regel mit *-f(-x)=f(x)* ist identisch, denn die Multiplikation von *f(-x)=-f(x)* mit *-1* führt ja zu *-f(-x)=f(x)*. Letztere Formel führt jedoch zu einfacheren Berechnungen, wenn Symmetrie rechnerisch nachgewiesen werden soll.

Beispiele

Beispiel 1: Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 4x^6 - 3x^4 + 2$. Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 1: Wir bilden $f(-x)$:
$f(-x) = 4 \cdot (-x)^6 - 3 \cdot (-x)^4 + 2$ | Auflösung der Klammern
$f(-x) = 4x^6 - 3x^4 + 2 = f(x)$
Die Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse wegen
$f(-x) = f(x)$

Beispiel 2: Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$. Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 2: Wir bilden zunächst $f(-x)$:
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^5 - 2 \cdot (-x)^3 - x$ | Auflösung der Klammern
$f(-x) = -3x^5 + 2x^3 - x \neq f(x)$
Die Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse wegen
$f(-x) \neq f(x)$
Wir bilden $-f(-x)$:
$-f(-x) = 3x^5 - 2x^3 + x = f(x)$
Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung wegen
$-f(-x) = f(x)$

Beispiel 3: Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$. Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 3: Wir bilden zunächst $f(-x)$:

$f(-x) = 3 \cdot (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 - x$ | Auflösung der Klammern

$f(-x) = 3x^4 - 2x^2 - x \neq f(x)$

Die Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse wegen $f(-x) \neq f(x)$

Wir bilden zunächst $f(-x)$:

$-f(-x) = -(3x^4 - 2x^2 - x) = -3x^4 + 2x^2 + x \neq f(x)$

Die Funktion f ist weder achsen- noch punktsymmetrisch wegen $f(-x) \neq f(x) \wedge -f(-x) \neq f(x)$.

Beispiel 4 Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$. Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 4: Wir bilden zunächst $f(-x)$:

$f(-x) = 3 \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) + 5$ | Auflösung der Klammern

$f(-x) = -3x^3 + 2x + 5 \neq f(x)$

Die Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse wegen $f(-x) \neq f(x)$

Wir bilden $-f(-x)$:

$-f(-x) = -(-3x^3 + 2x + 5) = 3x^3 - 2x - 5 \neq f(x)$

Die Funktion f ist weder achsen- noch punktsymmetrisch wegen $f(-x) \neq f(x) \wedge -f(-x) \neq f(x)$.

Aus den obigen Beispielen erkennen wir:

Ganzrationale Funktionen sind nur dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn die Potenzen von x alle geradzahlig sind.

Ganzrationale Funktionen sind nur dann punktsymmetrisch, wenn die Potenzen von x alle ungeradzahlig sind und das absolute Glied a_0 fehlt.

Achsensymmetrien zu anderen Achsen bzw. Punktsymmetrien zu anderen Punkten findest du im Kapitel

Graphen und Funktionen analysieren

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Wir unterscheiden zwei Arten von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen, nämlich zum einen den **Schnittpunkt** mit der **y-Achse** und zum anderen den bzw. die **Schnittpunkte** mit der **x-Achse**, **Nullstellen** genannt.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Der Graph jeder ganzrationalen Funktion hat genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse. Dieser Punkt hat die Koordinaten $S_y(0|a_0)$. Der Parameter a_0 wird ja auch als y-Achsenabschnitt bezeichnet und ist das absolute Glied der Funktionsgleichung ganzrationaler Funktionen, siehe Abschnitt

Auswirkung des Parameters a_0

weiter vorne in diesem Kapitel.

Schnittpunkt mit der x-Achse

Kennen wir die Nullstellen einer Funktion, so kann uns dies für das Zeichnen des Graphen oder für die Bearbeitung einer Anwendungsaufgabe nützlich sein.
Wir haben die Berechnung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen ersten Grades (Geraden) bzw. zweiten Grades (Parabeln) bereits kennengelernt und geübt.

Bei einer Geradengleichung mit z. B. $g(x) = 2x - 8$ mussten wir die Gleichung $2x - 8 = 0$ lösen, womit wir die Nullstelle $x = 4$ erhielten.

Bei einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades (Parabel) mit z. B. $p(x) = x^2 + x - 6$ erhielten wir nach Auflösung mit der Mitternachtsformel der Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ die beiden Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$.

Die Nullstellen von Funktionen höheren Grades können wir in der Regel nicht mit einer allgemein gültigen Formel – wie etwa der Mitternachtsformel – lösen. Wir können aber in einigen Fällen durch Umformungen ein „schwieriges“ Problem in mehrere „leichte“ Probleme überführen.

Nullstellenverfahren

Nullstellen durch **Wurzelziehen**

In einfachen Fällen, wenn im Funktionsterm nur eine einzige Potenz von x vorkommt, lassen sich Nullstellen durch **Wurzelziehen** berechnen.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 8x^4 - 50$. Berechne die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = 8x^4 - 50$	|	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$8x^4 - 50 = 0$	|	$+50;\ :8$
$x^4 = 6{,}25$	|	$\sqrt[4]{\ }$
$x_1 = \sqrt[4]{6{,}25};\quad x_2 = -\sqrt[4]{6{,}25}$		

Nullstellen durch **Linearfaktorzerlegung**

Haben wir einen Funktionsterm, der in **Linearfaktoren** zerlegt ist wie z. B. $f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-5)$, lassen sich die Nullstellen aus dieser Darstellung ablesen.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-5)$. Ermittle die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-5)$	|	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$2(x+1)(x-1)(x-5) = 0$	|	Satz vom Nullprodukt
$(x+1) = 0 \Rightarrow\ x_1 = -1$		
$(x-1) = 0 \Rightarrow\ x_2 = 1$		
$(x-5) = 0 \Rightarrow\ x_3 = 5$		

Nullstellen durch Potenzen von x **ausklammern**.

In manchen Fällen kann man eine Potenz von x **ausklammern** wie z. B. bei $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$. Ermittle die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$ | Nullstellen mit $f(x) = 0$

$x^4 - 3x^3 - 10x^2 = 0$ | Ausklammern von x^2

$x^2(x^2 - 3x - 10) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x_{3,4} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$ | p/q-Formel

$x_3 = 1{,}5 + 3{,}5 = 5$

$x_4 = 1{,}5 - 3{,}5 = 2$

Nullstellen durch **Substitution**.

Substitution ist eine weitere Methode zur Nullstellenbestimmung wie z. B. bei $f(x) = x^4 - 9x^2 + 8$.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 9x^2 + 8$. Ermittle die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = x^4 - 9x^2 + 8$ | Nullstellen mit $f(x) = 0$

$x^4 - 9x^2 + 8 = 0$ | Substitution: $x^2 = z$

$z^2 - 9z + 8 = 0$

$z_{1,2} = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 8}$ | p/q-Formel

$z_1 = 4{,}5 + 3{,}5 = 8$

$z_2 = 4{,}5 - 3{,}5 = 1$

$x^2 = z_1 \;\; => \;\; x^2 = 8$ | Resubstitution 1

$x_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2 \cdot \sqrt{2}$

$x^2 = z_2 \;\; => \;\; x^2 = 1$ | Resubstitution 2

$x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$\mathbb{L} = \{-2\sqrt{2}; -1; 1; 2\sqrt{2}\}$

Nullstellen durch **Polynomdivision**.

Die **Polynomdivision** dient der Zerlegung einer ganzrationalen Funktionsgleichung in einzelne Faktoren, über die wir dann mittels der bislang aufgeführten Methoden die Nullstellen ermitteln können wie z.B. für $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Eine bekannte Nullstelle ist $x_1 = 2$. Ermittle die weiteren Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ | Nullstellen mit $f(x) = 0$

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

Die folgenden Lösungsschritte sind nur eine Übersicht. Genaue Beschreibung der Regel zur Polynomdivision findest du im Kapitel **Gleichungen**.

$x^3 \;\; - 3x^2 \;\; - 10x \; + 24 = 0$ | Polynomdivision

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2) & & = & x^2 - x - 12 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} & (x-2) \cdot x^2 & & \\
\quad -x^2 - 10x & & & \\
\quad \underline{-(x^2 + 2x)} & (x-2) \cdot (-x) & & \\
\qquad -12x + 24 & & & \\
\qquad \underline{-(12x + 24)} & (x-2) \cdot (-12) & & \\
\qquad\qquad 0 & & &
\end{array}
$$

Gegeben war eine Nullstelle mit $x_1 = 2$. Aus diesem Grund erfolgt die Division mit $(x-2)$.
Der erste Summand des zu teilenden Polynoms (x^3) wird durch den ersten Summanden des Teilers (x) dividiert. Das Ergebnis (x^2) wird mit dem Teiler $(x-2)$ multipliziert und von dem zu teilenden Polynom subtrahiert.
Mit dem Ergebnis der Subtraktion $-x^2-10x+24$ verfahren wir in gleicher Weise und führen dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.
Nach Durchführung der Division erhalten wir als Ergebnis eine quadratische Gleichung, deren weiteren Lösungen wir jetzt mit bekannten Methoden finden.

$x^2 - x - 12 = 0$

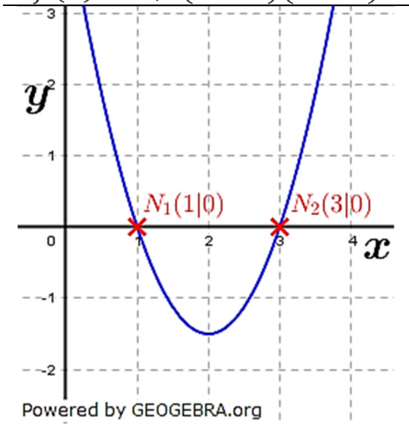
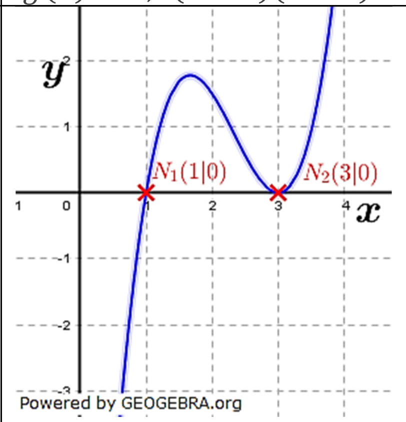
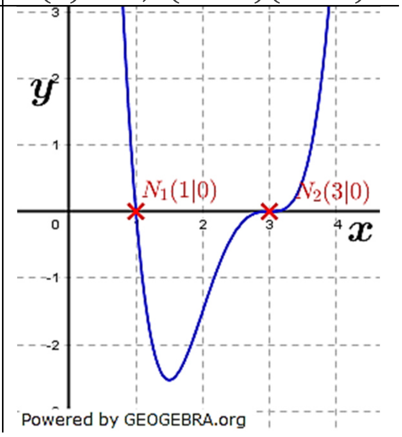
$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{0{,}25+12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{12{,}25} = \frac{1}{2} \pm 3{,}5$

$x_2 = 4; \quad x_{23} = -3$

$\mathbb{L} = \{-3; 2; 4\}$

Vielfachheit von Nullstellen

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Mehrfachheit von Nullstellen, die wir zwar bereits früher kennengelernt haben, ohne etwas über diese Vielfachheit zu wissen.
Liegt die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion in **Produktdarstellung** (→ Linearfaktorzerlegung) vor, können wir anhand des Funktionsterms Aussagen über das Verhalten in der Umgebung der Nullstellen machen. Von besonderem Interesse sind dabei mehrfach auftretende Faktoren. Hierzu betrachten wir uns drei Beispiele.

$f(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 3$	$g(x) = 1{,}5x^3 - 10{,}5x^2 + 22{,}5x - 13{,}5$	$h(x) = 1{,}5x^4 - 15x^3 + 54x^2 - 81x + 40{,}5$
$f(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)$	$g(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)^2$	$h(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)^3$
		

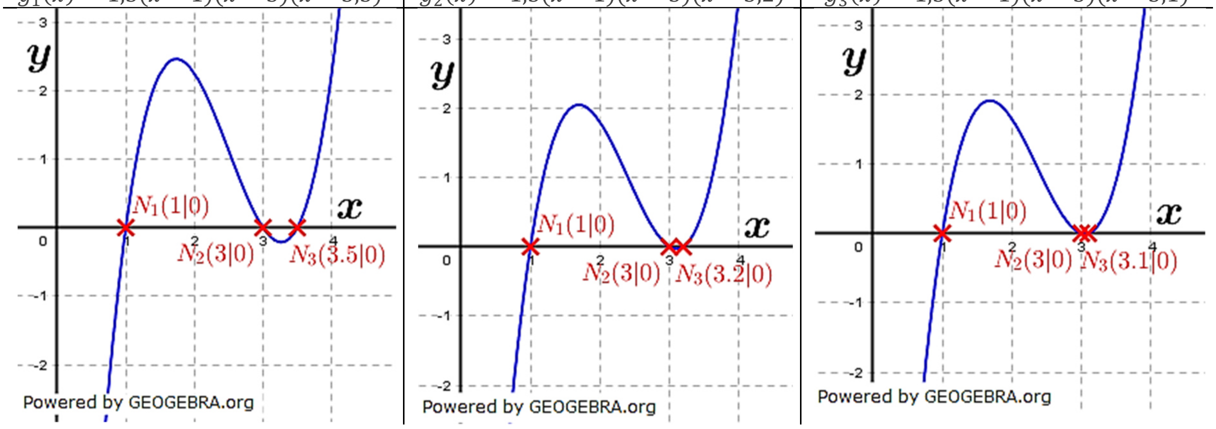
Vergleichen wir die oben dargestellten Graphen der jeweiligen Funktionen f, g und h, so stellen wir Folgendes fest:
An der Stelle $x = 1$ schneiden alle drei Graphen die x-Achse wie eine Gerade.
An der Stelle $x = 3$ schneidet der Graph von f die x-Achse wie eine Gerade, der Graph von g berührt die x-Achse (ähnlich dem Scheitelpunkt einer Parabel) und der Graph von h schneidet die x-Achse ähnlich der Nullstelle einer Funktion i mit $i(x) = x^3$ an der Stelle $x = 0$.

Das Verhalten der drei Graphen an der Stelle $x = 3$ wird also vom jeweiligen Funktionsglied $(x-3)$ der Funktionsgleichungen bestimmt.

Im Falle des Graphen von f hat das Funktionsglied $(x-3)^1$ die Potenz 1.
Im Falle des Graphen von g hat das Funktionsglied $(x-3)^2$ die Potenz 2.
Im Falle des Graphen von h hat das Funktionsglied $(x-3)^3$ die Potenz 3.

Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung der Nullstelle $x = 3$ wird also von der Vielfachheit des Faktors $(x-3)$ der Produktdarstellung bestimmt. Wir veranschaulichen uns dieses Verhalten für die Funktion g auf nachfolgend dargestellte Weise:

$g_1(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)(x-3{,}5)$ | $g_2(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)(x-3{,}2)$ | $g_3(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)(x-3{,}1)$



Die Funktionen g_1, g_2 und g_3 haben mit $g_a(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)^2$ die Nulstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ gemeinsam. In den Darstellungen bewegt sich die 3. Nullstelle x_3 beginnend bei $x_3 = 3{,}5$ über $x_3 = 3{,}2$ und $x_3 = 3{,}1$ auf die Nullstelle $x_2 = 3$ zu. Wird letztendlich x_3 zu x_2, so fallen die beiden Nullstellen zusammen. Dadurch berührt der Graph die x-Achse an der Stelle $x_2 = 3$.

In diesem Falle sprechen wir bei $x_2 = 3$ von einer **zweifachen** (oder auch **doppelten**) **Nullstelle**. Die Nullstelle $x_1 = 1$ hingegen wird **einfache Nullstelle** genannt. Dies führt uns zu folgendem

Merksatz Mehrfachheit von Nullstellen

Liegt die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion f in der Produktdarstellung $f(x) = (x-x_0)^k \cdot g(x)$ mit $g(x) \neq 0$ vor, so heiß x_0 eine **Nullstelle der Vielfachheit k**.

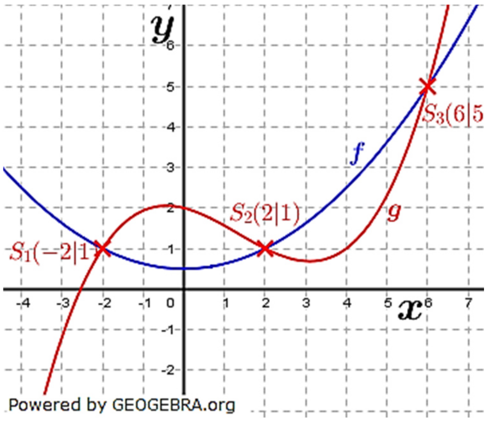
Gegenseitige Lage zweier Graphen

Oftmals ist es von Interesse, wie die Graphen zweier oder mehrerer Funktionen zueinander liegen. Dabei wollen wir wissen, ob sie sich einmal, zwei Mal, mehrfach oder überhaupt nicht schneiden. Von Interesse ist ebenfalls, ob die Schnittpunkte – falls vorhanden – Berührpunkte oder echte Schnittpunkte sind.
Dieses Verhalten können wir feststellen, wenn wir die Funktionsgleichungen der Funktionen ***gleichsetzen*** und nach x auflösen. Hierzu betrachten wir uns Beispiele.

Beispiele

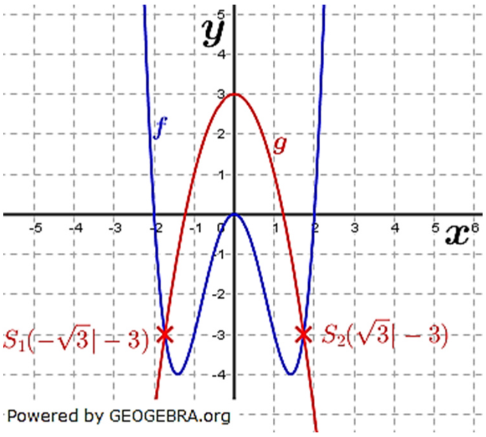
Beispiel 5: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 2$ und $g(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 5: Wir bilden $f \cap g$:
$\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0$
Die Lösung dieser Gleichung führt zu 3 Lösungen mit:
$x_1 = -2;\ \ x_2 = 2$ und $x_3 = 6$
Berechnung der y-Werte:
$g(-2) = 1;\ \ g(2) = 1;\ \ g(6) = 5$
Die beiden Graphen schneiden sich in den drei Punkten $S_1(-2|1);\ \ S_2(2|1)$ sowie $S_3(6|5)$. Die Schnittpunkte sind einfache Schnittpunkte.



Beispiel 6: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = x^4 - 4x^2$ und $g(x) = -2x^2 + 3$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 6: Wir bilden $f \cap g$:
$x^4 - 4x^2 = -2x^2 + 3$
$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
Die Lösung dieser Gleichung führt zu 2 Lösungen mit:
$x_1 = -\sqrt{3}$ und $x_2 = \sqrt{3}$
Berechnung der y-Werte:
$g(-\sqrt{3}) = -3;\ \ g(\sqrt{3}) = -3$
Die beiden Graphen schneiden sich in den zwei Punkten $S_1(-\sqrt{3}|-3)$ sowie $S_2(\sqrt{3}|-3)$. Die Schnittpunkte sind einfache Schnittpunkte.



Beispiel 7: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 4$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 6$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 7: Wir bilden $f \cap g$:

$-\frac{1}{8}x^3 + 4 = -\frac{1}{2}x + 6$

$-\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu 2 Lösungen mit:

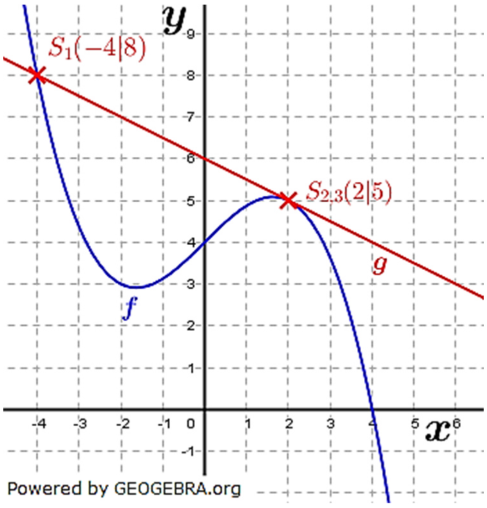
$x_1 = -4$ und $x_{2,3} = 2$

Berechnung der y-Werte:

$g(-4) = 8;\ \ g(2) = 5$

Die beiden Graphen schneiden sich in den zwei Punkten $S_1(-4|8)$ sowie $S_2(2|5)$.

Da sich bei der Gleichungslösung die Schnittstellen x_2 und x_3 zu 2 ergaben, ist S_1 eine einfache und S_2 eine doppelte Schnittstelle.



Beispiel 8: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$ und $g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{28}{3}$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 8: Wir bilden $f \cap g$:

$-\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{28}{3}$

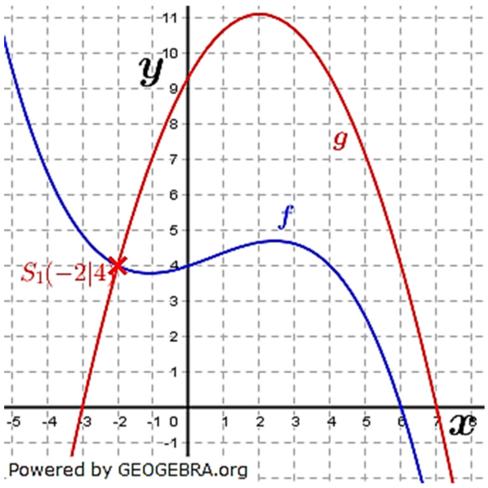
$-\frac{1}{24}x^3 + \frac{19}{36}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{16}{3} = 0$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu einer Lösung mit $x_1 = -2$.

Berechnung des y-Wertes:

$g(-2) = 4$

Die beiden Graphen schneiden sich im Punkten $S_1(-2|7)$. S_1 ist eine einfache Schnittstelle.



Beispiel 9: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$ und $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

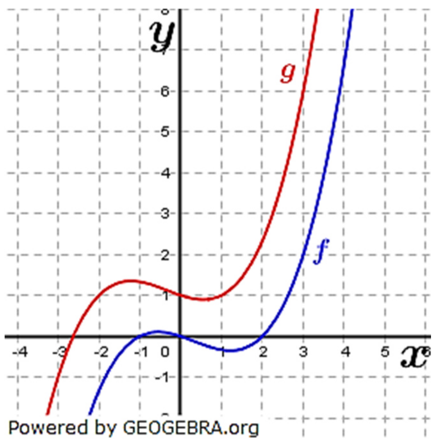
Lösung 9: Wir bilden $f \cap g$:

$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$

$1 \neq 0$

Diese Gleichung hat keine Lösung.

Die beiden Graphen haben keinen gemeinsamen Punkt.



Beispiel 10: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3$ und $g(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 10: Wir bilden $f \cap g$:

$\frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3 = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$

$\frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{3} = 0$

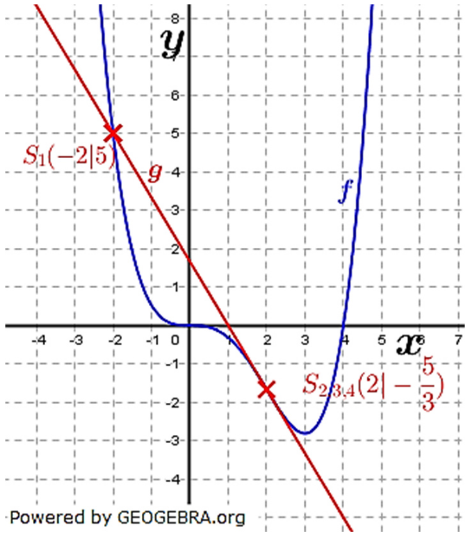
Die Lösung dieser Gleichung führt zu 2 Lösungen mit $x_1 = -2$ und $x_{2,3,4} = 2$.

Berechnung der y-Werte:

$g(-2) = 5; \quad g(2) = -\frac{5}{3}$

Die beiden Graphen schneiden sich in den Punkten $S_1(-2|5)$ und $S_2\left(2\middle|-\frac{5}{3}\right)$.

Da sich bei der Gleichungslösung die Schnittstellen x_2, x_3 und x_4 zu 2 ergaben, ist S_1 eine einfache und S_2 eine dreifache Schnittstelle (die Steigungen von f und g in $x = 2$ sind gleich groß).



Beispiel 11: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 + 4x$ und $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 1$.
Zeige: Die zugehörigen Schaubilder f und g schneiden sich nicht für $x > 0$. Wie liegen f und g für $x > 0$ zueinander?

Lösung 11: Wir bilden $f \cap g$:

$\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 + 4x = \frac{1}{16}x^2 - 1$

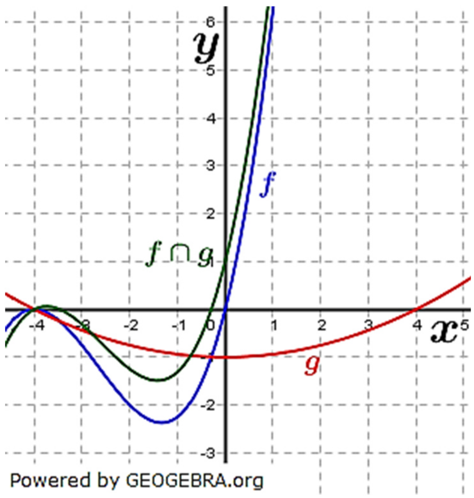
$\frac{1}{4}x^3 + \frac{31}{16}x^2 + 4x + 1 = 0$

Für $x > 0$ ist die linke Seite der Gleichung immer größer null. Die Gleichung hat also für $x > 0$ keine Lösung.

Die zugehörigen Schaubilder f und g schneiden sich nicht für $x > 0$.

Wegen $f(0) = 0 > g(0) = -1$ gilt:

f **verläuft für $x > 0$ oberhalb** von g.



Level 1 – Grundlagen – Blatt 1
Dokument mit 52 Aufgaben

Aufgabe A1

Gib von der ganzrationalen Funktion f den Grad, die Koeffizienten und das Absolutglied an.

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3x + 6$
b) $f(x) = -7x^4 + x^3 - 4x$
c) $f(x) = x^6 + 2x^4 - x^2 + 2$
d) $f(x) = 0{,}4x^4 - 0{,}8x^2 + 1{,}7$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$
g) $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)$
h) $f(x) = 3(x+3)(x-2)^2$
i) $f(x) = x^3\left(2 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) - 4$
j) $f(x) = -2(x-3)^2(x+2)$

Aufgabe A2

Überlege, welche Vorzeichen die Funktionswerte $f(500)$ und $f(-500)$ haben könnten.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$
b) $f(x) = -x^5 + 2x^3 + 15000$
c) $f(x) = x^6 - 2x^3 + x^2 - x + 1$
d) $f(x) = 3x^8 - 0{,}0001x^5$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$
g) $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)$
h) $f(x) = 3(x+3)(x-2)^2$

Aufgabe A3

Gib eine Funktion h mit $h(x) = a_n x^n$ an, die das Verhalten der Graphen von f für die Werte von $\pm\infty$ beschreibt.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - x$
b) $f(x) = 3x^9 - 2x^5 + 15000x$
c) $f(x) = x^5 + 100000x - 1$
d) $f(x) = 3x^8 - 0{,}0001x^6$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$
g) $f(x) = 3x(x^5 + x^2 - 1500)$
h) $f(x) = 3x^4(x+2)(x-3)$

Aufgabe A4

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe.

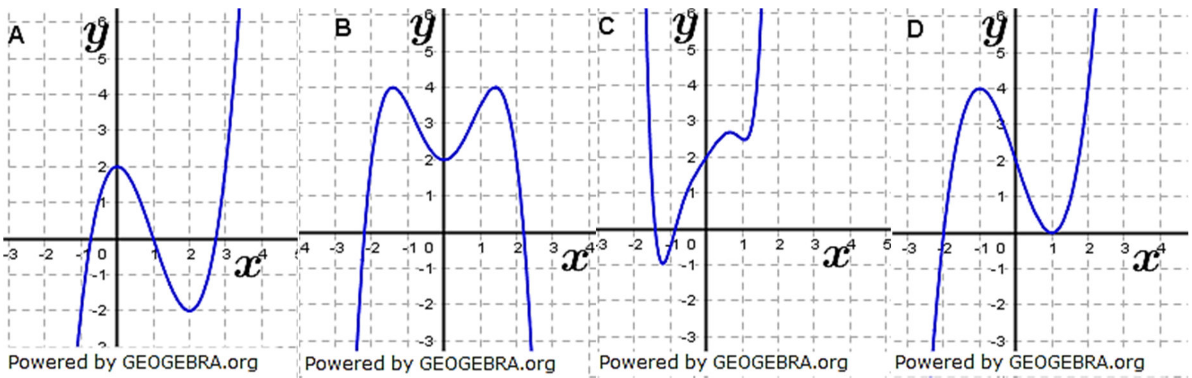
$f_1(x) = x^6 - 2x^4 + 1{,}5x + 2$

$f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f_3(x) = x^3$-3x+2

$f_4(x) = -0{,}5x^4 + 2x^2 + 2$

$f_5(x) = (x+1)(x-2)(x-1) + 4$



Aufgabe A5

Gib eine Funktion an, die das Verhalten des Graphen von f nahe 0 beschreibt.

a) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 02x^3 - x + 2$
c) $f(x) = 3x^3 + 0{,}5x^2 + 10000x$
d) $f(x) = -3x^4 + x^2$
e) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 - 1$
f) $f(x) = x(x-2)(x+3)$
g) $f(x) = 3x(x^3 + x^2 - x)$
h) $f(x) = 3x(x^3 + x^2 - 1) + \sqrt{2}$

Aufgabe A6

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe. Es sind zwei Funktionen zu viel angegeben. Skizziere von diesen Funktionen die Graphen.

$f_1(x) = -2x^3 - 2x + 10$

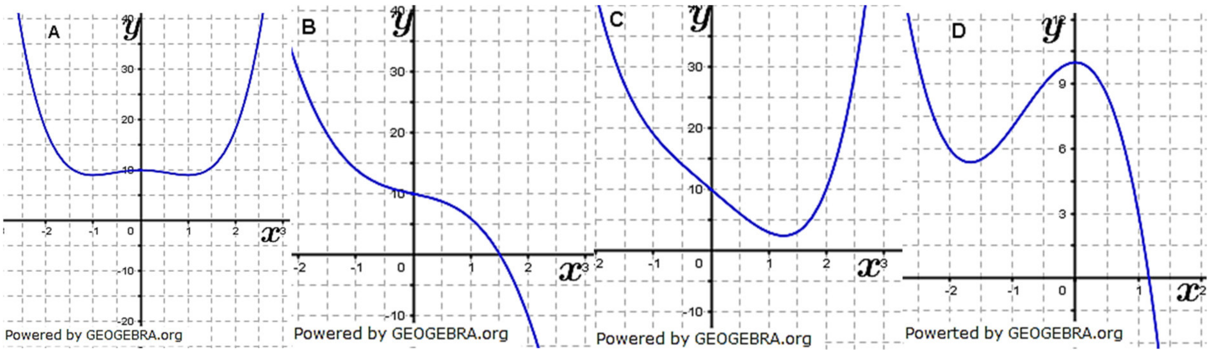
$f_2(x) = x^4 - 2x^2 + 10$

$f_3(x) = x^4 + 2x^2 + 10$

$f_4(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10$

$f_5(x) = x^4 - 8x + 10$

$f_6(x) = -2x^3 + 5x + 10$



Aufgabe A7

Mithilfe der fünf Zahlen $-2;\ -1;\ 0;\ 1$ und 2 als Koeffizienten können verschiedene, ganzrationale Funktionen gebildet werden, wobei in jeder Funktionsgleichung die genannten Koeffizienten nur einmal vorkommen dürfen, aber jeder einzelne vorkommen muss.

Beispiele:

$f(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$ oder

$f(x) = 0 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 1$

Bestimme eine derartige Funktion so, dass

a) der Graph von f die y-Achse im Punkt $P(0|1)$ schneidet,
b) der Graph von f durch den Ursprung geht,
c) $f(-1) = 6$ ist,
d) der Graph von f aus dem dritten in den ersten Quadranten verläuft,
e) der Graph von f aus dem vierten in den zweiten Quadranten verläuft,
f) die Funktionswerte von f für $x \to |\infty|$ gegen Unendlich streben,
g) das Verhalten von f nahe 0 durch die Funktion $g(x) = x - 2$ beschrieben wird,
h) das Verhalten von f für sehr große und sehr kleine Werte von x durch die Funktion $h(x) = 2x^4$ beschrieben wird.

Lösung A1

Lösungslogik:

Das Funktionsglied mit dem höchsten Exponenten von x bestimmt den Grad der Funktion.
Die Vorzahlen der einzelnen Potenzen von x sind die Koeffizienten.
Die einzelne Zahl innerhalb der Funktionsgleichung nennt man auch „absolutes Glied".

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3x + 6$ ist 3. Grades mit $a_3 = 3$, $a_2 = -4$, $a_1 = 3$ und $a_0 = 6$.
b) $f(x) = -7x^4 + x^3 - 4x$ ist 4. Grades mit $a_4 = -7$, $a_3 = 1$ und $a_1 = -4$.
c) $f(x) = x^6 + 2x^4 - x^2 + 2$ ist 6. Grades mit $a_6 = 1$, $a_4 = 2$, $a_2 = -1$ und $a_0 = 2$.
d) $f(x) = 0{,}4x^4 - 0{,}8x^2 + 1{,}7$ ist 4. Grades mit $a_4 = 0{,}4$, $a_2 = -0{,}8$ und $a_0 = 1{,}7$.
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$ ist 7. Grades mit $a_7 = -0{,}1$, $a_5 = 2{,}5$, $a_3 = -0{,}1$, und $a_0 = 1$.
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$ ist 5. Grades mit $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{9}$ und $a_0 = -6{,}6$.
g) $f(x) = x(x^2 - 2x + 2) = x^3 - 2x^2 + 2x$ ist 3. Grades mit $a_3 = 1$, $a_2 = -2$ und $a_1 = 2$.
h) $f(x) = 3(x+3)(x-2)^2 = (3x+9)(x^2 - 4x + 2) = 3x^3 - 3x^2 - 30x + 18$ ist 3. Grades mit $a_3 = 3$, $a_2 = -3$, $a_1 = -30$ und $a_0 = 18$.
i) $f(x) = x^3\left(2 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) - 4 = \frac{1}{2}x^5 - 2x^4 + 2x^3$ ist 5. Grades mit $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -2$ und $a_3 = 2$.
j) $f(x) = -2(x-3)^2(x+2) = (-2x-4)(x^2 - 6x + 9) = -2x^3 + 8x^2 + 6x - 36$ ist 3. Grades mit $a_3 = -2$, $a_2 = 8$, $a_1 = 6$ und $a_0 = -36$.

Lösung A2

Lösungslogik:

Für den Funktionswert der Funktionen bei sehr großen bzw. sehr kleinen Werten von x muss lediglich das Funktionsglied mit der höchsten Potenz betrachtet werden.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^3.
$f(500) > 0$; $f(-500) < 0$
b) $f(x) = -x^5 + 2x^3 + 15000$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-x^5$.
$f(500) < 0$; $f(-500) > 0$
c) $f(x) = x^5 + 100000x - 1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^5.
$f(500) > 0$; $f(-500) < 0$
d) $f(x) = -x^5 + 2x^3 + 15000$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-x^5$.
$f(500) < 0$; $f(-500) > 0$
e) $f(x) = -0{,}1x^7 + 2{,}5x^5 - 0{,}1x^3 + 1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-x^7$.
$f(500) < 0$; $f(-500) > 0$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x - 6{,}6$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^5.
$f(500) > 0$; $f(-500) < 0$
g) $f(x) = 3x(x^5 + x^2 - 1500)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^6.
$f(500) > 0$; $f(-500) < 0$
h) $f(x) = 3x^4(x+2)(x-3)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^6.
$f(500) > 0$; $f(-500) < 0$

Lösung A3

Lösungslogik:

Für das Verhalten von Graphen für die x-Werte ∞ bzw. $-\infty$ muss lediglich das Funktionsglied mit der höchsten Potenz betrachtet werden.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x)=-3x^3+4x^2-x$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-3x^3$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=-3x^3$

b) $f(x)=3x^9-2x^5+15000x$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^9$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=3x^9$

c) $f(x)=x^5+100000x-1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist x^5.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=x^5$

d) $f(x)=3x^8-0{,}0001x^6$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^8$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=3x^8$

e) $f(x)=-0{,}1x^7+2{,}5x^5-0{,}1x^3+1$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $-0{,}1x^7$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=-0{,}1x^7$

f) $f(x)=\frac{1}{2}x^5-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{9}x-6{,}6$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $\frac{1}{2}x^5$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=\frac{1}{2}x^5$

g) $f(x)=3x(x^5+x^2-1500)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^6$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=3x^6$

h) $f(x)=3x^4(x+2)(x-3)$ Funktionsglied mit höchster Potenz ist $3x^6$.
$f(x)$ verhält sich wie $h(x)=3x^6$

Lösung A4

Klausuraufschrieb:

Abbildung A gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_2(x)=x^3-3x^2+2}$.
Der Graph verläuft für $x\to-\infty$ nach $-\infty$ und für $x\to\infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-3x^2+2$.

Abbildung B gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_4(x)=-0{,}5x^4+2x^2+2}$.
Der Graph verläuft für $x\to-\infty$ nach $-\infty$ und für $x\to\infty$ nach $-\infty$. Der Graph verläuft nahe 0 wie $2x^2+2$.

Abbildung C gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_1(x)=x^6-2x^4+1{,}5x+2}$.
Der Graph verläuft für $x\to-\infty$ nach ∞ und für $x\to\infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $1{,}5x+2$.

Abbildung D gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_3(x)=x^3-3x+2}$.
Der Graph verläuft für $x\to-\infty$ nach $-\infty$ und für $x\to\infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-3x+2$.

Lösung A5

Lösungslogik:

Für das Verhalten von Graphen für die x-Werte nahe 0 muss lediglich das Funktionsglied mit der niedrigsten Potenz sowie das absolute Glied (falls vorhanden) betrachtet werden.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $2x - 1$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 02x^3 - x + 2$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-x + 2$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -x + 2$

c) $3x^3 + 0{,}5x^2 + 10000x$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $10000x$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = 10000x$

d) $f(x) = -3x^4 + x^2$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist x^2.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = x^2$

e) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 - 1$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $x^2 - 1$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = x^2 - 1$

f) $f(x) = x(x-2)(x+3) = x^3 + x^2 - 6x$
Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-6x$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -6x$

g) $3x(x^3 + x^2 - x)$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-3x^2$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -3x^2$

h) $f(x) = 3x(x^3 + x^2 - 1) + \sqrt{2}$ Funktionsglied mit kleinster Potenz und Absolutglied ist $-3x + \sqrt{2}$.
$f(x)$ verhält sich nahe 0 wie $h(x) = -3x + \sqrt{2}$

Lösung A6

Klausuraufschrieb:

Abbildung A gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_2(x) = x^4 - 2x^2 + 100}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-2x^2$.

Abbildung B gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_1(x) = -2x^3 - 2x + 10}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach $-\infty$. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-2x + 10$.

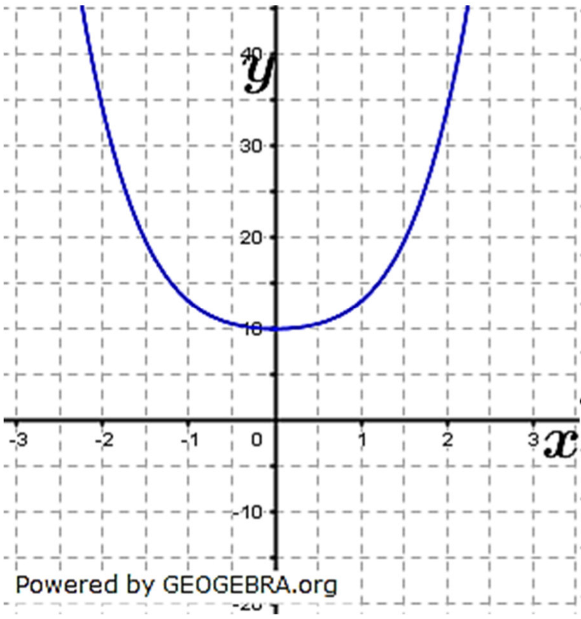
Abbildung C gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_5(x) = x^4 - 8x + 10}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach ∞. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-8x + 10$.

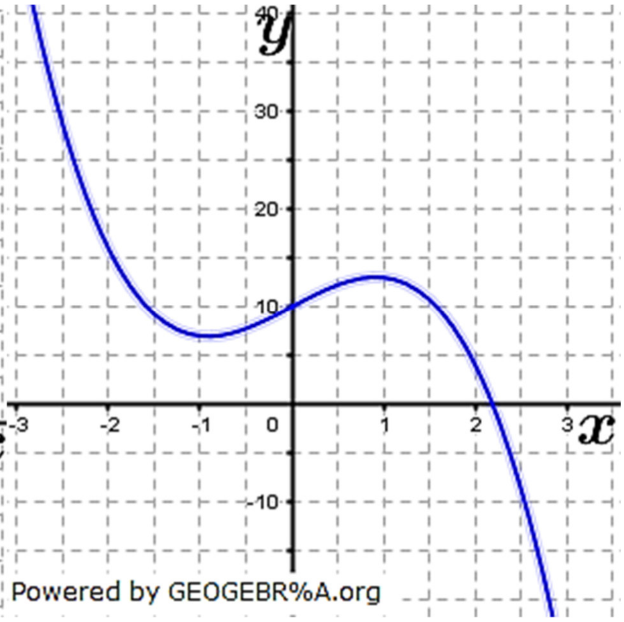
Abbildung D gehört zur Funktionsgleichung $\boxed{f_4(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10}$.
Der Graph verläuft für $x \to -\infty$ nach ∞ und für $x \to \infty$ nach $-\infty$. Der Graph verläuft nahe 0 wie $-5x^2 + 10$.

Verbleibende Funktionsgleichungen ohne Abbildung:

$f_3(x) = x^4 + 2x^2 + 10$

$f_6(x) = -2x^3 + 5x + 10$





Lösung A7

Lösungslogik:

Aufgrund der Aufgabenstellung sind stets Funktionsgleichungen von ganzrationalen Funktionen 4. Grades aufzustellen. Gegebenenfalls ist a_4 auf 0 zu setzen.

Klausuraufschrieb:

a) der Graph von f die y-Achse im Punkt $P(0|1)$ schneidet,
$f(x) = -2 \cdot x^4 - 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$

b) der Graph von f durch den Ursprung geht,
$f(x) = -2 \cdot x^4 - 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 0$

c) $f(-1) = 6$ ist,
$f(x) = 2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 0$

d) der Graph von f aus dem dritten in den ersten Quadranten verläuft,
$f(x) = 0 \cdot x^4 - 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

e) der Graph von f aus dem vierten in den zweiten Quadranten verläuft,
$f(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$

f) die Funktionswerte von f für $x \to |\infty|$ gegen Unendlich streben,
$f(x) = 2 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 - 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 2$

g) das Verhalten von f nahe 0 durch die Funktion $g(x) = x - 2$ beschrieben wird,
$f(x) = 2 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2$

h) das Verhalten von f für sehr große und sehr kleine Werte von x durch die Funktion $h(x) = 2x^4$ beschrieben wird.
$f(x) = -2 \cdot x^8 - 1 \cdot x^7 + 0 \cdot x^6 + 2 \cdot x^5 + 2x^4$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 39 Aufgaben

Aufgabe A1

Welche der nachfolgenden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung? Bestimme durch Rechnung.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3 - 2x$ c) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$
d) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$ e) $f(x) = x(x^4 - 3)$ f) $f(x) = 1{,}5x$
g) $f(x) = (x-2)(x+2)$ h) $f(x) = 5x^3 + 4$ i) $f(x) = x^2(x-3)(x+3)$

Aufgabe A2

Stelle den Grad der nachfolgend aufgeführten ganzrationalen Funktionen fest, ist er gerade oder ungerade und welche Aussage ergibt sich daraus über das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen.

a) $f(x) = x \cdot (x^2 - 5)$ b) $f(x) = (x-2)^2 + 1$
c) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ d) $f(x) = (x-1)(x-2)$
e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3(6 - x^2)$ f) $f(x) = (2-x)^2(2+x)^2$
g) $f(x) = (x-1)^3 + 3x^2 + 1$ h) $f(x) = (1 - 3x^2)^2$
i) $f(x) = (x - x^2)^2$ j) $f(x) = 5x^3 - x^2 + 1$

Aufgabe A3

Untersuche, ob die Funktionen gerade oder ungerade sind.

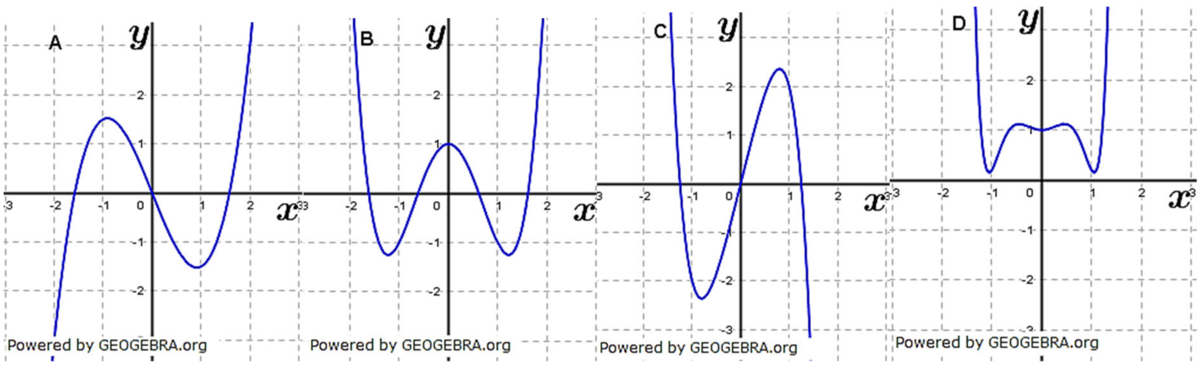
a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ b) $f(x) = 0{,}2x^3 + 3x$
c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ d) $f(x) = 2x^5 - 0{,}4x^3 + 7x$
e) $f(x) = x^4(3 - x^2) + 5$ f) $f(x) = \frac{4}{x^3}$

Aufgabe A4

Ordne jedem Graphen eine Funktion zu. Zu zwei Funktionen gehört kein Graph. Skizziere deren Graphen.

$f_1(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ $f_2(x) = -x^5 - x^3 + 4x$ $f_3(x) = x^8 - 3x^4 - 1{,}2x^2 + 1$

$f_6(x) = x^8 - 3x^4 + 1{,}2x^2 + 1$ $f_5(x) = -x^5 - x^3 - 4x$ $f_4(x) = x^3 - 2{,}5x$

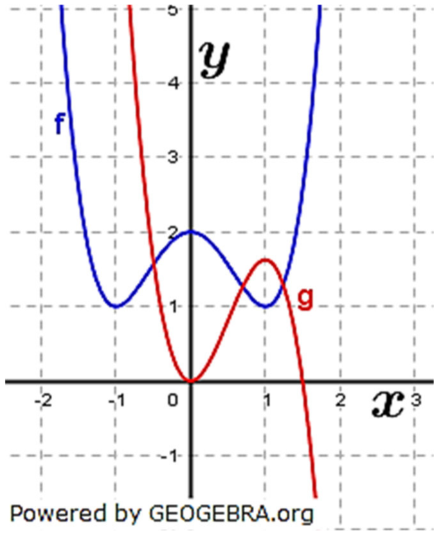


Aufgabe A5

Gib anhand der beiden Graphen in nebenstehender Abbildung an, welche Aussagen zutreffen

a) für die Funktion f, b) für die Funktion g.

1) Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.
2) Im Funktionsterm kommen Potenzen mit geraden und ungeraden Hochzahlen vor.
3) Im Funktionsterm ist die Zahl vor der größten Potenz negativ.
4) Der Grad der Funktion ist ungerade.
5) Der Grad der Funktion ist mindestens 3.
6) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



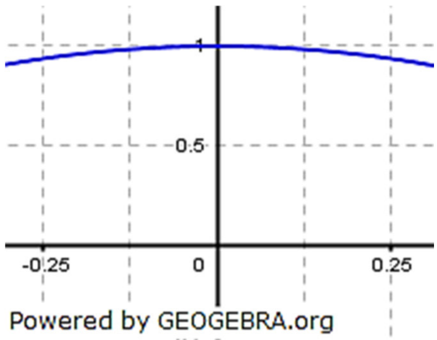
Aufgabe A6

Zu welcher der angegebenen Funktionen könnte der abgebildete Graph gehören?

$f_1(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 1$ $\quad$ $f_2(x) = 0{,}1x^3 + x^2 + 1$

$f_3(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + x + 1$ $\quad$ $f_4(x) = (x+1)(x-1)$

$f_5(x) = 0{,}001x^4 - x^2 + 1$ $\quad$ $f_6(x) = 5x^3 - x^2 + 1$



Aufgabe A7

Gegeben sind die Funktionen f, g, h und k mit $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^4 - 3x^2$ und $k(x) = x^5 + 4x$. Erzeuge aus diesen Funktionen jeweils eine neue Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) die Summe ist eine gerade Funktion,
b) die Differenz aus einer geraden und einer anderen Funktion ist gerade,
c) das Produkt ist eine ungerade Funktion,
d) der Quotient ist eine ungerade Funktion.

Aufgabe A8

a) Begründe allgemein, dass Summe, Differenz, Produkt und Quotient gerader Funktionen gerade sind. Gib jeweils ein Beispiel dafür an.
b) Wie verhält es sich mit der Summe, Differenz, Produkt und Quotient ungerader Funktionen?
c) Untersuche, welche Symmetrieeigenschaft sich für das Produkt zweier Funktionen ergibt, wenn eine der Funktionen gerade, die andere ungerade ist.

Lösung A1

Lösungslogik:
Prüfe zunächst Achsensymmetrie mit $f(-x)$ und dann Punktsymmetrie mit $-f(-x)$ falls erforderlich.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

b) $f(x) = x^3 - 2x$
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x \neq f(x)$
$-f(-x) = -(-x^3 + 2x) = x^3 - 2x = f(x)$ | Punktsymmetrie

c) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$
$f(-x) = 2(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = 2x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ | Achsensymmetrie

d) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$
$f(-x) = -2(-x)^6 + 3(-x)^2 = -2x^6 + 3x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

e) $f(x) = x(x^4 - 3) = x^5 - 3x$
$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x) = -x^5 + 3x \neq f(x)$
$-f(-x) = x^5 - 3x = f(x)$ | Punktsymmetrie

f) $f(x) = 1{,}5x$
$f(-x) = 1{,}5(-x) = -1{,}5x \neq f(x)$
$-f(-x) = 1{,}5x = f(x)$ | Punktsymmetrie

g) $f(x) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$
$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$ | Achsensymmetrie

h) $f(x) = 5x^3 + 4$
$f(-x) = 5(-x)^3 + 4 = -5x^3 + 4 \neq f(x)$
$-f(-x) = 5x^3 - 4 \neq f(x)$ | Keine Symmetrie

i) $f(x) = x^2(x-3)(x+3) = x^4 - 9x^2$
$f(-x) = (-x)^4 - 9(-x)^2 = x^4 - 9x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

Lösung A2

Lösungslogik:
Der Grad einer ganzrationalen Funktion ist gleich dem höchsten Exponenten von x. Achsensymmetrie liegt vor, wenn alle Exponenten von x geradzahlig sind. Punktsymmetrie liegt vor, wenn alle Exponenten von x ungeradzahlig sind und zusätzlich das absolute Glied a_0 fehlt.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = x \cdot (x^2 - 5) = x^3 - 5x$ Dritten Grades und punktsymmetrisch

b) $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ Zweiten Grades und keine Symmetrie

c) $f(x) = x \cdot (x^2 - 5) = x^3 - 5x$ Dritten Grades und punktsymmetrisch

d) $f(x) = f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$
Zweiten Grades und keine Symmetrie

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3(6 - x^2) = 2x^3 - \frac{1}{3}x^5$ Fünften Grades und punktsymmetrisch

f) $f(x) = (2-x)^2(2+x)^2 = \left((2-x)(2+x)\right)^2 = 16 - 8x^2 + x^4$
Vierten Grades und achsensymmetrisch

g) $f(x) = (x-1)^3 + 3x^2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 + 1 = x^3 + 3x$
Dritten Grades und punktsymmetrisch

h)	$f(x) = (1 - 3x^2)^2 = 1 - 6x^2 + 9x^4$	Vierten Grades und achsensymmetrisch
i)	$f(x) = (x - x^2)^2 = x^2 - 2x^3 + x^4$	Vierten Grades und keine Symmetrie
j)	$f(x) = 5x^3 - x^2 + 1$	Dritten Grades und keine Symmetrie

Lösung A3

Lösungslogik:

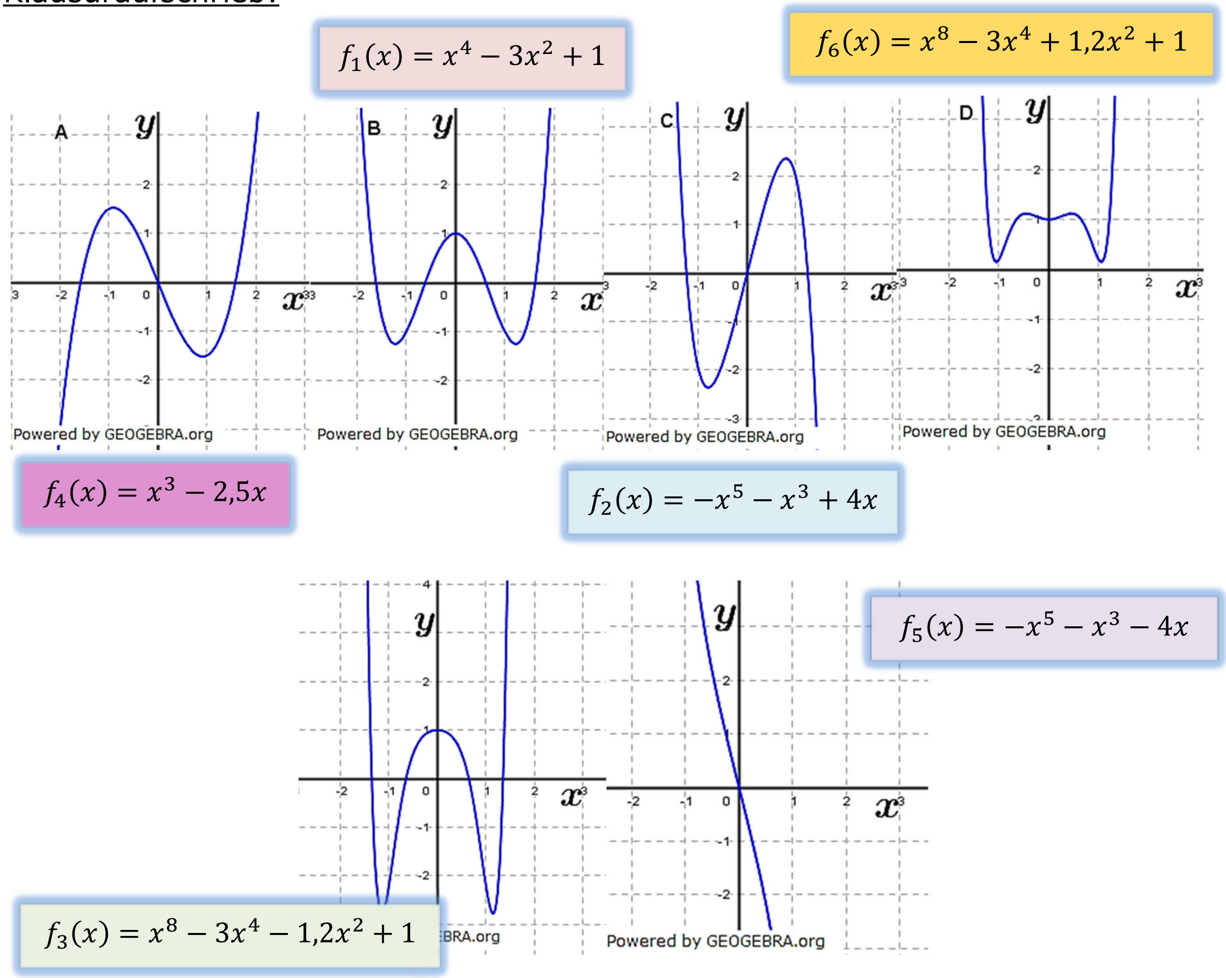
Gerade und ungerade **Funktionen** sind in der Mathematik zwei Klassen von **Funktionen**, die bestimmte Symmetrieeigenschaften aufweisen: eine reelle **Funktion** ist genau dann **gerade**, wenn ihr Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, und. ungerade, wenn ihr Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

Klausuraufschrieb:

a)	$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$	Gerade Funktion da achsensymmetrisch.
b)	$f(x) = 0{,}2x^3 + 3x$	Ungerade Funktion da punktsymmetrisch.
c)	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$	Weder noch, da keine Symmetrie.
d)	$f(x) = 2x^5 - 0{,}4x^3 + 7x$	Ungerade Funktion da punktsymmetrisch.
e)	$f(x) = x^4(3 - x^2) + 5$	Gerade Funktion da achsensymmetrisch.
d)	$f(x) = \frac{4}{x^3}$	Keine ganzrationale Funktion.

Lösung A4

Klausuraufschrieb:



Lösung A5

	f	g
Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.	☑	
Im Funktionsterm kommen Potenzen mit geraden und ungeraden Hochzahlen vor.		☑
Im Funktionsterm ist die Zahl vor der größten Potenz negativ.		☑
Der Grad der Funktion ist ungerade.		
Der Grad der Funktion ist mindestens 3.		☑
Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		

Lösung A6

Der abgebildete Graph gehört zur Funktionsgleichung $f_5(x) = 0{,}001x^4 - x^2 + 1$.

Lösung A7

$f(x) = x^3 - x,\ g(x) = x^2 + 2,\ h(x) = x^4 - 3x^2,\ k(x) = x^5 + 4x$

a) Die Summe ist eine gerade Funktion:
$g(x) + h(x) = x^2 + 2 + x^4 - 3x^2 = x^4 - 2x^2 + 2$

b) Die Differenz aus einer geraden und einer anderen Funktion ist gerade:
$h(x) - g(x) = x^4 - 3x^2 - x^2 - 2 = x^4 - 4x^2 - 2$

c) Das Produkt ist eine ungerade Funktion,
$f(x) \cdot g(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2) = x^5 + x^3 - 2x$

d) Der Quotient ist eine ungerade Funktion.
Kann nicht gebildet werden.

Lösung A8

a) Bei Summe und Differenz bleiben alle Exponenten von gleich groß. Sind diese gerade, so bleiben sie auch gerade.
Bei Produkt erfolgt Addition, bei Quotient erfolgt Subtraktion der Exponenten. Sowohl bei einer Summe als auch einer Differenz aus geraden Zahlen bleiben diese gerade. Beispiele mit $f(x) = x^8$ und $g(x) = x^4$:
Beispiel Summe: $f(x) + g(x) = x^8 + x^4$
Beispiel Differenz: $f(x) - g(x) = x^8 - x^4$
Beispiel Produkt: $f(x) \cdot g(x) = x^8 \cdot x^4 = x^{12}$
Beispiel Quotient: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^8}{x^4} = x^4$

b) Bei Summe und Differenz bleiben alle Exponenten von gleich groß. Sind diese ungerade, so bleiben sie auch ungerade.
Bei Produkt erfolgt Addition, bei Quotient erfolgt Subtraktion der Exponenten. Sowohl die Summe als auch die Differenz zweier ungeraden Zahlen wird gerade. Beispiele mit $f(x) = x^7$ und $g(x) = x^5$:
Beispiel Summe: $f(x) + g(x) = x^7 + x^5$
Beispiel Differenz: $f(x) - g(x) = x^7 - x^5$
Beispiel Produkt: $f(x) \cdot g(x) = x^7 \cdot x^5 = x^{12}$
Beispiel Quotient: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^7}{x^5} = x^2$

c) Produkt aus gerader und ungerader Funktion:
Da die Addition einer geraden mit einer ungeraden Zahl stets eine ungerade Zahl ergibt, sind ganzrationale Funktionen aus Produkten von geraden und ungeraden Funktionsgliedern ungerade und somit punktsymmetrisch.

Aufgabe A1

a) Bestimme die Nullstellen der nachfolgenden Funktionen:
   1) $f(x)=2x^4-12$ 2) $f(x)=-x^3-54$
   3) $f(x)=x^4+1$

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit $f(x)=(x^3-125)(x^2-2x-63)$

c) Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit $f(x)=x^5-4x^3-5x$.

d) Gib drei Beispiele von Funktionen verschiedener Grade mit genau den Nullstellen $x_1=-2$ und $x_2=3$ an. Skizziere die Graphen.

Aufgabe A2

Prüfe, ob x_1 eine Nullstelle ist.

a) $f(x)=3x^3-6x^2+9;\ \ x_1=-1$ b) $f(x)=x^2(x^2-6)+8;\ \ x_1=2$

c) $f(x)=2x^3-4x^2+x+34;\ \ x_1=-2$ d) $f(x)=-0{,}5x^5-1{,}5x^3+x-1{,}7;\ \ x_1=-\frac{2}{3}$

Aufgabe A3

Gib die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen nachfolgender Funktionen an:

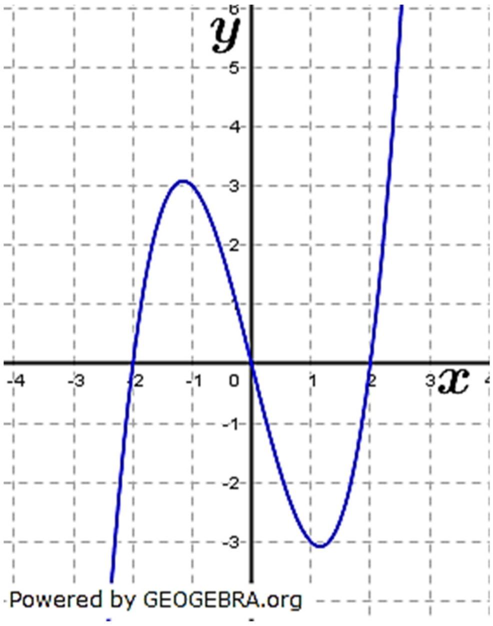
a) $f(x)=3(x+5)(x-3)(x-4)$ b) $f(x)=-x(x+1{,}5)(x-1{,}5)(x+4)$

c) $f(x)=x(x^4+1)$ d) $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)$

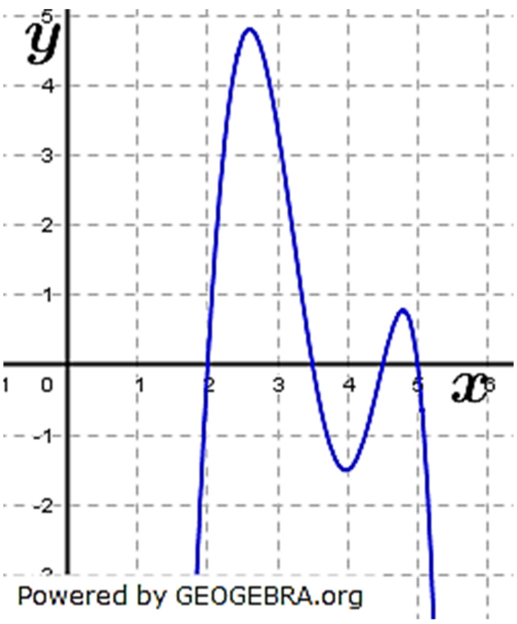
e)

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
y	$1{,}75$	0	0	$-0{,}5$	$-2{,}25$	$-4{,}5$	-5	0	$15{,}75$

f)



g)



Aufgabe A4

Gib die Koordinaten der Achsenschnittpunkte der Graphen an.

a) $f(x)=x^4-81$ b) $f(x)=2x^3-18$

c) $f(x)=-1{,}5x^3+12$ d) $f(x)=-5x^4-500$

e) $f(x)=50-2x^4$ f) $f(x)=x^6+74$

Aufgabe A5

Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = x^3 - 16x$
b) $f(x) = -2x^4 + 18x^2$
c) $f(x) = x^3 + 2x$
d) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
e) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$
f) $f(x) = -4x^3 + 32x^2 - 36x$

Aufgabe A6

Löse die Gleichungen mithilfe einer Substitution.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
b) $2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$
c) $3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$
d) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$
e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$
f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

Aufgabe A7

Berechne die Nullstellen der Funktionen.

a) $f(x) = 2x^4 - 12$
b) $f(x) = 5(x-1)(x+3)(x-4)$
c) $f(x) = x(x+2)(x^2-3)$
d) $f(x) = -7x(x^2+6x+9)$
e) $f(x) = x^4 - 41x^2 + 180$
f) $f(x) = (x^4-1)(x^2+4)$

Aufgabe A8

Gib zwei ganzrationale Funktionen an, die

a) die Nullstellen 0, 2 und 5 haben.
b) die Nullstellen 0, $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$ haben.
c) den Grad 3 und die Nullstelle 2 haben.
d) Den Grad 3, die Nullstellen -2 und 3 haben sowie die y-Achse in $S_y(0|4)$ schneiden.

Lösung A1

Lösungshilfe:

Verwende die nachfolgenden Nullstellenverfahren:

a) Wurzelziehen
b) Satz vom Nullprodukt
c) Potenzen von x ausklammern sowie Substitution
d) Linearfaktorzerlegung

Klausuraufschrieb:

a1) $f(x) = 2x^4 - 12$

$2x^4 - 12 = 0$	|	$-12;\ :2$
$x^4 = 6$	|	$\sqrt[4]{\ }$
$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$		

a2) $f(x) = -x^3 - 54$

$-x^3 - 54 = 0$	|	$+x^3$
$x^3 = -54$	|	$\sqrt[3]{\ }$
$x = -\sqrt[3]{54}$		

a3) $f(x) = x^4 + 1$

$x^4 + 1 = 0$	|	-1
$x^4 = -1$	|	keine Lösung
$\mathbb{L} = \{\}$		

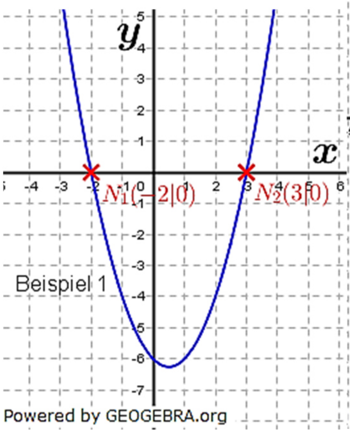
b) $f(x) = (x^3 - 125)(x^2 - 2x - 63)$

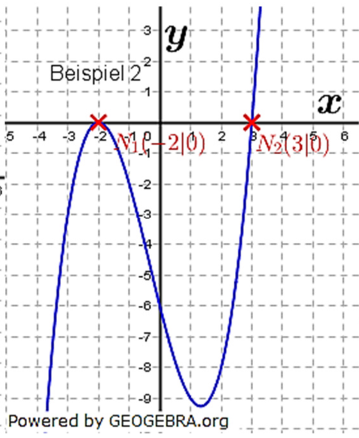
$(x^3 - 125)(x^2 - 2x - 63) = 0$	|	Satz vom Nullprodukt
$x^3 - 125 = 0$		
$x_1 = 5$		
$x^2 - 2x - 63$		
$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 63} = 1 \pm 8$	|	p/q-Formel
$x_2 = 9;\quad x_3 = -7$		

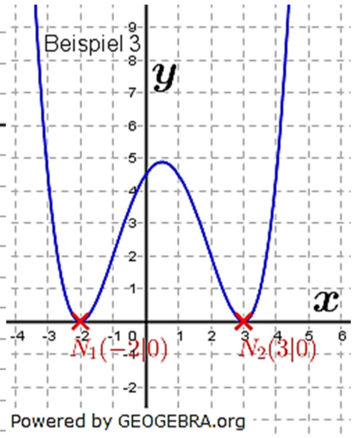
c) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 5x$

$x^5 - 4x^3 - 5x = 0$	|	Potenz von x ausklammern
$x(x^4 - 4x^2 - 5) = 0$	|	Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$		
$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$		
$z^2 - 4z - 5 = 0$	|	Substitution $x^2 = z$
$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3$	|	p/q-Formel
$z_1 = 5;\quad z_2 = -1$		
$x^2 = z_1 = 5$	|	Resubstitution
$x_2 = \sqrt{5};\quad x_3 = -\sqrt{5}$		
$x^2 = z_2 = -1$	|	Resubstitution
$x^2 = -1$	|	keine Lösung
$\mathbb{L} = \{-\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}\}$		

d) Beispiel 1 quadratische Funktion:
$f_1(x) = (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$
Beispiel 2 ganzrational 3. Grades
$f_2(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-3) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$
Beispiel 3 ganzrational 4. Grades
$f_3(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-3)^2 = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$







Lösung A2

Lösungshilfe
Wir prüfen, ob $f(x_1) = 0$ ist.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9;\ \ x_1 = -1$
$f(-1) = 3(-1)^3 - 6(-1)^2 + 9 = -3 - 6 + 9 = 0$
$x_1 = -1$ ist Nullstelle von f.

b) $f(x) = x^2(x^2 - 6) + 8;\ \ x_1 = 2$
$f(2) = 2^2(2^2 - 6) + 8 = 4 \cdot (-2) + 8 = 0$
$x_1 = 2$ ist Nullstelle von f.

c) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 34;\ \ x_1 = -2$
$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) - 2 + 34 = -16 + 8 - 2 + 34 = 24 \neq 0$
$x_1 = -2$ ist keine Nullstelle von f.

d) $f(x) = -0{,}5x^5 - 1{,}5x^3 + x - 1{,}7;\ \ x_1 = -\frac{2}{3}$
$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -0{,}5\left(-\frac{2}{3}\right)^5 - 1{,}5\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} - 1{,}7 = \frac{1}{243} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 1{,}7 \approx -2{,}25 \neq 0$
$x_1 = -\frac{2}{3}$ ist keine Nullstelle von f.

Lösung A3

Lösungshilfe:
Teilaufgaben a) bis d):
Verwende die Linearfaktorzerlegung.
Teilaufgabe e);
Lies die Werte aus der Tabelle ab.
Teilaufgabe f) und g)
Bestimme die Werte über die Grafik.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 3(x+5)(x-3)(x-4)$
$x_1 = -5; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 4$
$S_y(0|120)$ wegen $3 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot (-4) = 120$

b) $f(x) = -x(x+1{,}5)(x-1{,}5)(x+4)$
$x_1 = 0; \quad x_2 = -1{,}5; \quad x_3 = 1{,}5; \quad x_4 = -4$
$S_y(0|9)$ wegen $-(1{,}5 \cdot (-1{,}5) \cdot 4) = 9$

c) $f(x) = x(x^4+1)$
$x_1 = 0;$ der Faktor (x^4+1) kann nicht 0 werden.
$S_y(0|0)$

d) $f(x) = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)$
Diese Funktion hat keine Nullstellen, die einzelnen Faktoren können nicht 0 werden.
$S_y(0|6)$ wegen $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

e) Nullstellen (aus Tabelle)
$x_1 = -2{,}5; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 0{,}5$
$S_y(0|-5)$ aus Tabelle

f) Nullstellen (aus Grafik)
$x_1 = -2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2$
$S_y(0|0)$ aus Grafik

g) Nullstellen (aus Grafik)
$x_1 = 2; \quad x_2 = 3{,}5; \quad x_3 = 4{,}5; \quad x_4 = 5$
Schnittpunkt mit der y-Achse nicht ablesbar.

Lösung A4

Lösungshilfe:

Verwende für alle Teilaufgaben die Nullstellenberechnung durch Wurzelziehen.

Klausuraufschrieb:

Detaillierte Lösung für

a) $f(x) = x^4 - 81$
$x^4 - 81 = 0 \qquad | \quad +81$
$x^4 = 81 \qquad | \quad \sqrt[4]{\ }$
$x_1 = 3; \quad x_2 = -3$
$S_y(0|-81)$

b) $x_1 = \sqrt[3]{9}; \quad S_y(0|-18)$

c) $x_1 = 2; \quad S_y(0|12)$

d) keine Nullstelle wegen negativer Wurzel; $S_y(0|-500)$

e) $x_1 = -\sqrt[4]{25}; \quad x_2 = \sqrt[4]{25}; \quad S_y(0|50)$

f) keine Nullstelle wegen negativer Wurzel; $S_y(0|74)$

Lösung A5

Lösungshilfe:

Verwende für alle Teilaufgaben die Nullstellenberechnung durch Ausklammern von Potenzen von x.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = x^3 - 16x$

$x^3 - 16x = 0$ | x ausklammern

$x(x^2 - 16) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = 4$

$S_y(0|0)$

b) $f(x) = -2x^4 + 18x^2$

$-2x^4 + 18x^2 = 0$ | x^2 ausklammern

$x^2(-2x^2 + 18) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0; \quad x_3 = -3; \quad x_4 = 3$

$S_y(0|0)$

c) $f(x) = x^3 + 2x$

$x^3 + 2x = 0$ | x ausklammern

$x(x^2 + 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$S_y(0|0)$

d) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$

$3x^3 + 3x^2 - 18x = 0$ | $3x$ ausklammern

$3x(x^2 + x - 6) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_{2,3} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm 2{,}5$ | p/q-Formel

$x_2 = 2; \quad x_3 = -3$

$S_y(0|0)$

e) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$

$x^5 - 10x^4 + 25x^3 = 0$ | x^3 ausklammern

$x^3(x^2 - 10x + 25) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$x_{2,3} = 5 \pm \sqrt{25 - 25} = 5$ | p/q-Formel

$x_2 = 5$

$S_y(0|0)$

f) $f(x) = -4x^3 + 32x^2 - 36x$

$-4x^3 + 32x^2 - 36x = 0$ | $-4x$ ausklammern

$-4x(x^2 - 8x + 9) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 - 8x + 9 = 0$

$x_{2,3} = 4 \pm \sqrt{16 - 9} = 4 \pm \sqrt{7}$ | p/q-Formel

$x_2 = 4 + \sqrt{7}; \quad x_3 = 4 - \sqrt{7}$

$S_y(0|0)$

Lösung A6

Lösungshilfe:
Verwende für alle Teilaufgaben die Nullstellenberechnung durch Substitution.

Klausuraufschrieb:

a)	$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$	|	Substitution $x^2 = z$
	$z^2 - 20z + 64 = 0$		
	$z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$	|	p/q-Formel
	$z_1 = 16;\quad z_2 = 4$		
	$x^2 = z_1 = 16$	|	Resubstitution 1
	$x_1 = -4;\quad x_2 = 4$		
	$x^2 = z_2 = 4$	|	Resubstitution 2
	$x_1 = -2;\quad x_2 = 2$		
	$\mathbb{L} = \{-4; -2; 2; 4\}$		
b)	$2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$	|	Substitution $x^2 = z$
	$2z^2 - 8z - 90 = 0$	|	$:2$
	$z^2 - 4z - 45 = 0$		
	$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm 7$	|	p/q-Formel
	$z_1 = 9;\quad z_2 = 4$		
	$x^2 = z_1 = 9$	|	Resubstitution 1
	$x_1 = -3;\quad x_2 = 3$		
	$x^2 = z_2 = -5$	|	Resubstitution 2
	keine Lösung		
	$\mathbb{L} = \{-3; 3\}$		
c)	$3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$	|	Substitution $x^2 = z$
	$3z^2 + 90z - 93 = 0$	|	$:3$
	$z^2 + 30z - 31 = 0$		
	$z_{1,2} = -15 \pm \sqrt{225 + 31} = -15 \pm 16$	|	p/q-Formel
	$z_1 = 1;\quad z_2 = -31$		
	$x^2 = z_1 = 1$	|	Resubstitution 1
	$x_1 = -1;\quad x_2 = 1$		
	$x^2 = z_2 = -31$	|	Resubstitution 2
	keine Lösung		
	$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$		
d)	$x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$	|	Substitution $x^2 = z$
	$z^2 + \frac{4}{9}z - \frac{13}{9} = 0$		
	$z_{1,2} = -\frac{2}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{13}{9}} = -\frac{2}{9} \pm \frac{11}{9}$	|	p/q-Formel
	$z_1 = 1;\quad z_2 = -\frac{13}{9}$		
	$x^2 = z_1 = 1$	|	Resubstitution 1
	$x_1 = -1;\quad x_2 = 1$		
	$x^2 = z_2 = -\frac{13}{9}$	|	Resubstitution 2
	keine Lösung		
	$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$		

e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
$z^2 - 17z + 16 = 0$
$z_{1,2} = 8{,}5 \pm \sqrt{72{,}25 - 16} = 8{,}5 \pm 7{,}5$ | p/q-Formel
$z_1 = 16; \quad z_2 = 1$
$x^2 = z_1 = 16$ | Resubstitution 1
$x_1 = -4; \quad x_2 = 4$
$x^2 = z_2 = 1$ | Resubstitution 2
$x_3 = -1; \quad x_4 = 1$
$\mathbb{L} = \{-4; -1; 1; 4\}$

f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$ | Substitution $x^3 = z$
$z^2 - 10z + 9 = 0$
$z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$ | p/q-Formel
$z_1 = 9; \quad z_2 = 1$
$x^3 = z_1 = 9$ | Resubstitution 1
$x_1 = \sqrt[3]{9}$
$x^3 = z_2 = 1$ | Resubstitution 2
$x_2 = 1$
$\mathbb{L} = \{1; \sqrt[3]{9}\}$

Lösung A7

a) $f(x) = 2x^4 - 12$
$2x^4 - 12 = 0$ | $+12; \ :2$
$x^4 = 6$ | $\sqrt[4]{1}$
$x_1 = \sqrt[4]{6}; \quad x_2 = -\sqrt[4]{6}$

b) $f(x) = 5(x-1)(x+3)(x-4)$
$5(x-1)(x+3)(x-4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 4$

c) $f(x) = x(x+2)(x^2-3)$
$x(x+2)(x^2-3) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = -3$

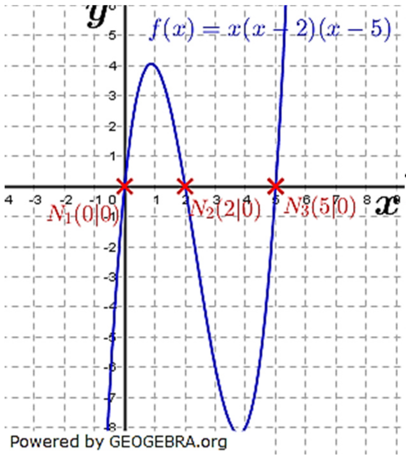
d) $f(x) = -7x(x^2 + 6x + 9)$
$-7x(x^2 + 6x + 9) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$x_1 = 0$ ist einzigste Lösung, den $x^2 + 6x + 9$ kann nicht Null werden.

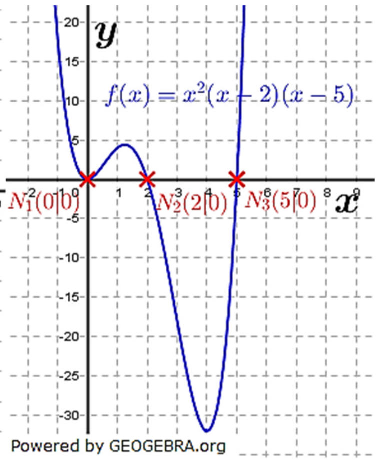
e) $f(x) = x^4 - 41x^2 + 180$
$x^4 - 41x^2 + 180 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
$z^2 - 41z + 180 = 0$
$z_{1,2} = 20{,}5 \pm \sqrt{420{,}25 - 180} = 20{,}5 \pm 15{,}5$ | p/q-Formel
$z_1 = 36; \quad z_2 = 5$
$x^2 = z_1 = 36$ | Resubstitution 1
$x_1 = -6; \quad x_2 = 6$
$x^2 = z_2 = 5$ | Resubstitution 2
$x_3 = -\sqrt{5}; \quad x_4 = \sqrt{5}$
$\mathbb{L} = \{-6; -\sqrt{5}; \sqrt{5}; 6\}$

f) $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 4)$
$(x^4 - 1)(x^2 + 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = -1; \quad x_2 = 1$
x_1 und x_2 ist einzigste Lösungen, den $(x^2 + 4)$ kann nicht Null werden.

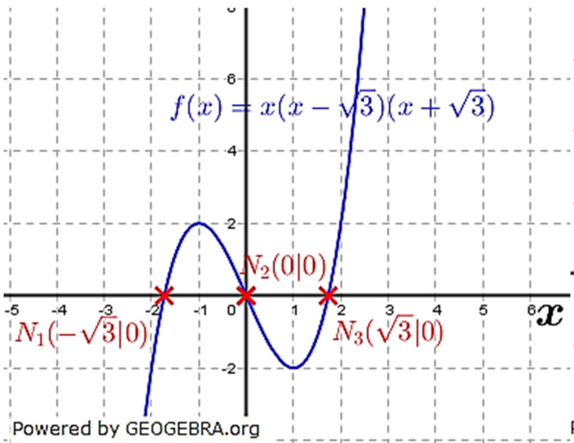
Lösung A8

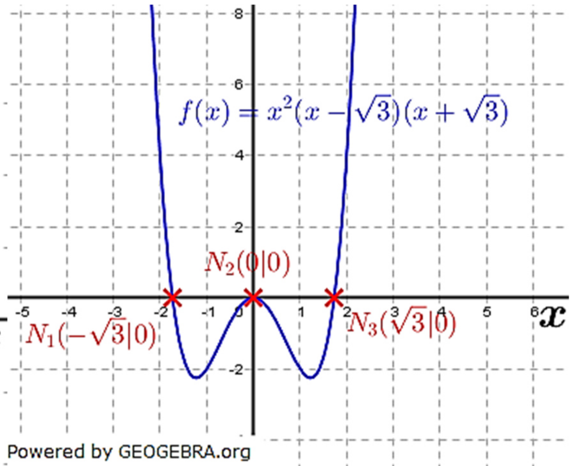
a) $f_1(x) = x(x-2)(x-5)$ $\qquad$ $f_2(x) = x^2(x-2)(x-5)$



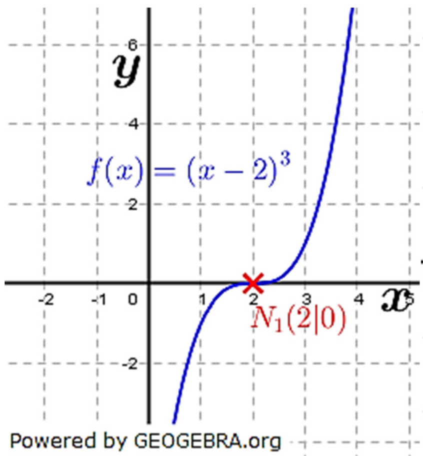


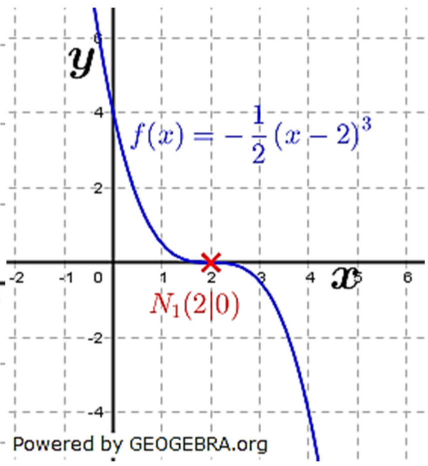
b) $f_1(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ $\qquad$ $f_2(x) = x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$





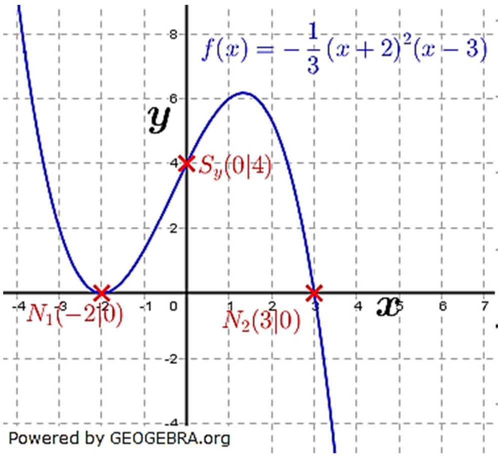
c) $f_1(x) = (x-2)^3$ $\qquad$ $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^3$

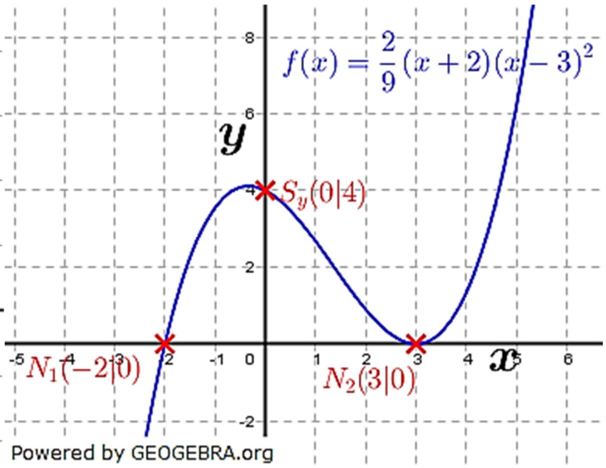




Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

d) $f_1(x) = -\frac{1}{3}(x+2)^2(x-3)$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2$

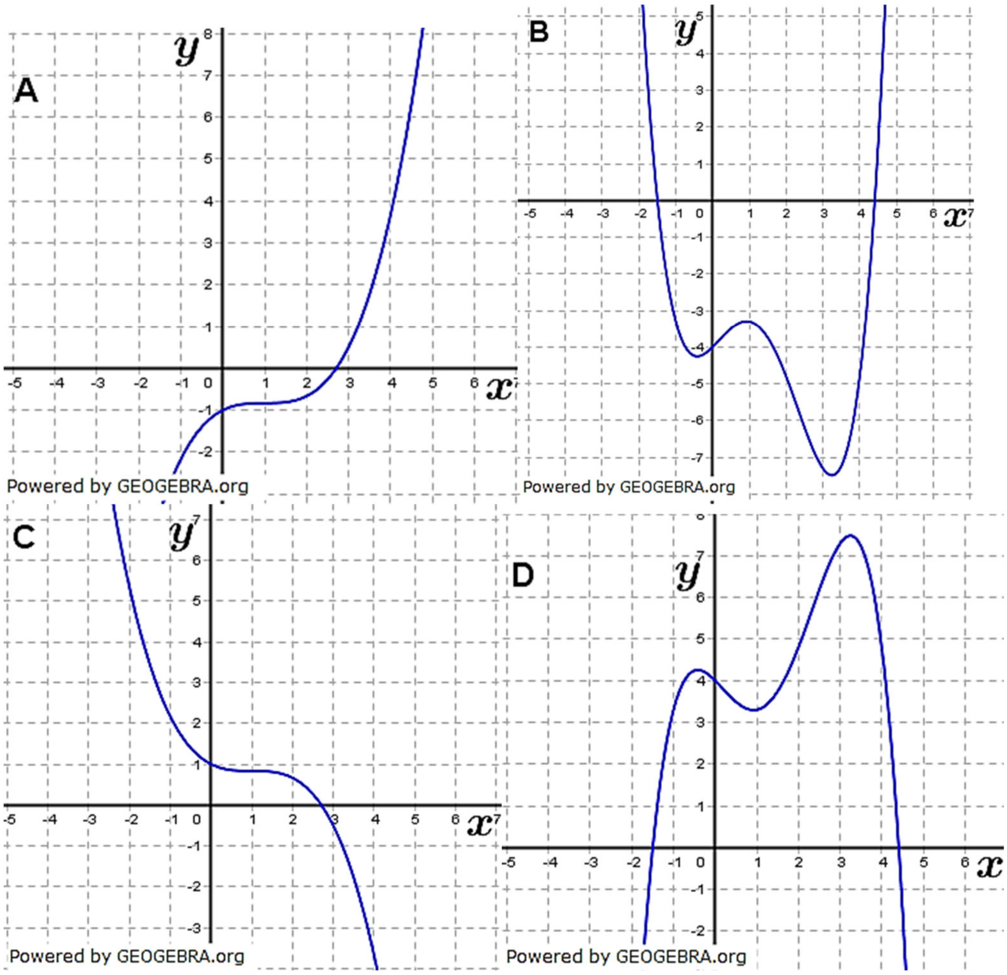




Level 1 – Grundlagen – Blatt 4
Dokument mit 12 Aufgaben

Aufgabe A1

Ordne die Funktionsgleichungen ihren jeweiligen Graphen zu. Belege deine Zuordnung durch exemplarisches Einsetzen ablesbarer Punkte bzw. anhand ihres Grades. Beschreibe verbal die Eigenschaften und bestimme den Grad der zugehörigen Funktionsgleichung. Erkennst du einen Zusammenhang zwischen den Graphen?



a) $f_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ b) $f_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

c) $f_3(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ d) $f_4(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Aufgabe 2

Bestimme die Art und den Grad der jeweiligen Funktion anhand der Funktionsgleichungen.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3$ c) $f_t(x) = tx^4 - x^2 + 2t$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 1$

Aufgabe 3

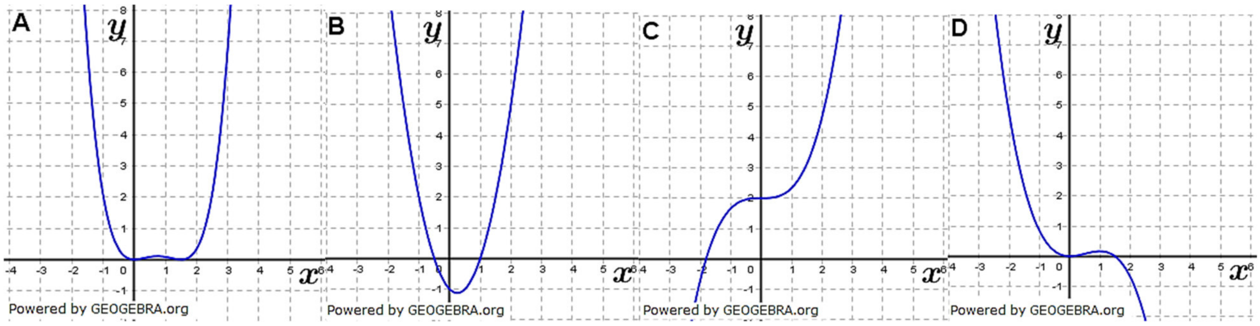
Gegeben sind vier ganzrationale Funktionen f, g, h und k. Die Schaubilder zeigen den Graphen der jeweiligen Funktion. Ordne jedem Schaubild seine zugehörige Funktion zu und gib deren Grad an.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$

c) $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

d) $k(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{4}x^2$



Lösung A1

Grafik A gehört zur Funktionsgleichung b). Der Punkt $P(0|-1)$ erfüllt die Funktionsgleichung.
Grafik B gehört zur Funktionsgleichung a). Der Punkt $P(0|-4)$ erfüllt die Funktionsgleichung.
Grafik C gehört zur Funktionsgleichung d). Der Punkt $P(0|1)$ erfüllt die Funktionsgleichung.
Grafik D gehört zur Funktionsgleichung c). Der Punkt $P(0|4)$ erfüllt die Funktionsgleichung.

Grafik C ist Spiegelung von A an der x-Achse.
Grafik D ist Spiegelung von B an der x-Achse.

Lösung A2

a) Ganzrationale Funktion vom Grad 2 (Parabel)
b) Polynomfunktion vom Grad 5.
c) Polynomfunktion mit Parameter vom Grad 4.
d) Polynomfunktion vom Grad 5.

Lösung A3

a) Die Funktionsgleichung $f(x) = 2x^2 - x + 1$ gehört zur Grafik B und ist vom Grad 2 (Parabel).
b) Die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ gehört zur Grafik C und ist vom Grad 3.
c) Die Funktionsgleichung $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ gehört zur Grafik D und ist vom Grad 3.
b) Die Funktionsgleichung $k(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{4}x^2$ gehört zur Grafik A und ist vom Grad 4.

Das Aufgabenblatt enthält Aufgaben zum Thema „Gegenseitige Lage" ganzrationaler Funktionen.

Aufgabe A1

Gegeben seien die Funktionen f und g. Wie liegen deren Graphen K_f und K_g zueinander? Begründe deine Antwort.

a) $f(x) = \frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$ $\quad$ $g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + x + 2$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^3$ $\quad$ $g(x) = 0{,}75x^2$

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen f und g mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$ und $g(x) = -0{,}5x;\ \ x \in \mathbb{R}$. Berechne die exakten Koordinaten der gemeinsamen Punkte.

Aufgabe A3

Löse $\frac{1}{4}x^3 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$. Interpretiere dein Ergebnis geometrisch.

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 - 6x + 8);\ \ \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

a) Die Gerade durch die Punkte $A(1|6)$ und $B(-0{,}5|3)$ schneidet das Schaubild K von f in drei Punkten.
Zeige, der Abstand von je zwei Punkten ist größer als $4{,}2$.

b) f hat die Nullstellen $-2;\ 1$ und 4.
G ist das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = f(x+1);\ \ \mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Wo schneidet g die x-Achse?

Aufgabe A5

K_f ist das Schaubild der Funktion mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x + 1;\ \ \mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Welche Gerade berührt K_f im Schnittpunkt mit der y-Achse?

Lösung A1

Die gegenseitige Lage zweier Graphen bestimmen wir durch Gleichsetzung der Funktionsgleichung und Feststellung der Schnittstellen.

a) $f \cap g$

$\frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 2$

$\frac{1}{20}x^3 - \frac{11}{40}x^2 - x = 0$ | x ausklammern

$x\left(\frac{1}{20}x^2 - \frac{11}{40}x - 1\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$\frac{1}{20}x^2 - \frac{11}{40}x - 1 = 0$ | $\cdot 20$

$x^2 - \frac{11}{2} - 20 = 0$

$x_{2,3} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} + 20}$ | p/q-Formel

$x_{2,3} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{441}{16}} = \frac{11}{4} \pm \frac{21}{4}$

$x_2 = 8; \quad x_3 = -\frac{5}{2}$

Berechnung der y-Werte:

$f(0) = 2; \quad f(8) = \frac{1}{20} \cdot 8^3 - \frac{3}{8} \cdot 8^2 + 2 = \frac{9}{25}; \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{20} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{9}{8}$

Die beiden Graphen schneiden sich dreimal in den Punkten $S_1(0|2), S_2\left(8\middle|\frac{9}{25}\right)$ sowie $S_3\left(-\frac{5}{2}\middle|-\frac{9}{8}\right)$. Alle drei Schnittstellen sind einfache Schnittstellen.

b) $f \cap g$

$-x^4 + 2x^3 = 0{,}75x^2$

$-x^4 + 2x^3 - 0{,}75x^2 = 0$ | $-x^2$ ausklammern

$-x^2(x^2 - 2x + 0{,}75) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$

$x^2 - 2x + 0{,}75 = 0$

$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}75}$ | p/q-Formel

$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{0{,}25} = 1 \pm 0{,}5$

$x_3 = 1{,}5; \quad x_4 = 0{,}5$

Berechnung der y-Werte:

$g(0) = 0; \quad g(1{,}5) = 1{,}6875; \quad g(0{,}5) = 0{,}1875$

Die beiden Graphen schneiden sich dreimal in den Punkten $S_1(0|0), S_2(1{,}5|1{,}6875)$ sowie $S_3(0{,}5|0{,}1875)$. S_1 ist doppelte, S_2 und S_3 sind einfache Schnittstellen.

Lösung A2

$f \cap g$

$0{,}5x^3 - 3x = -0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 2{,}5x = 0$ | $0{,}5x$ ausklammern

$0{,}5x(x^2 - 5) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 = 5$ | $\sqrt{}$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{5}$

Berechnung der y-Werte:
$g(0) = 0$; $g(\sqrt{5}) = -0{,}5 \cdot \sqrt{5}$; $f(-\sqrt{5}) = 0{,}5 \cdot \sqrt{5}$
Die beiden Graphen schneiden sich dreimal in den Punkten $S_1(0|0)$, $S_2(\sqrt{5}|-0{,}5 \cdot \sqrt{5})$ sowie $S_3(-\sqrt{5}|0{,}5 \cdot \sqrt{5})$. S_1, S_2 und S_3 sind einfache Schnittstellen.

Lösung A3

$\frac{1}{4}x^3 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$
$\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ | x ausklammern
$x\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ | $\cdot 4$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+8}$ | p/q-Formel
$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$
$x_2 = 2$; $x_3 = -4$
Berechnung der y-Werte:
$f(0) = 0$; $f(2) = -10$; $f(-4) = 0$
Interpretation:
Berechnet wurden die Schnittstellen zweier Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 4x$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$. Die beiden Graphen der beiden Funktionen schneiden sich dreimal in den Punkten $S_1(0|0), S_2(2|-10)$ sowie $S_3(-4|0)$. Alle drei Schnittstellen sind einfache Schnittstellen.

Lösung A4

Lösungshilfe:
a) Wir bestimmen zunächst die Geradengleichung $g(x) = mx + c$ durch die Punkte A und B. Dann berechnen wir die Schnittpunkte von f mit g. Zum Schluss bestimmen wir die Abstände der gefunden Schnittpunkte zueinander.
b) Lösung der Aufgabe ohne zu rechnen. Die Funktion g mit $g(x) = f(x+1)$ ist gegenüber der Funktion f um eine Stelle nach links verschoben. Somit verschieben sich auch alle Nullstellen von g um eine Stelle nach links.

Klausuraufschrieb:
a) Aufstellung der Geradengleichung $g(x) = mx + c$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{1-(-0{,}5)} = \frac{3}{1{,}5} = 2$
$g(x) = 2x + c$
$6 = 2 \cdot 1 + c$ | Punktprobe mit A
$c = 4$
$g(x) = 2x + 4$
$f \cap g$
$\frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) = 2x + 4$
$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x = 0$ | $\frac{1}{2}x$ ausklammern
$\frac{1}{2}x(x^2 - 3x - 10) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$x_{2,3} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$ | p/q-Formel
$x_{2,3} = 1{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 1{,}5 \pm 3{,}5$
$x_2 = 5;\quad x_3 = -2$
Berechnung der y-Werte:
$g(0) = 4;\quad g(5) = 14;\quad g(-2) = 0$
Die beiden Graphen schneiden sich dreimal in den Punkten $S_1(0|4)$, $S_2(5|14)$ sowie $S_3(-2|0)$. S_1, S_2 und S_3 sind einfache Schnittstellen.
Abstände:
$\overline{S_1S_2} = \sqrt{(5-0)^2 + (14-4)^2} = \sqrt{125} > 4{,}2$
$\overline{S_1S_3} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} > 4{,}2$
$\overline{S_2S_3} = \sqrt{(-2-5)^2 + (0-14)^2} = \sqrt{245} > 4{,}2$

b) g hat die Nullstellen $-3;\ 0;\ 3$

Lösung A5

Lösungshilfe:
Wir bestimmen zunächst den Schnitpunkt von f mit der y –Achse, also von $f(0)$. Dann bestimmen wir die Schnittpunkte von f mit einer Geraden der Steigung m durch den Schnittpunkt mit der y –Achse. Da dieser Schnittpunkt Berührpunkt sein soll, muss der Ausdruck unter der Wurzel Null sein. Daraus bestimmen wir die Steigung m der Geraden.

Klausuraufschrieb:

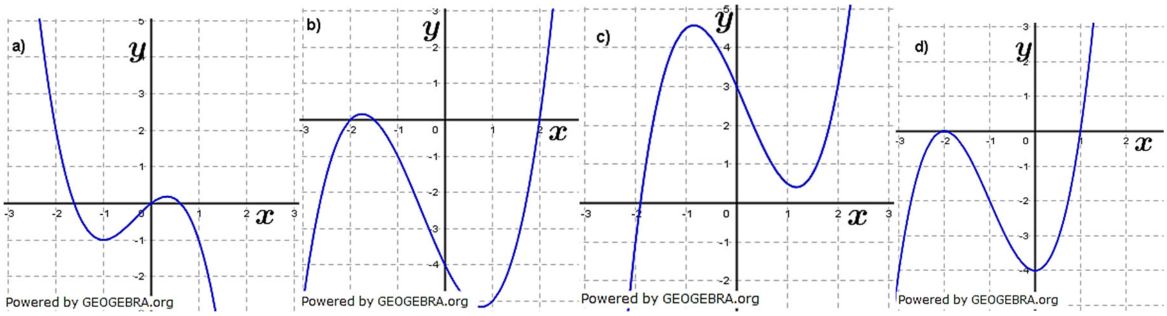
Bestimmung des Schnittpunktes mit der y-Achse:
$f(0) = 1$
Gerade durch $S_y(0|1)$:
$g(x) = mx + 1$
Bestimmung des Schnittpunktes von f mit g:
$f \cap g$
$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x + 1 = mx + 1$
$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x - mx = 0$ | $-\frac{1}{4}x$ ausklammern
$-\frac{1}{4}x(x^2 - 6x + 4mx) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$x^2 - 6x + 4mx = 0$
$x^2 - (6 - 4m)x = 0$
$x_{2,3} = 3 - 2m \pm \sqrt{(3-2m)^2}$ | p/q-Formel
Wegen Berührpunkt gilt:
$3 - 2m = 0$
$m = 1{,}5$
Die Gerade g mit $g(x) = 1{,}5x + 1$ berührt den Graphen der Funktion f im Schnittpunkt mit der y-Achse.

Aufgabe A1

Ordne den Funktionsgleichungen deren Graphen zu. Begründe deine Entscheidung.

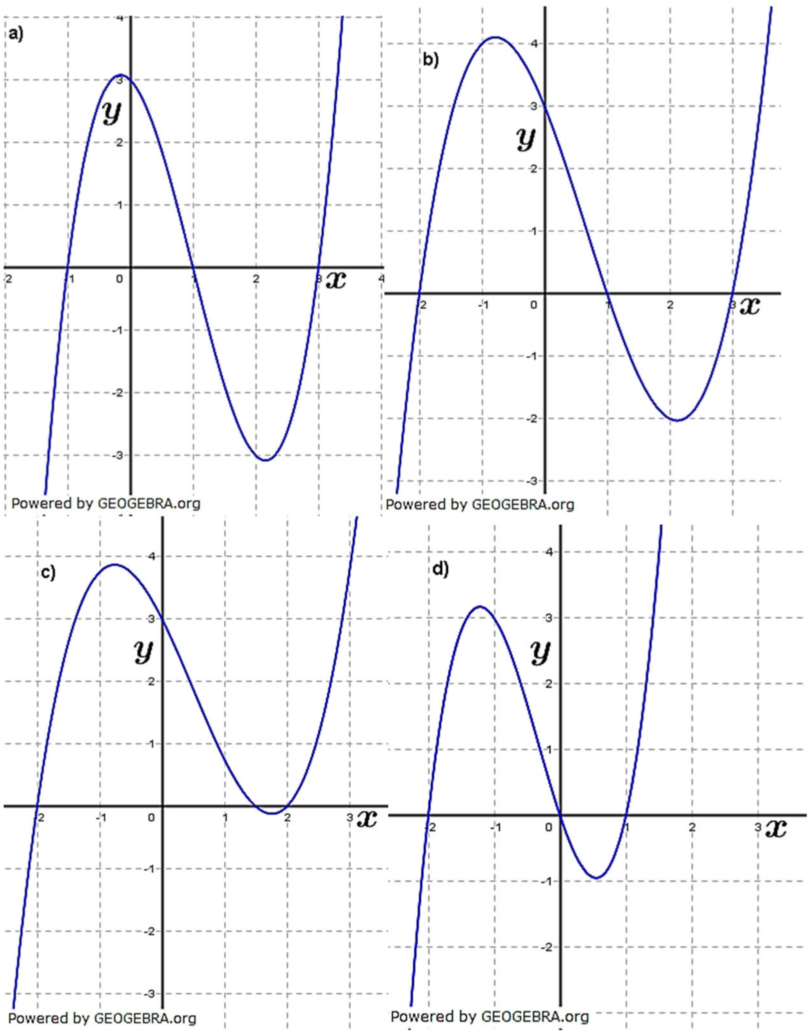
$f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 3$ $\qquad$ $g(x) = -x^3 - x^2 + x$

$h(x) = (x-1)(x+2)^2$ $\qquad$ $k(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4)(2x + 3)$



Aufgabe A2

Ermittle zu den Funktionsgraphen den Funktionsterm.



Aufgabe A3

Wie sind bei der Funktion f mit $f(x) = a(x-b)(x-c)$ die Parameter a, b und c zu wählen, damit f die angegebenen Eigenschaften hat?

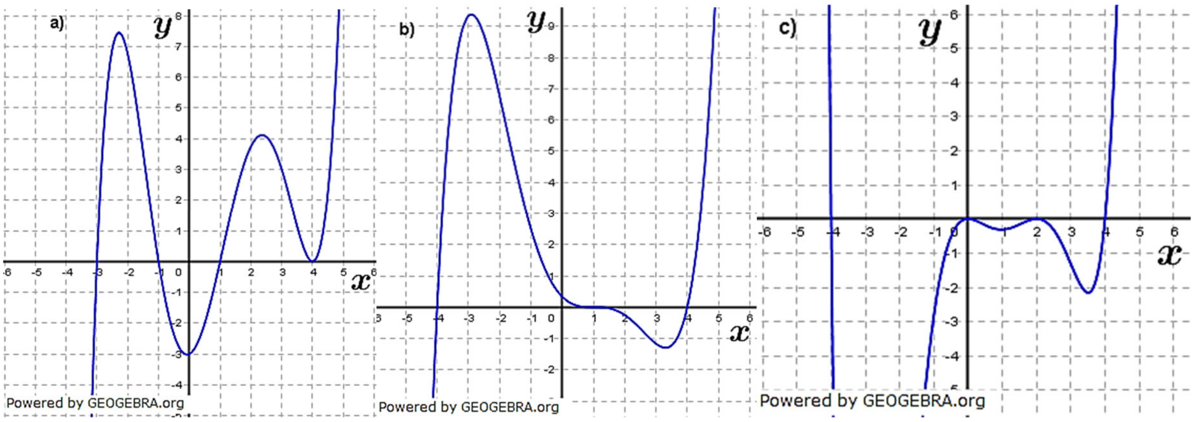
a) Die Nullstellen sind -1 und 3 und der Graph schneidet die y-Achse um Punkt $P(0|1)$.

b) Die Nullstellen sind $\frac{1}{2}$ und $-\sqrt{2}$ und es gilt $f(0) > 0$.

c) Eine Nullstelle ist -2, der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt $P(1|-6)$.

Aufgabe A4

Lies die Nullstellen am Graphen ab und bestimme den jeweiligen Grad der Nullstelle. Was lässt sich über den Grad der ganzrationalen Funktion aussagen und welchen Wert besitzt das absolute Glied a_0?



Aufgabe A5

Nenne das schnellste Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Graphen der gegebenen Funktionsgleichungen und berechne damit die Nullstelle(n).

a) $f(x) = x^3 + 8$

b) $f(x) = x^4 - 81$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

e) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{2}$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$

g) $f(x) = 0{,}75x^3 + 1{,}5x^2 - 6x$

h) $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right)$

i) $f(x) = 1{,}25(x-9)^2 \cdot (0{,}5x^2 + x - 4)$

j) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3-8)+1} - 1$

k) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$

l) $f(x) = 4x^6 + 8x^3 - 32$

Aufgabe A6

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \left(4x^4 + \frac{1}{4}x^2\right) \cdot \left(2x^2 + \frac{1}{2}x\right) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{2}x\right)$.

Vereinfache die Funktionsgleichung soweit wie möglich und gib dann die Nullstellen an.

Aufgabe A7

Beurteile, ob die folgenden Aussagen „immer zutreffen", „nie zutreffen" oder „unter bestimmten Bedingungen" zutreffen. Gib die Bedingung gegebenenfalls an.

a) Eine ganzrationale Funktion, die ungerade ist, hat mindestens eine Nullstelle.

b) Eine gerade Funktion hat eine gerade Anzahl von Nullstellen.

c) Eine ganzrationale Funktion fünften Grades hat genau 5 Nullstellen.

d) Wenn eine gerade Funktion die Nullstelle 2 besitzt, dann besitzt sie auch die Nullstelle -2.

Aufgabe A8

Berechne die Nullstellen der Funktionen durch Faktorisieren und Verwendung des Satzes vom Nullprodukt.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$

b) $f(x) = \frac{9}{5}x^2 - \frac{9}{5}x$

c) $f(x) = \frac{4}{9}x^4 - \frac{1}{9}x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x$

e) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x$

f) $f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^3 - 13{,}5x$

Aufgabe A9

Untersuche, ob die beschriebene Veränderung des Funktionsterms einer Funktion f die Nullstellen von f verändert.

a) Der Funktionsterm von f wird mit 2 multipliziert.

b) Zum Funktionsterm von f wird 2 addiert.

c) Der Funktionsterm von f wird quadriert.

Lösung A1

Lösungshilfe:

Wir vergleichen die Nullstellen und das absolute Glied der Grafiken mit den gegebenen Funktionstermen.

Klausuraufschrieb:

a) ist das Schaubild der Funktion g, der Graph der Funktion hat 3 Nullstellen, wovon eine Nullstelle der Ursprung ist. Keine der anderen Graphen verläuft durch den Ursprung.

b) ist das Schaubild der Funktion k, der Graph der Funktion hat 3 Nullstellen in $x_1 = -2;\ x_2 = -1{,}5$ sowie $x_3 = 2$. Der Funktionsterm liegt vollständig in der Nullstellenform vor.

c) ist das Schaubild der Funktion f, der Graph schneidet die y-Achse $S_y(0|3)$, was auch im Funktionsterm durch das absolute Glied $a_0 = 3$ ersichtlich ist.

d) ist das Schaubild der Funktion h, der Graph hat die einfache Nullstelle $x_1 = 1$ sowie die doppelte Nullstelle $x_{2,3} = 2$.

Lösung A2

Lösungshilfe:

Lies die Nullstellen und das absolute Glied der Grafiken ab und bestimme die Funktionsgleichung. Gegebenenfalls musst du den Graphen noch in y-Richtung strecken.

Klausuraufschrieb:

a) Nullstellen bei $x_1 = -1;\ x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.
$f(x) = (x+1)(x-1)(x+3) = (x^2-1)(x+3)$
Keine Streckung in y-Richtung, da absolutes Glied $a_0 = 3$.

b) Nullstellen bei $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.
$f(x) = a \cdot (x+2)(x-1)(x-3)$
Punktprobe mit $S_y(0|3)$:
$3 = a \cdot (0+2)(0-1)(0-3) = 6a \quad | \quad :6$
$a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+2)(x-1)(x-3)$

c) Nullstellen bei $x_1 = -2;\ x_2 = 1{,}5$ und $x_3 = 2$.
$f(x) = a \cdot (x+2)(x-1{,}5)(x-2)$
Punktprobe mit $S_y(0|3)$:
$3 = a \cdot (0+2)(0-1)(0-2) = 6a \quad | \quad :6$
$a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+2)(x-1{,}5)(x-2)$

d) Nullstellen bei $x_1 = -2;\ x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.
$f(x) = a \cdot x(x+2)(x-1)$
Punktprobe mit $P(-1|3)$:
$3 = a \cdot (-1) \cdot (-1+2)(-1-1) = 2a \quad | \quad :2$
$a = \frac{3}{2}$
$f(x) = \frac{3}{2} \cdot x(x+2)(x-1)$

Lösung A3

$f(x) = a(x-b)(x-c)$

a) $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x+1)(x-3) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

b) $f(x) = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = -x^2 + x\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $f(x) = a \cdot (x-2)(x+2)$
$-6 = a \cdot (1-2)(1+2) = -2a$ | Punktprobe mit $P(1|-6)$
$a = 3$
$f(x) = 3 \cdot (x-2)(x+2)$

Lösung A4

a) Einfache Nullstellen bei $x_1 = -3;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 1$
Doppelte Nullstelle bei $x_4 = 4$
Insgesamt 5 Nullstellen, die Funktion ist vom Gard 5.
Der y-Achsaenabschnit ist $a_0 = -3$.

b) Einfache Nullstellen bei $x_1 = -4;\ \ x_2 = 4$
Dreifache Nullstelle bei $x_3 = 1$
Insgesamt 5 Nullstellen, die Funktion ist vom Gard 5.
Der y-Achsaenabschnit ist $a_0 = 0{,}5$.

c) Einfache Nullstellen bei $x_1 = -4;\ \ x_2 = 4$
Doppelte Nullstelle bei $x_3 = 0;\ \ x_4 = 2$
Insgesamt 6 Nullstellen, die Funktion ist vom Gard 6.
Der y-Achsaenabschnit ist $a_0 = 0$.

Lösung A5

a) $f(x) = x^3 + 8$
$x^3 + 8 = 0$ | dritte Wurzel ziehen
$x^3 = -8 \Longrightarrow N_1 = (-2|0)$

b) $f(x) = x^4 - 81$
$x^4 - 81 = 0$ | vierte Wurzel ziehen
$x^4 = 81 \Longrightarrow N_1(3|0); N_2 = (-3|0)$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 8$
$x^2 + 2x - 8 = 0$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$
$N_1 = (2|0); N_2(-4|0)$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$
$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$ | $\cdot 2$
$x^2 + 2x - 8 = 0$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$
$N_1 = (2|0); N_2(-4|0)$

e) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{2}$
$\sqrt{x} - \frac{5}{2} = 0$ | Quadrieren
$x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
$N_1 = \left(\frac{25}{4}\middle|0\right)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$

$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 = 0$ | Faktorisieren (ausklammern)

$\frac{1}{2}x^2(x^2 - 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0;\;\; x_3 = 2;\;\; x_4 = -2$

$N_1 = (0|0)$ (doppelte Nullstelle) $N_2 = (2|0); N_3 = (-2|0)$

g) $f(x) = 0{,}75x^3 + 1{,}5x^2 - 6x$

$0{,}75x^3 + 1{,}5x^2 - 6x = 0$ | Faktorisieren (ausklammern)

$x(0{,}75x^2 + 1{,}5x - 6) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$0{,}75x^2 + 1{,}5x - 6 = 0$ | $:0{,}75$

$x^2 + 2x - 8 = 0$ | p/q-Formel

$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$N_2 = (2|0);\; N_3 = (-4|0)$

h) $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{4}(x-4)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\frac{1}{4}(x-4)^2 = 0$

$x_1 = 4$

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = 0$

$x_2 = -2;\;\; x_3 = 2$

$N_1 = (4|0)$ (doppelte Nullstelle) $N_2 = (-2|0);\; N_3 = (2|0)$

i) $f(x) = 1{,}25(x-9)^2 \cdot (0{,}5x^2 + x - 4)$

$1{,}25(x-9)^2 \cdot (0{,}5x^2 + x - 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$1{,}25(x-9)^2 = 0$

$x_1 = 9$

$0{,}5x^2 + x - 4 = 0$ | $\cdot 2$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$N_1 = (9|0)$ (doppelte Nullstelle) $N_2 = (-4|0);\; N_3 = (2|0)$

j) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 8) + 1} - 1$

$\sqrt[3]{(x^3 - 8) + 1} - 1 = 0$

$\sqrt[3]{(x^3 - 8) + 1} = 1$ | Wurzel beseitigen durch $\uparrow^3$

$(x^3 - 8) + 1 = 1$

$x^3 = 8$ | $\sqrt[3]{\;}$

$x_1 = 2$

$N_1 = (3|0)$

k) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$

$x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ | Substitution

$x^2 = z$

$z^2 + 2z - 8 = 0$ | p/q-Formel

$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$z_1 = 2;\;\; z_2 = -2$

$x^2 = z_1$ | Resubstitution

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$N_1(\sqrt{2}|0);\;\; N_2(-\sqrt{2}|0)$

l) $f(x) = 4x^6 + 8x^3 - 32$

$4x^6 + 8x^3 - 32 = 0$ | Substitution

$x^3 = z$

$4z^2 + 8z - 32 = 0$ | $:4$

$z^2 + 2z - 8 = 0$ | p/q-Formel

$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$

$z_1 = 2;\ \ z_2 = -4$

$x^3 = z_1$ | Resubstitution 1

$x_1 = \sqrt[3]{2}$

$x^3 = z_2$ | Resubstitution 2

$x_2 = -\sqrt[3]{4}$

$N_1(\sqrt[3]{2}|0);\ \ N_2(-\sqrt[3]{4}|0)$

Lösung A6

$f(x) = \left(4x^4 + \frac{1}{4}x^2\right) \cdot \left(2x^2 + \frac{1}{2}x\right) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{2}x\right)$

$= \left(4x^4 + \frac{1}{4}x^2\right) \cdot \left(4x^4 - \frac{1}{4}x^2\right)$

$= 16x^8 - \frac{1}{16}x^4$

$16x^8 - \frac{1}{16}x^4 = 0$ | Faktorisieren (ausklammern)

$16x^4\left(x^4 - \frac{1}{256}\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2,3,4} = 0$

$x^4 - \frac{1}{256} = 0$

$x^4 = \frac{1}{256}$ | $\sqrt[4]{\ }$

$x_{5,6} = \pm\frac{1}{4}$

$N_1(0|0)$ (vierfache Nullstelle) $N_2\left(\frac{1}{4}\middle|0\right);\ N_3\left(-\frac{1}{4}\middle|0\right)$

Lösung A7

a) *Eine ganzrationale Funktion, die ungerade ist, hat mindestens eine Nullstelle.*

Die Aussage trifft immer zu.
Ganzrationale Funktionen von ungeradem Grad verlaufen entweder aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten oder aber vom II. Quadranten in den IV. Quadranten. Somit ist mindestens eine Nullstelle vorhanden.

b) *Eine gerade Funktion hat eine gerade Anzahl von Nullstellen.*

Die Aussage trifft unter bestimmten Bedingungen zu.
Ganzrationale Funktionen von geradem Grad verlaufen entweder aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten oder aber vom III. Quadranten in den IV. Quadranten. Sie haben nur dann eine gerade Anzahl von Nullstellen, wenn sie mindestens einen **globalen** Tiefpunkt haben, der einen negativen Funktionswert aufweist bzw. mindestens einen **globalen** Hochpunkt haben, der einen positiven Funktionswert aufweist.

c) *Wenn eine gerade Funktion die Nullstelle 2 besitzt, dann besitzt sie auch die Nullstelle -2.*

Die Aussage trifft unter bestimmten Bedingungen zu.
Die faktorisierte Funktionsgleichung muss den Faktor $(x^2 - 4)$ enthalten.

Lösung A8

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x(x+1)$
$\frac{1}{4}x(x+1) = 0$
$x_1 = 0;\ \ x_2 = -1$

b) $f(x) = \frac{9}{5}x^2 - \frac{9}{5}x = \frac{9}{5}x(x-1)$
$\frac{9}{5}x(x-1) = 0$
$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1$

c) $f(x) = \frac{4}{9}x^4 - \frac{1}{9}x^2 = \frac{1}{9}x^2(x^2-1)$
$\frac{1}{9}x^2(x^2-1) = 0$
$x_{1,2} = 0$ (doppelte Nullstelle) $x_3 = 1;\ \ x_4 = -1$

d) $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x = \frac{1}{8}x(\frac{1}{2}x^2 - 1)$
$\frac{1}{8}x\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) = 0$
$x_1 = 0;\ \ x_2 = \sqrt{2};\ \ x_3 = -\sqrt{2}$

e) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x = \frac{1}{8}x(x^2 + 4x + 3)$
$\frac{1}{8}x(x^2 + 4x + 3) = 0$
$x_1 = 0$
$x^2 + 4x + 3 = 0$
$x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$ | p/q-Formel
$x_2 = -1;\ \ x_3 = -3$

f) $f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^3 - 13{,}5x = 0{,}5x(x^4 + 6x^2 - 27)$
$0{,}5x(x^4 + 6x^2 - 27) = 0$
$x_1 = 0$
$x^4 + 6x^2 - 27 = 0$
$x_{2,3}^2 = -3 \pm \sqrt{9+27} = -3 \pm 6$ | p/q-Formel
$x_2^2 = 3;\ \ x_3^2 = -9$
$x_2^2 = 3 \ \ ==>\ \ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$
$x_3^2 = -9 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$
$x_1 = 0;\ \ x_2 = \sqrt{3};\ \ x_3 = -\sqrt{3}$

Lösung A9

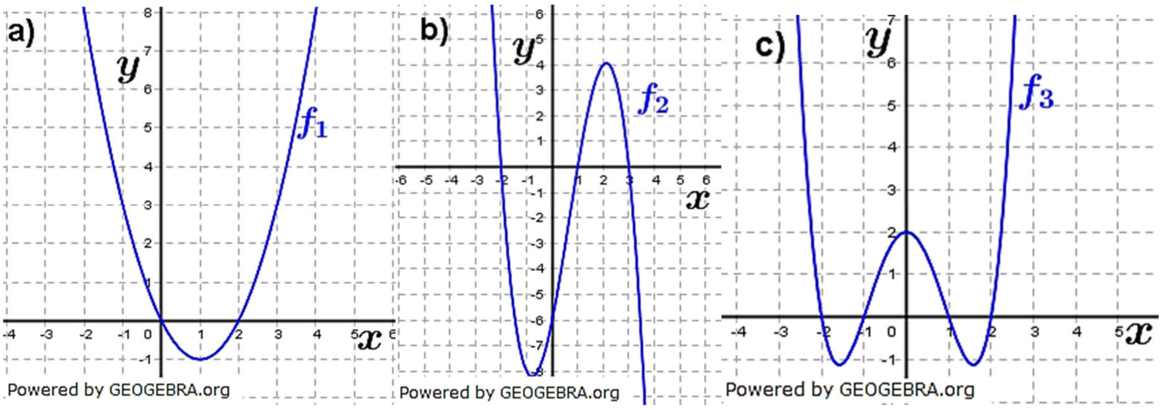
a) *Der Funktionsterm von f wird mit 2 multipliziert.*
Die Nullstellen ändern sich nicht, denn $g = 2 \cdot f$ ist eine Streckung in y-Richtung, die die Nullstellen nicht beeinflusst.

b) *Zum Funktionsterm von f wird 2 addiert.*
Die Nullstellen ändern sich, denn $g = f + 2$ ist eine Verschiebung in y-Richtung, die die Nullstellen beeinflusst.

c) *Der Funktionsterm von f wird quadriert.*
Die Nullstellen ändern sich nicht, denn $g = f^2$ ist eine Streckung in y-Richtung, die die Nullstellen nicht beeinflusst.

Aufgabe A1

Lies die Nullstellen an den Graphen ab und ermittle einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe A2

Berechne die Nullstellen nachfolgender Funktionsgleichungen durch Faktorisieren und dem Satz vom Nullprodukt. In manchen Fällen musst du noch Substitution anwenden.

a) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
c) $f(x) = 2x^4 - 8x^2$
d) $f(x) = x^7 - 2x^4 + x$

Aufgabe A3

Bestimme die exakten Nullstellen durch Faktorisieren und dem Satz vom Nullprodukt.

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^3 - 48x^2$
b) $f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} - \frac{9x^2}{8}$
c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2{,}5x^2$
d) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 20x^2$

Aufgabe A4

Bestimme die exakten Nullstellen durch Substitution und Resubstitution.

a) $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{7}{24}x^2 - 1$
b) $f(x) = tx^4 - 12tx^2 + 20t;\ \ t \neq 0$
c) $f(x) = x^4 - ax^2 - 2a^2;\ \ a > 0$
d) $f(x) = x^6 - 4x^3 - 12$

Aufgabe A5

Löse die Gleichungen mithilfe einer Substitution.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
b) $2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$
c) $3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$
d) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$
e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$
f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

Aufgabe A6

Löse die Gleichungen aus Aufgabe A5 mit dem Substitutions-Ersatz.

Aufgabe A7

Eine ganzrationale Funktion hat mindestens die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$.
Skizziere einen möglichen Graphen, wenn

a) die Funktion gerade ist.
b) der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
c) der Graph nicht unterhalb der x-Achse verläuft.

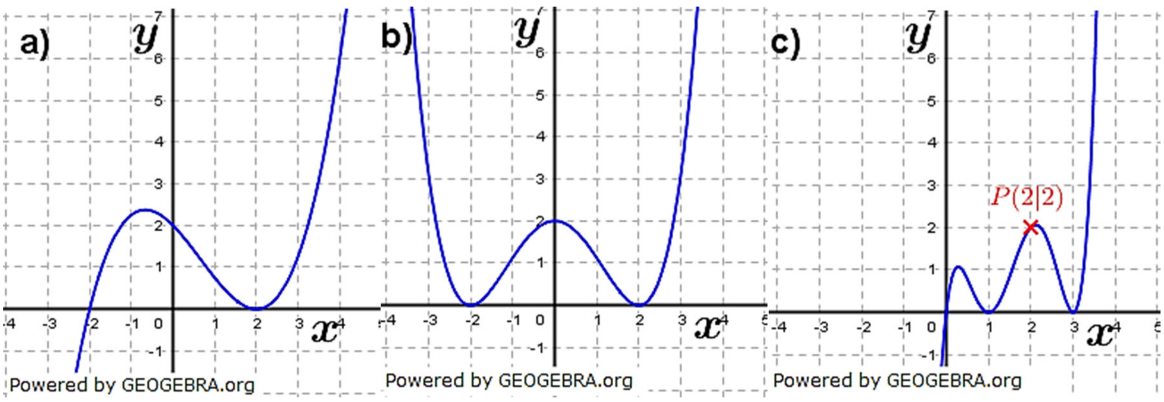
Aufgabe A8

Für Aufgaben, bei denen die Nullstellen bzw. Linearfaktoren ganzrationaler Funktionen ermittelt werden sollen, werden aus den Linearfaktoren $(x+2), (x-3)$ und $(x-4)$ sowie dem Klammerausdruck (x^2+1) Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften in ausmultiplizierter Form erzeugt.

a) Der Grad der Funktion soll 3 bzw. 5 sein.
b) Die Funktion soll den Grad 4 bzw. 6 und genau zwei Nullstellen haben.
c) Die Funktion soll keine Nullstellen und einen Grad größer als 3 haben.
d) Die Funktion hat den Grad 4, das Absolutglied im Funktionsterm ist 12.

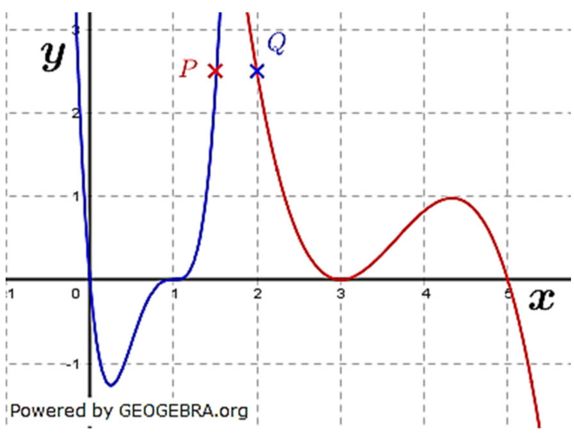
Aufgabe A9

Die Graphen gehören zu ganzrationalen Funktionen. Ermittle einen Funktionsterm.



Aufgabe A10

Die nebenstehende Graphik zeigt zwei ganzrationale Funktionen.
Ermittle jeweils einen Funktionsterm.



Lösung A1

a) $N_1(0|0)$ einfach, $N_2(2|0)$ einfach.
$f(x) = ax \cdot (x-2)$
Punktprobe mit $P(3|3)$:
$3 = 3a \cdot (3-2) = 3a \;\; ==> \;\; a = 1$
$f(x) = x \cdot (x-2)$

b) $N_1(-2|0)$ einfach, $N_2(1|0)$ einfach und $N_3(2|0)$ einfach.
$f(x) = a(x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$
Punktprobe mit $P(2|4)$:
$4 = a(6) \cdot 1 \cdot (-1) = -6a \;\; ==> \;\; a = -\frac{2}{3}$
$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$

c) $N_1(-2|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(1|0)$ und $N_4(2|0)$ alle einfach.
$f(x) = a(x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) = a(x^2-4)(x^2-1)$
Punktprobe mit $P(0|2)$:
$2 = a \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4a \;\; ==> \;\; a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)(x^2-1)$

Lösung A2

Nullstellenberechnung über $f(x) = 0$:

a) $x^2 - x = x \cdot (x-1)$
$N_1(0|0)$; $N_2(1|0)$

b) $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1)$
$N_1(0|0)$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$
$N_1(1|0)$

c) $2x^4 - 8x^2 = 2x^2 \cdot (x^2 - 4)$
$N_1(0|0)$; $N_2(-2|0)$; $N_3 = (2|0)$

d) $x^7 - 2x^4 + x = x \cdot (x^6 - 2x^3 + 1)$
$N_1(0|0)$
$x^6 - 2x^3 + 1 = 0$
$x_{2,3}^3 = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \qquad | \quad \sqrt[3]{}$
$N_2(1|0)$

Lösung A3

Nullstellenberechnung über $f(x) = 0$:

a) $\frac{1}{12}x^4 - 2x^3 - 48x^2 = \frac{1}{12}x^2 \cdot (x^2 - 24x - 576)$
$x_1 = 0$
$x^2 - 24x - 576 = 0$
$x_{2,3} = 12 \pm \sqrt{144 + 576} = 12 \pm \sqrt{720} \qquad | \quad p/q$-Formel
$x_{2,3} = 12 \pm 12 \cdot \sqrt{5}$
$x_2 = 12(1+\sqrt{5})$; $\;\; x_3 = 12(1-\sqrt{5})$
$N_1(0|0)$; $N_2(12(1+\sqrt{5})|0)$; $N_3(12(1-\sqrt{5})|0)$

b) $\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{2}-\frac{9x^2}{8}=x^2\cdot\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{9}{8}\right)$
$x_1=0$
$\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{9}{8}=0$ | $\cdot 16$
$x^2+8x-18=0$
$x_{2,3}=-4\pm\sqrt{16+18}$ | p/q-Formel
$x_{2,3}=-4\pm 12\cdot\sqrt{5}$
$x_2=-4+\sqrt{34};\quad x_3=-4-\sqrt{34}$
$N_1(0|0);\ N_2(-4+\sqrt{34}|0);\ N_3(-4-\sqrt{34}|0)$

c) $x^4-4x^3+2{,}5x^2=x^2\cdot(x^2-4x+2{,}5)$
$x_1=0$
$x^2-4x+2{,}5=0$
$x_{2,3}=2\pm\sqrt{4+2{,}5}=2\pm\sqrt{6{,}5}$ | p/q-Formel
$x_{2,3}=2\pm\sqrt{6{,}5}$
$x_2=2+\sqrt{6{,}5};\quad x_3=2-\sqrt{6{,}5}$
$N_1(0|0);\ N_2\left(2+\sqrt{6{,}5}|0\right);\ N_3\left(2-\sqrt{6{,}5}|0\right)$

d) $x^4-9x^3+20x^2=x^2\cdot(x^2-9x+20)$
$x_1=0$
$x^2-9x+20=0$
$x_{2,3}=4{,}5\pm\sqrt{20{,}25-20}$ | p/q-Formel
$x_{2,3}=4{,}5\pm\sqrt{0{,}25}=4{,}5\pm 0{,}5$
$x_2=5;\quad x_3=4$
$N_1(0|0);\ N_2(5|0);\ N_3(4|0)$

Lösung A4

Nullstellenberechnung über $f(x)=0$:

a) $\frac{1}{48}x^4-\frac{7}{24}x^2+1=0$
$x^2=z$

Substitution:
$\frac{1}{48}z^2-\frac{7}{24}z+1=0$ | $\cdot 48$
$z^2-14+48=0$
$z_{1,2}=7\pm\sqrt{49-48}=7\pm 1$
$z_1=8;\quad z_2=6$

Resubstitution
$x^2=z_1=8$
$x_1=\sqrt{8};\ x_2=-\sqrt{8}$
$x^2=z_2=6$
$x_3=\sqrt{6};\ x_4=-\sqrt{6}$

b) $tx^4-12tx^2+20t=0$
$x^2=z$

Substitution:
$tz^2-12tz+20t=0$ | $:t$
$z^2-12z+20=0$
$z_{1,2}=6\pm\sqrt{36-20}=6\pm\sqrt{16}$
$z_1=10;\quad z_2=2$

Resubstitution
$x^2=z_1=10$
$x_1=\sqrt{10};\ x_2=-\sqrt{10}$
$x^2=z_2=2$
$x_3=\sqrt{6};\ x_4=-\sqrt{6}$

c) $x^4 - ax^2 - 2a^2 = 0$
$x^2 = z$

Substitution:
$z^2 - az - 2a^2 = 0$
$z_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{3}{2}a$
$z_1 = 2a;\quad z_2 = -a$

Resubstitution
$x^2 = z_1 = 2a$
$x_1 = \sqrt{2a};\quad x_2 = -\sqrt{2a}$
$x^2 = z_2 = -a;\quad \mathbb{L} = \{\}$

d) $x^6 - 4x^3 - 12 = 0$
$x^3 = z$

Substitution:
$z^2 - 4z - 12 = 0$
$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm \sqrt{16}$
$z_1 = 6;\quad z_2 = -2$

Resubstitution
$x^3 = z_1 = 6$
$x_1 = \sqrt[3]{6}$

Lösung A5

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
$x^2 = z$

Substitution:
$z^2 - 20z + 64 = 0$
$z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$ | p/q-Formel
$z_1 = 16;\quad z_2 = 4$

Resubstitution
$x^2 = z_1 = 16$
$x_1 = 4;\quad x_2 = -4$
$x^2 = z_2 = 4$
$x_3 = 2;\quad x_4 = -2$

b) $2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$
$x^2 = z$

Substitution:
$2z^2 - 8z - 90 = 0$ | $:2$
$z^2 - 4z - 45 = 0$
$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm \sqrt{49}$ | p/q-Formel
$z_1 = 9;\quad z_2 = -5$

Resubstitution
$x^2 = z_1 = 9$
$x_1 = 3;\quad x_2 = -3$
$x^2 = z_2 = -5;\quad \mathbb{L} = \{\}$

c) $3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$
$x^2 = z$

Substitution:
$3z^2 - 90z - 93 = 0$ | $:3$
$z^2 - 30z - 31 = 0$
$z_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 + 31} = 15 \pm 16$ | p/q-Formel
$z_1 = 31;\quad z_2 = -1$

Resubstitution
$x^2 = z_1 = 31$
$x_1 = \sqrt{31};\quad x_2 = -\sqrt{31}$
$x^2 = z_2 = -1;\quad \mathbb{L} = \{\}$

d) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$

$x^2 = z$

Substitution:

$z^2 + \frac{4}{9}z - \frac{13}{9} = 0$

$z_{1,2} = -\frac{2}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{13}{9}} = -\frac{2}{9} \pm \frac{11}{9}$ | p/q-Formel

$z_1 = 1;\quad z_2 = -\frac{13}{9}$

Resubstitution

$x^2 = z_1 = 1$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1$

$x^2 = z_2 = -\frac{13}{9};\ \ \mathbb{L} = \{\}$

e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

$x^2 = z$

Substitution:

$z^2 - 17z + 16 = 0$

$z_{1,2} = 8{,}5 \pm \sqrt{72{,}25 - 16} = 8{,}5 \pm 7{,}5$ | p/q-Formel

$z_1 = 16;\quad z_2 = 1$

Resubstitution

$x^2 = z_1 = 16$

$x_1 = 4;\ \ x_2 = -4$

$x^2 = z_2 = 1$

$x_3 = 1;\ \ x_4 = -1$

f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

$x^3 = z$

Substitution:

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$ | p/q-Formel

$z_1 = 9;\quad z_2 = 1$

Resubstitution

$x^3 = z_1 = 9$ | $\sqrt[3]{\ }$

$x_1 = \sqrt[3]{9}$

$x^2 = z_2 = 1$

$x_2 = 1$

Lösung A6

Lösungshilfe:

Haben wir es mit biquadratischen Gleichungen zu tun, so wird im allgemeinen die biquadratische Gleichung mit Substitution in eine rein quadratische Gleichung überführt, die dann mittels Mitternachtsformel gelöst wird. Ist diese Lösung bekannt, müssen dann die Lösungen der Gleichung mittels Resubstitution noch gefunden werden.

Die Vorgehensweise Substitution / Resubstitution kann aber auf einfache Weise auch übergangen werden. Wer will uns denn verbieten, dass wir bei einer Gleichung von z. B. $x^4 + bx^2 + c = 0$ die Mitternachtsformel direkt anwenden, wie im Folgenden gezeigt wird.

$x^4 + bx^2 + c = 0$

$x^2 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ | p/q-Formel

Somit haben wir die Substitutionsvariable lediglich durch x^2 ersetzt. Und nach der Ausrechnung von x^2 müssen wir dann nur noch die Wurzel des/der Ergebnisse(s) ziehen.

Zum Studieren dieser Vorgehensweise siehe die nachfolgenden Lösungen.

Klausuraufschrieb:

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

$x_{1,2}^2 = 10 \pm \sqrt{100-64} = 10 \pm 6$ | p/q-Formel

$x_1^2 = 16 \quad ==> \quad x_1 = 4{:}\;\; x_2 = -4$

$x_2^2 = 4 \quad ==> \quad x_3 = 2{:}\;\; x_4 = -2$

$\mathbb{L} = \{-4; -2; 2; 4\}$

b) $2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$ | $:2$

$x^4 - 4x^2 - 45 = 0$

$x_{1,2}^2 = 2 \pm \sqrt{4+45} = 2 \pm 7$ | p/q-Formel

$x_1^2 = 9 \quad ==> \quad x_1 = 3{:}\;\; x_2 = -3$

$x_2^2 = -5 \quad ==> \quad \mathbb{L} = \{\}$

$\mathbb{L} = \{-3; 3\}$

c) $3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$ | $:3$

$x^4 + 30x^2 - 31 = 0$

$x_{1,2}^2 = -15 \pm \sqrt{225+31} = 15 \pm 16$ | p/q-Formel

$x_1^2 = 31 \quad ==> \quad x_1 = \sqrt{31}{:}\;\; x_2 = -\sqrt{31}$

$x_2^2 = -1 \quad ==> \quad \mathbb{L} = \{\}$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{31}; \sqrt{31}\}$

d) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$

$x_{1,2}^2 = -\frac{2}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{13}{9}} = -\frac{2}{9} \pm \frac{11}{9}$ | p/q-Formel

$x_1^2 = 1 \quad ==> \quad x_1 = 1{:}\;\; x_2 = -1$

$x_2^2 = -\frac{13}{9} \quad ==> \quad \mathbb{L} = \{\}$

$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

$x_{1,2}^2 = 8{,}5 \pm \sqrt{72{,}25 - 16} = 8{,}5 \pm 7{,}5$ | p/q-Formel

$x_1^2 = 16 \quad ==> \quad x_1 = 4{:}\;\; x_2 = -4$

$x_2^2 = 1 \quad ==> \quad x_3 = 1{:}\;\; x_4 = -1$

$\mathbb{L} = \{-4; -1; 1; 4\}$

f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

$x^3 = 5 \pm \sqrt{25-9} = 5 \pm 4$ | p/q-Formel

$x_1^3 = 9 \quad ==> \quad x_1 = \sqrt[3]{9}$

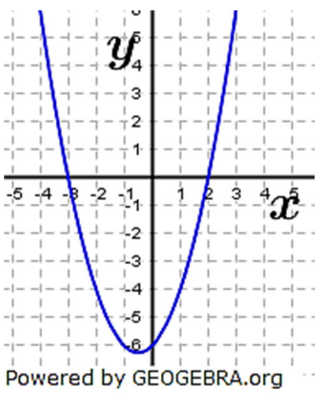
$x_2^3 = 1 \quad ==> \quad x_2 = 1$

$\mathbb{L} = \{1; \sqrt[3]{9}\}$

Lösung A7

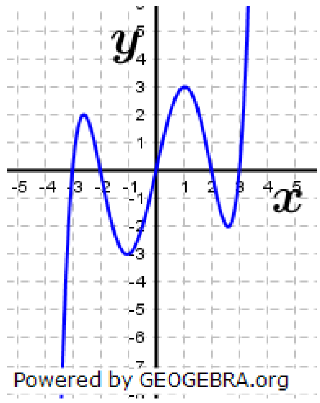
a) die Funktion gerade ist

$f(x) = (x+3)\cdot(x-2) = x^2 + x - 6$



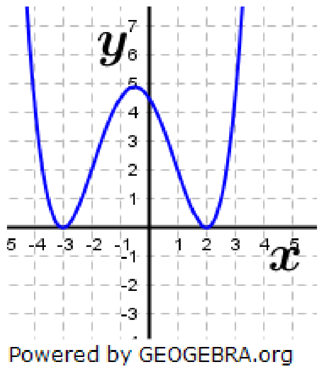
b) der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$f(x) = \frac{1}{8}x \cdot (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 4)$



c) der Graph nicht unterhalb der x-Achse verläuft.

$f(x) = \frac{1}{8}(x + 3)^2 \cdot (x - 2)^2$



Lösung A8

a) Grad 3 bzw. 5:

$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

$g(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 + 1) = x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 2x + 24$

b) Grad 4 bzw. 6 und genau zwei Nullstellen haben:

$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 1) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$

$g(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 1)^2 = x^6 - x^5 - 4x^4 - 2x^3 - 11x^2 - x - 6$

c) keine Nullstellen und einen Grad größer als 3

$f(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

$g(x) = -(x^2 + 1)^3 = -x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 1$

d) Grad 4, das Absolutglied im Funktionsterm ist 12

$f(x) = -2(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 1) = -2x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 2x + 12$

$g(x) = (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 + 1) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 12$

Lösung A9

a) $f(x) = a \cdot (x + 2)(x - 2)^2$

$2 = a \cdot (0 + 2)(0 - 2)^2 = 8a$ | Punktprobe mit $P(0|2)$

$a = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{4} + 2)(x - 2)^2$

b) $f(x) = a \cdot (x + 2)^2(x - 2)^2$

$2 = a \cdot (0 + 2)^2(0 - 2)^2 = 16a$ | Punktprobe mit $P(0|2)$

$a = \frac{1}{8}$

$f(x) = \frac{1}{8}(x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2$

c) $f(x) = a \cdot x(x-1)^2(x-3)^2$
$2 = a \cdot 2(2-1)^2(2-3)^2 = 2a$ | Punktprobe mit $P(2|2)$
$a = 1$
$f(x) = x(x-1)^2 \cdot (x-3)^2$

Lösung A10

Linke Grafik:
$f(x) = ax(x-1)^3$ | Punktprobe mit $P(1{,}5|2{,}5)$
$2{,}5 = 1{,}5a(1{,}5-1)^3 = \frac{3}{16}a$
$a = \frac{40}{3}$
$f(x) = \frac{40}{3}x(x-1)^3$

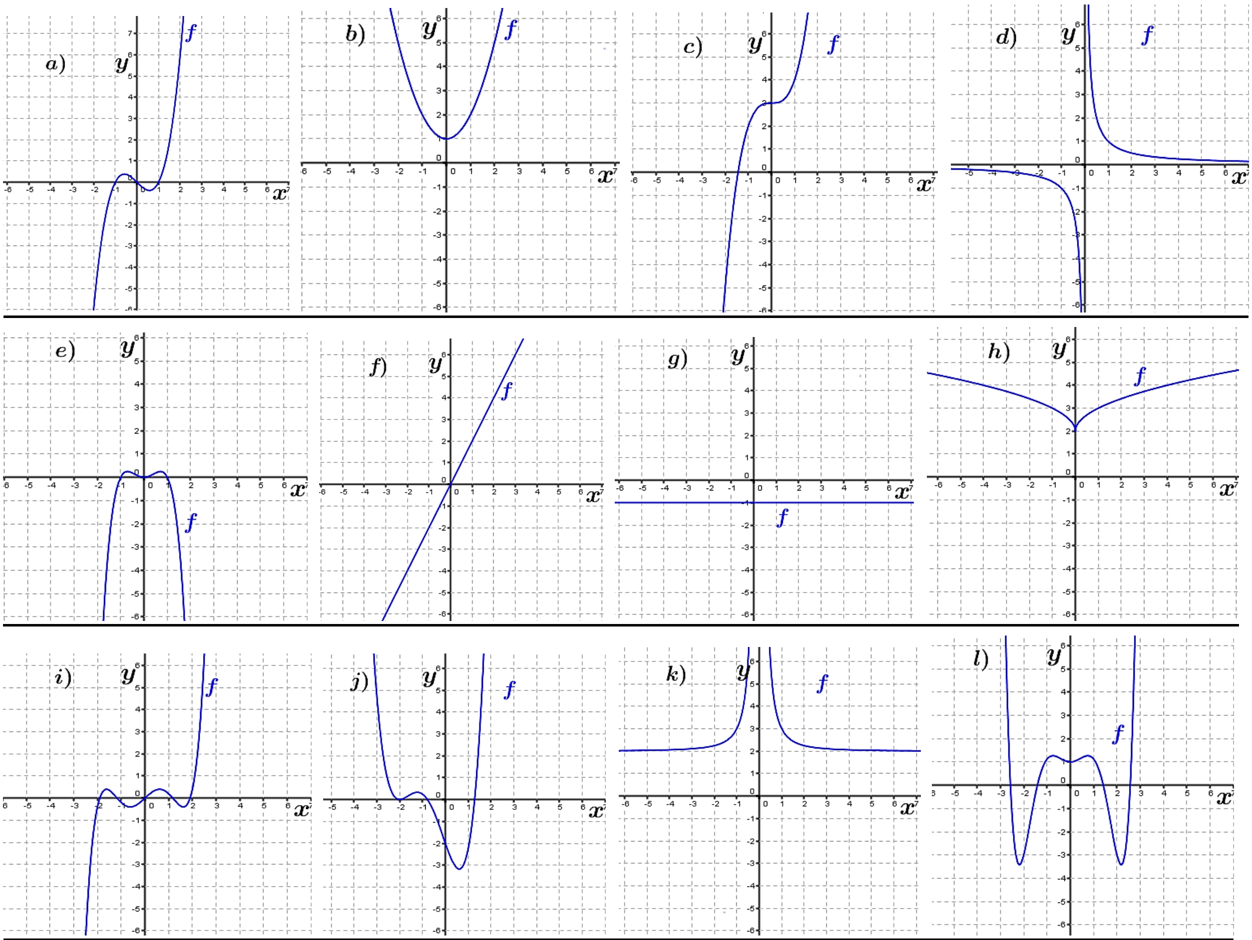
Rechte Grafik:
$f(x) = a(x-3)^2(x-5)$ | Punktprobe mit $P(2|2{,}5)$
$2{,}5 = a(2-3)^2(2-5) = -3a$
$a = -\frac{5}{6}$
$f(x) = -\frac{5}{6}(x-3)^2(x-5)$

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Dokument mit 19 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme, welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung, achsen-symmetrisch zur y–Achse ist bzw. keine Symmetrie aufweist. Trage deine Lösungen (Buchstaben der Grafik) in die darunter stehende Tabelle ein.

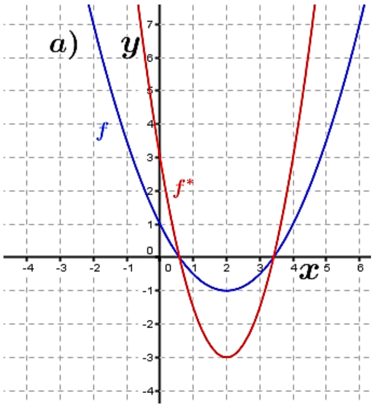


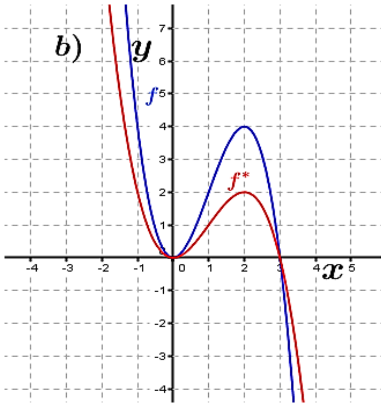
Bedeutung der Abkürzungen: PsU = Punktsymmetrisch zum Ursprung, Asy = Achsensymmetrisch zur y–Achse, KS=keine Symmetrie.

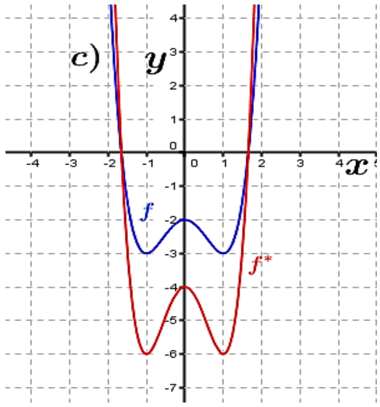
	PsU	Asy	KS		PsU	Asy	KS
$f_1(x) = x^2 + 1$	____	____	____	$f_2(x) = x^3 - x$	____	____	____
$f_3(x) = -x^4 + x^2$	____	____	____	$f_4(x) = 2x$	____	____	____
$f_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x$	____	____	____	$f_6(x) = \frac{1}{8}x^6 - x^4 + x^2 + 1$	____	____	____
$f_7(x) = \frac{1}{x}$	____	____	____	$f_8(x) = \sqrt{\lvert x\rvert} + 2$	____	____	____
$f_9(x) = x^3 + 3$	____	____	____	$f_{10}(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 11x - 8$	____	____	____
$f_{11}(x) = -1$	____	____	____	$f_{12}(x) = \frac{1}{x^2} + 2$	____	____	____

Aufgabe 2

Bestimme anhand der Graphen, wie groß der jeweilige Streckungsfaktor k in y–Richtung ist, die den Graphen der Funktion f in den Graphen der Funktion f^* überführt.

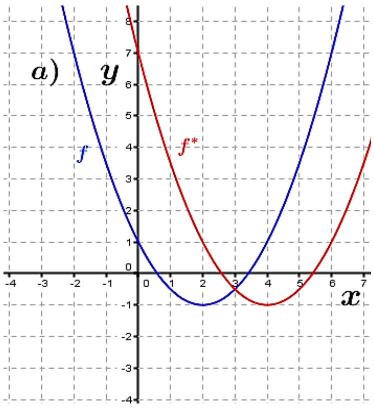


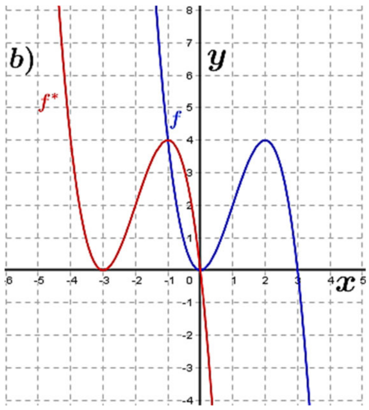


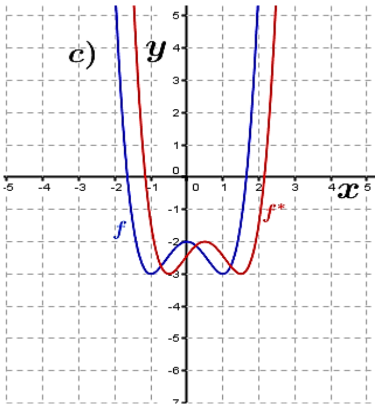


Aufgabe 3

Bestimme anhand der Graphen, wie groß der jeweilige Verschiebungsfaktor c in x-Richtung ist, der den Graphen der Funktion f in den Graphen der Funktion f^* überführt.



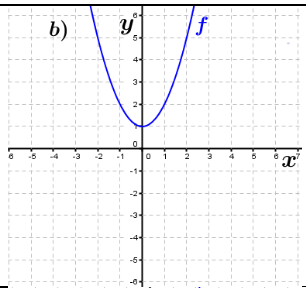
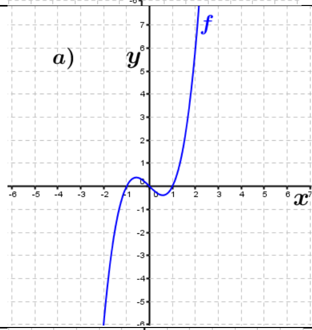
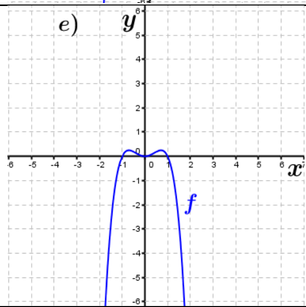
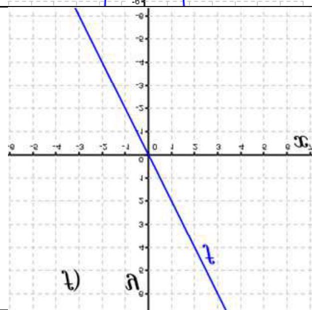
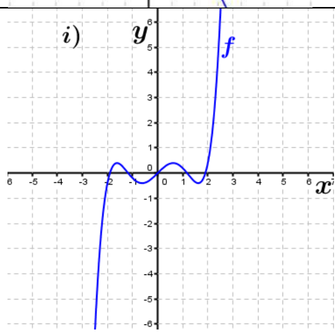




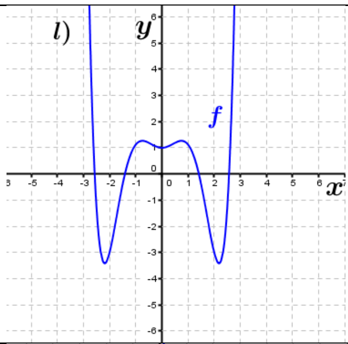
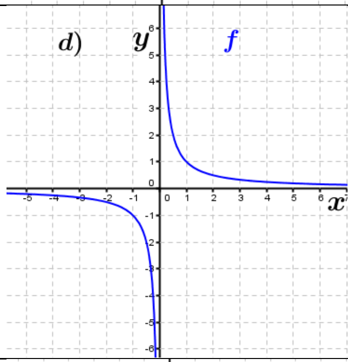
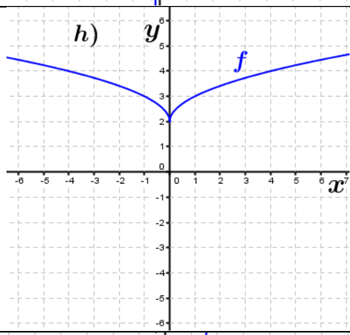
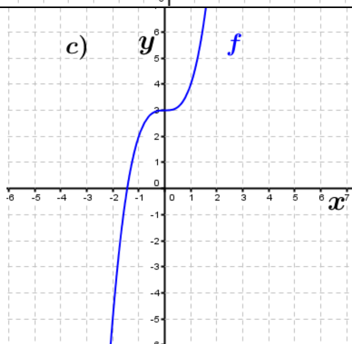
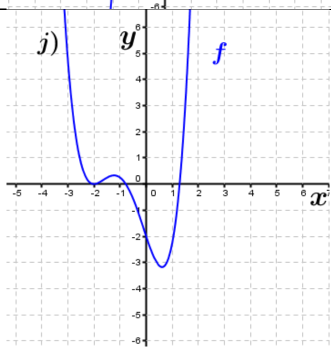
Aufgabe 4

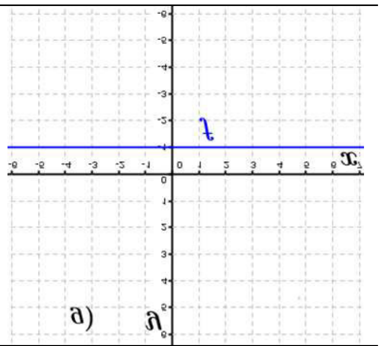
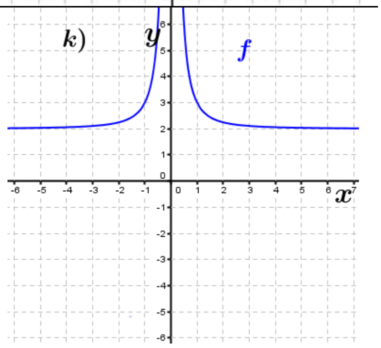
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$.
Bilde die Funktionsgleichung $f^*(x)$ von f^*, deren Graph um eine Stelle nach links und zwei Einheiten nach unten verschoben ist.

Lösung A1

	PsU	Asy	KS	
$f_1(x) = x^2 + 1$	___	(b)	___	
$f_2(x) = x^3 - x$	(a)	___	___	
$f_3(x) = -x^4 + x^2$	___	(e)	___	
$f_4(x) = 2x$	___	(f)	___	
$f_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x$	(i)	___	___	

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

	PsU	Asy	KS	
$f_6(x) = \frac{1}{8}x^6 - x^4 + x^2 + 1$	___	(l)	___	
$f_7(x) = \frac{1}{x}$	(d)	___	___	
$f_8(x) = \sqrt{\lvert x \rvert} + 2$	___	(h)	___	
$f_9(x) = x^3 + 3$	___	___	(c)	
$f_{10}(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 11x - 8$	___	___	(j)	

	PsU	Asy	KS	
$f_{11}(x) = -1$	___	(g)	___	
$f_{12}(x) = \frac{1}{x^2} + 2$	___	(k)	___	

Lösung A2

a) Wir betrachten den Tiefpunkt von f bei $T(2|-1)$. Dieser Punkt hat bei f^* die Koordinaten $T^*(2|-3)$.
Der Streckungsfaktor ist $k = 3$, da $-1 \cdot 3 = -3$.

b) Wir betrachten den Hochpunkt von f bei $H(2|4)$. Dieser Punkt hat bei f^* die Koordinaten $H^*(2|2)$.
Der Streckungsfaktor ist $k = \frac{1}{2}$, da $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

c) Wir betrachten den Hochpunkt von f bei $H(0|-2)$. Dieser Punkt hat bei f^* die Koordinaten $H^*(0|-4)$.
Der Streckungsfaktor ist $k = 2$, da $-2 \cdot 2 = -4$.

Lösung A3

a) Wir betrachten den Tiefpunkt von f bei $T(2|-1)$. Dieser Punkt hat bei f^* die Koordinaten $T^*(4|-1)$.
Der Verschiebungsfaktor ist $c = 2$, da $2 + 2 = 4$.

b) Wir betrachten den Hochpunkt von f bei $H(2|4)$. Dieser Punkt hat bei f^* die Koordinaten $H^*(-1|4)$.
Der Verschiebungsfaktor ist $c = -3$, da $2 - 3 = -1$.

c) Wir betrachten den Hochpunkt von f bei $H(0|-2)$. Dieser Punkt hat bei f^* die Koordinaten $H^*\left(\frac{1}{2}\middle|-2\right)$.
Der Verschiebungsfaktor ist $c = \frac{1}{2}$, da $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Lösung A4

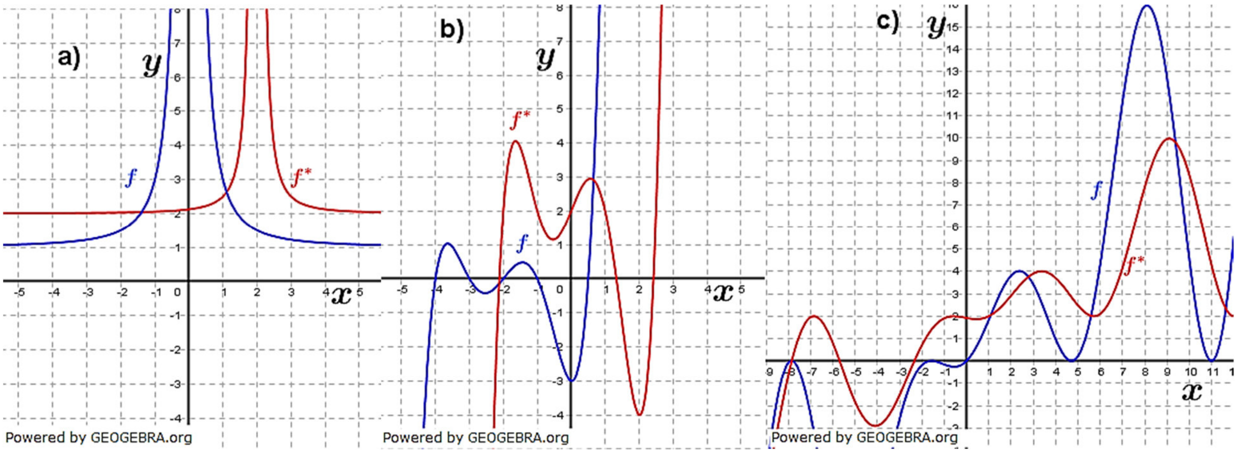
Mit $c = -1$ und $d = -2$ erhalten wir:
$f^*(x) = (x-2-1)^2 \cdot (x+2-1)^2 - 2$
$f^*(x) = (x-3)^2 \cdot (x+1)^2 - 2$

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme anhand der Graphen, wie groß der jeweilige Streckungsfaktor k in y–Richtung, der Verschiebungsfaktor b in y–Richtung und der Verschiebungsfaktor a in x–Richtung ist, die den Graphen der Funktion f in den Graphen der Funktion f^* überführt.



Aufgabe A2

Gegeben sind Funktionen f mit $f(x) = \cdots$. Bestimme rechnerisch die Funktionsgleichung $f^*(x)$ der Funktion f^*, die aus f durch Streckung um den Faktor k in y–Richtung, Verschiebung um a Einheiten in x–Richtung und um b Einheiten in y–Richtung hervorgeht.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$
$k = \frac{1}{4};\ a = 2;\ b = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$
$k = 3;\ a = -1;\ b = -1$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$
$k = 0{,}5;\ a = -0{,}5;\ b = \frac{1}{3}$

d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2$
$k = -2;\ a = \frac{3}{2};\ b = -4$

e) $f(x) = 4x^6 - 2x^3 + 1$
$k = \frac{1}{4};\ a = -2;\ b = 8$

f) $f(x) = \frac{1}{5}x + x^{-2} + 1$
$k = -3; a = 4; b = -3$

g) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2$
$k = \frac{2}{5};\ a = \frac{3}{2};\ b = -\frac{1}{5}$

h) $f(x) = 0{,}5x^{-1{,}2} + x + 2$
$k = 2;\ a = -1;\ b = 4$

Aufgabe 3

Gib die Funktionsgleichung der ursprünglichen Funktion f an und durch welche Verschiebungen (a in x–Richtung, b in y–Richtung) die gegebene Funktion f^* entstanden ist.

a) $f^*(x) = x^2 + 4x$

b) $f^*(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

c) $f^*(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 1$

d) $f^*(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$

Lösung A1

a) Verschiebung in x-Richtung mit $a = 2$, in y-Richtung mit $b = 1$.
Streckung in y-Richtung mit $k = \frac{1}{4}$.

b) Verschiebung in x-Richtung mit $a = 2$, in y-Richtung mit $b = 2$.
Streckung in y-Richtung mit $k = 2$.

c) Verschiebung in x-Richtung mit $a = 1$, in y-Richtung mit $b = 2$.
Streckung in y-Richtung mit $k = \frac{1}{2}$.

Lösung A2

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1;\ \ k = \frac{1}{4};\ \ a = 2;\ b = 1$
$f^*(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{(x-2)^2} + 1 + 1\right) = \frac{1}{4(x-2)^2} + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x;\ \ \ k = 3;\ a = -1;\ b = -1$
$f^*(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{2}(x+1)^2 + x + 1 - 1\right)$
$f^*(x) = (x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1)^2 + 3x$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1;\ \ \ k = 0{,}5;\ a = -0{,}5;\ b = \frac{1}{3}$
$f^*(x) = 0{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{3}(x+0{,}5)^3 - \frac{1}{2}(x+0{,}5)^2 - 1 + \frac{1}{3}\right)$
$f^*(x) = -\frac{1}{6}(x+0{,}5)^3 - \frac{1}{4}(x+0{,}5)^2 - \frac{1}{3}$

d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2;\ \ \ k = -2;\ a = \frac{3}{2};\ b = -4$
$f^*(x) = -2 \cdot \left(2\left(x - \frac{3}{2}\right)^4 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4\right)$
$f^*(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^4 + 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 - 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 8$

e) $f(x) = 4x^6 - 2x^3 + 1;\ \ \ k = \frac{1}{4};\ a = -2;\ b = 8$
$f^*(x) = \frac{1}{4} \cdot (4(x+2)^6 - 2(x+2)^3 + 1 + 8)$
$f^*(x) = (x+2)^6 - \frac{1}{2}(x+2)^3 + 2$

f) $f(x) = \frac{1}{5}x + x^{-2} + 1;\ \ k = -3; a = 4; b = -3$
$f^*(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{5}(x-4) + (x-4)^{-2} + 1 - 3\right)$
$f^*(x) = -\frac{3}{5}(x-4) - 3(x-4)^{-2} + \frac{6}{5}$

g) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2;\ \ \ k = \frac{2}{5};\ a = \frac{3}{2};\ b = -\frac{1}{5}$
$f^*(x) = \frac{2}{5} \cdot \left((x - \frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} + (x - \frac{3}{2})^{\frac{1}{2}} - 2 - \frac{1}{5}\right)$
$f^*(x) = \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{22}{25}$

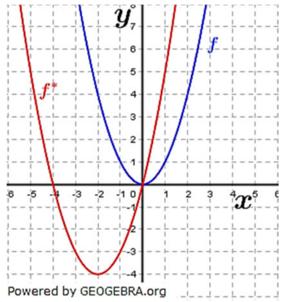
h) $f(x) = 0{,}5x^{-1{,}2} + x + 2;\ \ k = 2;\ a = -1;\ b = 4$
$f^*(x) = 2 \cdot (0{,}5(x+1)^{-1{,}2} + x + 1 + 2 + 4)$
$f^*(x) = (x+1)^{-1{,}2} + x + 7$

Lösung A3

a) $f^*(x) = x^2 + 4x$

$f^*(x) = (x+2)^2 - 4$ | Zurückführen auf Scheitelpunktform

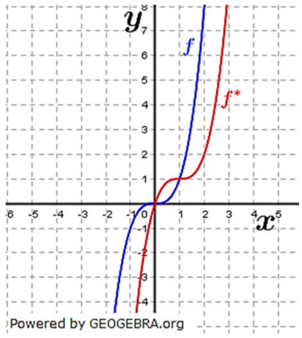
Ausgangsfunktion ist $f(x) = x^2$, die in y-Richtung mit $k = 1$ gestreckt, in x-Richtung mit $a = -2$ und in y-Richtung mit $b = -4$ verschoben ist.



b) $f^*(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

Ausgangsfunktion ist $f(x) = x^3$, die in y-Richtung mit $k = 1$ gestreckt, in x-Richtung mit $a = 1$ und in y-Richtung mit $b = 1$ verschoben ist.

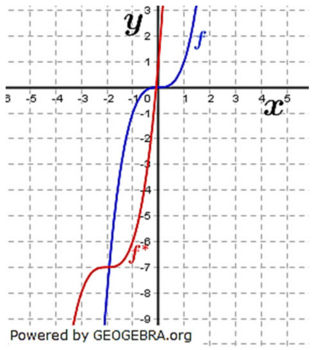
$f^*(x) = (x-1)^3 + 1$



c) $f^*(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 1$

Ausgangsfunktion ist $f(x) = x^3$, die in y-Richtung mit $k = 1$ gestreckt, in x-Richtung mit $a = -2$ und in y-Richtung mit $b = -8$ verschoben ist.

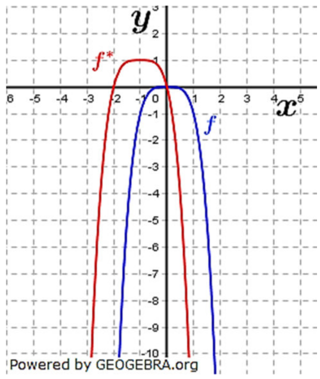
$f^*(x) = (x+2)^3 - 7$



d) $f^*(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$

Ausgangsfunktion ist $f(x) = -x^4$, die in y-Richtung mit $k = 1$ gestreckt, in x-Richtung mit $a = -1$ und in y-Richtung mit $b = 1$ verschoben ist.

$f^*(x) = -(x+1)^4 + 1$



Das Aufgabenblatt enthält Aufgaben zum Thema „Gegenseitige Lage“ sowie „Mit Parameter“ ganzrationaler Funktionen.

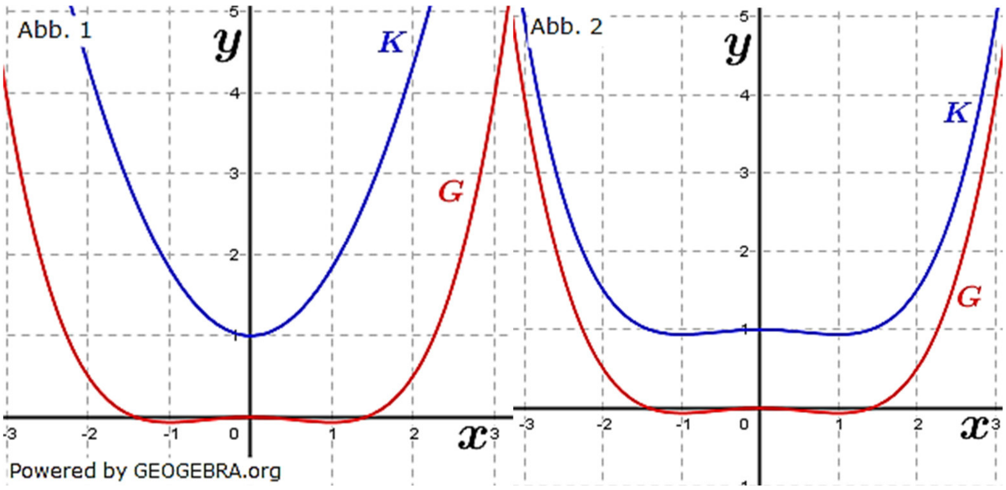
Aufgabe A1

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+5; x\in\mathbb{R}$.

Eine Parabel G mit der Gleichung $p(x)=ax^2-3x+c$ schneidet K auf der y-Achse und an der Stelle $x=4$.
Berechne die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes von K und G.

Aufgabe 2

Schneiden sich die Kurven K und G? Wenn ja, wie oft? Begründe deine Antwort.



Aufgabe A3

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+2; x\in\mathbb{R}$.

Zeige, dass die Punkte auf K mit den Abszissen -2; 1 und 4 auf einer Geraden liegen.

Aufgabe A4

Gegeben ist die Gleichung $-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+2=a$. Löse diese für $a=0$.

Für welchen Wert von a hat die Gleichung genau eine Lösung?

Aufgabe A5

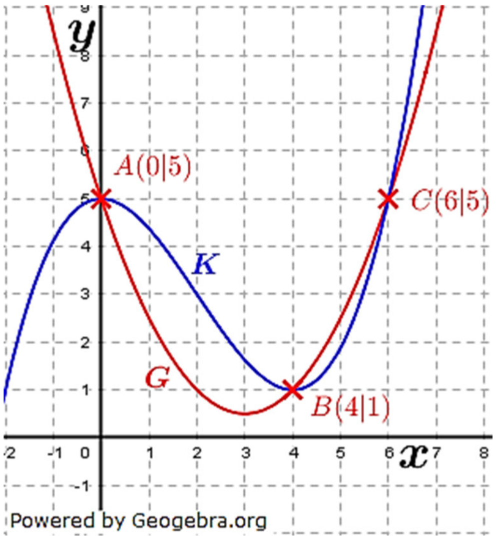
Die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{48}x^4-x^2+9;\ \mathbb{D}=\mathbb{R}$ hat den Graph K.

a) Untersuche K auf Achsenschnittpunkte. Skizziere K.

b) G ist das Schaubild der Funktion g mit $g(x)=6-0{,}5x^2;\ \mathbb{D}=\mathbb{R}$.
Zeige, dass sich K und G in zwei Punkten berühren.

Lösung A1

Aufstellung der Parabelgleichung:
Die Parabel verläuft durch die Punkte $A(0|f(0))$ und $B(4|f(4))$, also $A(0|5)$ und $B(4|1)$.
Wegen des Schnittpunktes $A(0|5)$ (y-Achsenabschnitt ist $c = 5$
Somit $p(x) = ax^2 - 3x + 5$.



$1 = 16a - 12 + 5$ | Punktprobe mit $B(4|1)$
$8 = 16a$ | $:16$
$a = \frac{1}{2}$
$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
$f \cap p$
$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
$\frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 3x = 0$ | x ausklammern
$x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 3\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 3 = 0$ | $\cdot 8$
$x^2 - 10x + 24 = 0$
$x_{2,3} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1$ | p/q-Formel
$x_2 = 6;\ \ x_3 = 4$
$p(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 5 = 5$
Der dritte Schnittpunkt hat die Koordinaten $C(6|5)$.

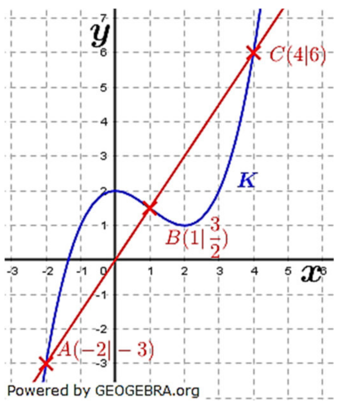
Lösung A2

Abbildung 1:
Die Kurven schneiden sich zwei Mal. K ist Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades, G ist Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Funktionen 4. Grades steigen schneller als Funktionen 2. Grades. Da beide Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse liegen, müssen sie sich irgendwo einmal im II. Quadranten und einmal im I. Quadranten schneiden.

Abbildung 2:
Die Kurven schneiden sich nicht. G ist Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, K ist der Graph des in y-Richtung nach oben verschobenen Graphen G.

Lösung A3

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$ ==> $f(-2) = -3;\ f(1) = \frac{3}{2};\ f(4) = 6$
Punkte $A(-2|-3);\ B\left(1\middle|\frac{3}{2}\right);\ C(4|6)$
Gerade durch AC:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-3)}{4-(-2)} = \frac{6}{6} = \frac{3}{2}$ ==> $y = \frac{3}{2}x + c$
$6 = \frac{3}{2} \cdot 4 + c$ ==> $c = 0$ ==> $y = \frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1$ | Punktprobe mit B
Die Punkte A, B und C liegen auf der Geraden $y = \frac{3}{2}x$.



Lösung A4

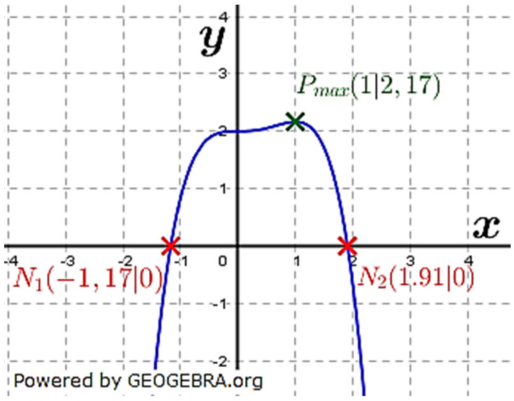
$-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2 = a$

Lösung für $a = 0$

$-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2 = 0$

Die Lösung mit dem WTR/GTR liefert:

$N_1(-1{,}17|0);\quad N_2(1{,}91|0)$



a für nur eine Lösung:

Dies ist der y-Wert für den höchsten Punkt der Kurve.

Die Lösung mit dem WTR/GTR liefert:

$a = 2{,}17$

Lösung A5

$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - x^2 + 9$

a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = 9$

$S_y(0|9)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$\frac{1}{48}x^4 - x^2 + 9 = 0 \qquad | \cdot 48$

$x^4 - 48x^2 + 432 = 0$

$z^2 - 48z + 432 = 0 \qquad |$ Substitution z

$z_{1,2} = 24 \pm \sqrt{576 - 432} = 24 \pm 12 \qquad |$ p/q-Formel

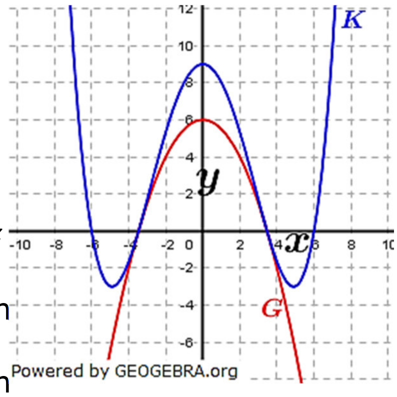
$x^2 = z_1 = 36 \qquad |$ Resubstitution

$x_{1,2} = \pm 6$

$x^2 = z_2 = 12 \qquad |$ Resubstitution

$x_{3,4} = \pm 2\sqrt{3}$

$N_1(-6|0);\ N_2(-2\sqrt{3}|0);\ N_3(2\sqrt{3}|0);\ N_4(6|0)$



b) $g(x) = 6 - 0{,}5x^2$

$f \cap g$

$\frac{1}{48}x^4 - x^2 + 9 = 6 - 0{,}5x^2$

$\frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0 \qquad | \cdot 48$

$x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

$z^2 - 24z + 144 = 0 \qquad |$ Substitution $z = x^2$

$z_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 144} = 12 \qquad |$ p/q-Formel

Wegen $D = 0$ sind die Schnittpunkte Berührpunkte.

$x^2 = z_{1,2} = 12 \qquad |$ Resubstitution

$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$

$p(2\sqrt{3}) = 6 - 0{,}5 \cdot (2\sqrt{3})^2 = 0$

$B_1(-2\sqrt{3}|0);\ B_2(2\sqrt{3}|0)$

Aufgabe A1

Für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx;\ x \ \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f_t ist K_t. Betrachte Schaubilder für positive und negative Werte von t.
Wie unterscheiden sich die Schaubilder für negative Werte von t von denen für positive Werte von t? Gib gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an. Skizziere zwei Schaubilder.

Aufgabe A2

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -x^3 + tx^2;\ x \ \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f_t ist K_t.

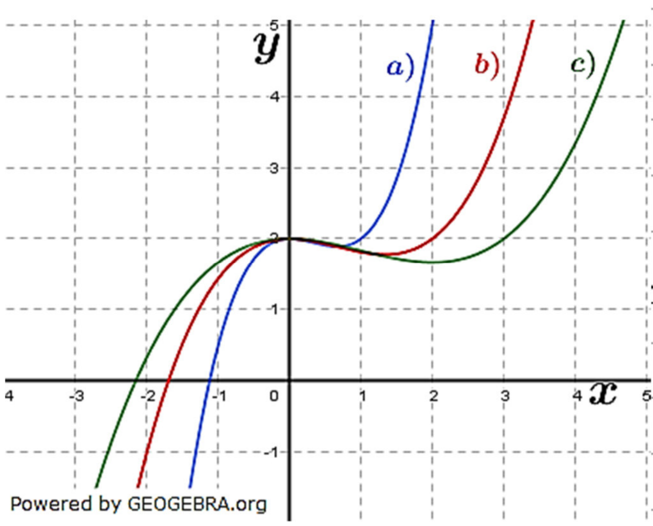
a) Gib gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an. Skizziere zwei Schaubilder.
b) Die Gerade g hat die Gleichung $y = mx$. Zeige, dass es nur ein positives m gibt, sodass g und K_3 genau zwei gemeinsame Punkte besitzen. Gib deren Koordinaten an.

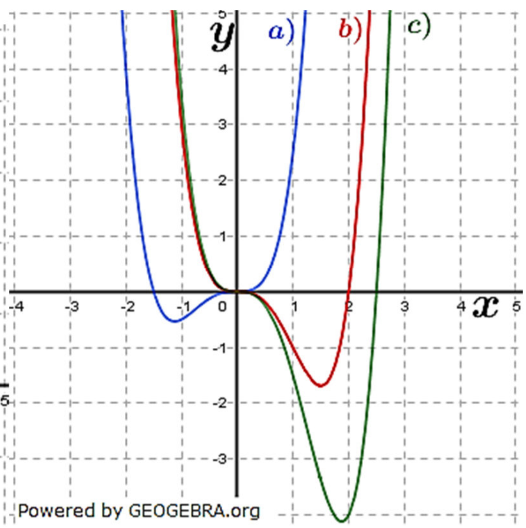
Aufgabe A3

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ die Funktion f_t. Die Abbildung zeigt das Schaubild K_t für einige Werte von t. Ordne jeder Kurve einen Parameterwert zu.

I) $f_t(x) = \frac{3}{t^2}x^3 - \frac{3}{2t}x^2 + 2$

II) $f_t(x) = x^4 - \frac{t}{2}x^3$





Aufgabe A4

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f_t mit

$$f_t(x) = (x - t)(x^2 - 5x - t);\ x \ \in \mathbb{R}.$$

Wie muss t gewählt werden, damit das Schaubild K_t von f_t mit der x–Achse genau zwei gemeinsame Punkte hat.

Aufgabe A5

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ die Funktion f_t mit

$$f_t(x) = \frac{1}{16t}x^4 - x^2 + t + 6;\ x \in \mathbb{R}.$$

K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Für welchen Wert von t verläuft K_t durch den Punkt $D(-1|4{,}5)$?

b) Zeichne K_3.
Die Punkte $P(u|f_3(u))$, $Q(-u|f_3(-u))$ und $O(0|0)$ sind für $0 < u < 3$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimme den Flächeninhalt $A(u)$ und den u–Wert, sodass $A(u) = 10$ ist.

c) Die Parabel G ist das Schaubild von g mit $g(x) = 6 - 0{,}5x^2;\ x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass sich K_t und G für alle $t > 0$ berühren. Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.

Aufgabe A6

K_t ist für jedes $t > 0$ das Schaubild von f_t mit

$$f_t(x) = \frac{1}{4}(x-t)(x+t)(x-2t);\ x \in \mathbb{R}.$$

Welche Eigenschaften von K_t kann man dem Funktionsterm entnehmen?

Aufgabe A7

Gegeben ist für jedes $t > 0$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 - 2x^2 + t;\ x \in \mathbb{R}$.

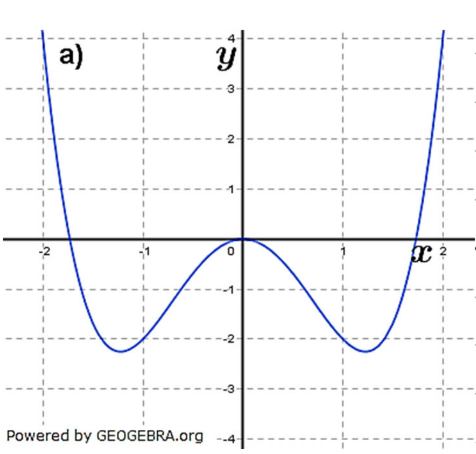
K_t ist das Schaubild von f_t.

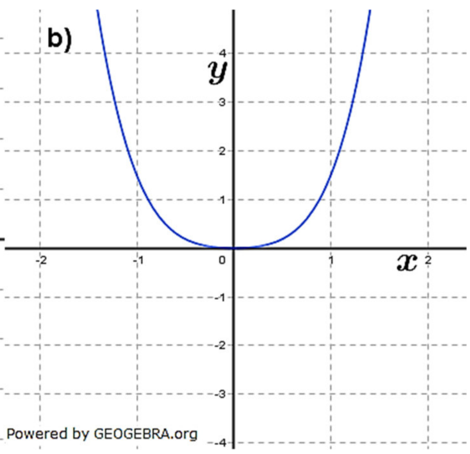
a) Untersuchen Sie K_t auf Achsenschnittpunkte. Geben Sie gemeinsame Eigenschaften an. Zeichnen Sie K_3.

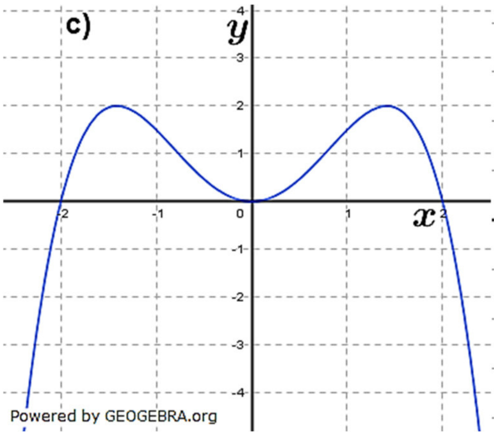
b) Die Parallel zur x–Achse durch den Schnittpunkt von K_t mit der y–Achse schneidet K_t in zwei weiteren Punkten. Berechnen Sie deren Koordinaten.

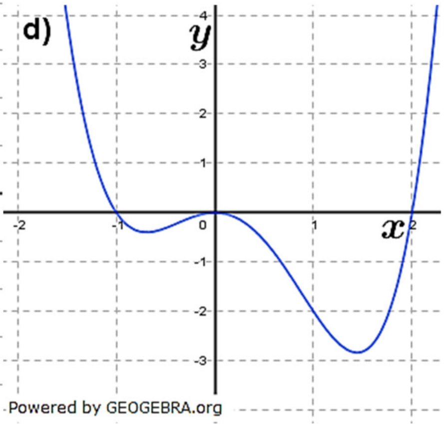
Aufgabe A8

Die vier Abbildungen zeigen drei Schaubilder von Funktinen, die zum Typ $f(x) = ax^4 + bx^2$ gehören. Machen Sie Aussagen über a und b $(a, b \neq 0)$. Welches Schaubild lässt sich nicht zuordnen? Begründe.



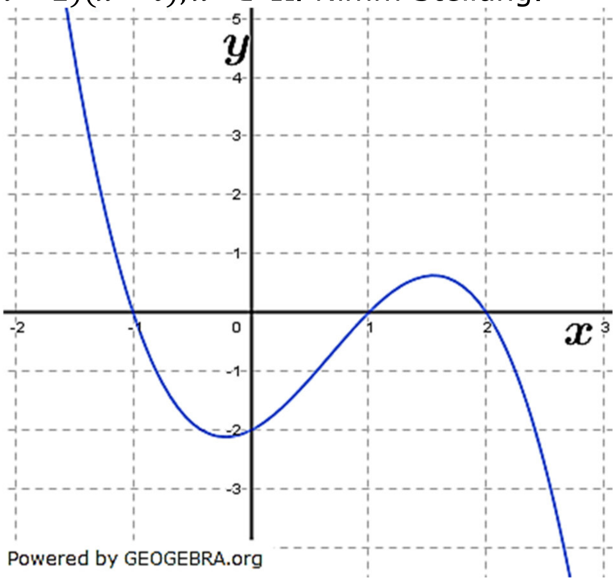






Aufgabe A9

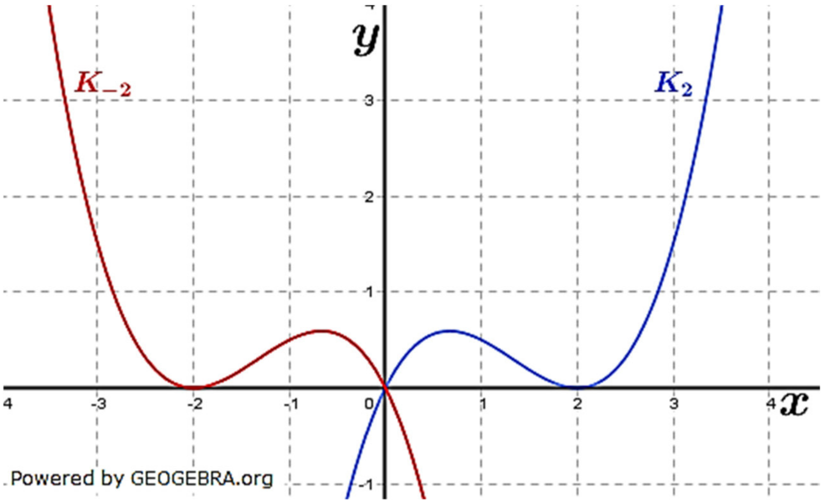
Die nachfolgende Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = 0{,}1(x^2 - 1)(x - 2)(x - t); x \in \mathbb{R}$. Nimm Stellung.



Lösung A1

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx$

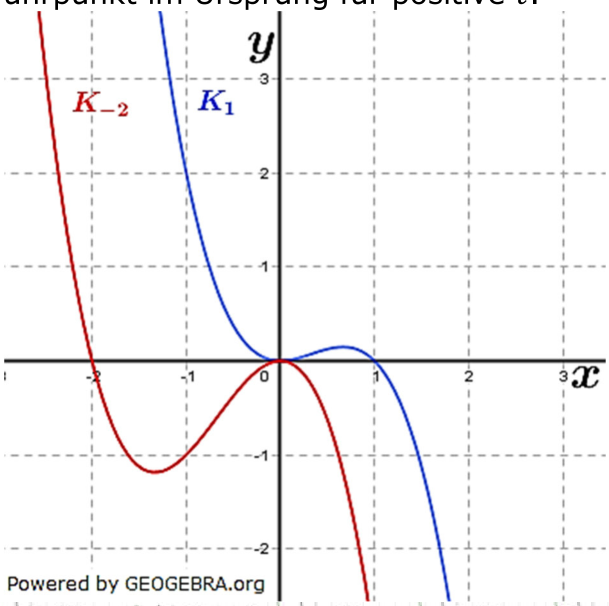
Für positive t verläuft der Graph der Funktion aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten. Der Graph hat eine einfache Nullstelle im Ursprung und eine doppelte Nullstelle mit positivem x-Wert.
Für negative t verläuft der Graph der Funktion aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten. Der Graph hat eine einfache Nullstelle im Ursprung und eine doppelte Nullstelle mit negativem x-Wert.
K_{-t} ist die Spiegelung von K_t an der y-Achse.



Lösung A2

$f_t(x) = -x^3 + tx^2$; $x \in \mathbb{R}$

a) Jedes Schaubild verläuft aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten, hat für $t \neq 0$ einen Berührpunkt mit der x–Achse im Ursprung und einen weiteren Schnittunkt in $x = t$. Für $t = 0$ hat das Schaubild eine dreifache Nullstelle ím Ursprung. Der Hochpunkt ist Berührpunkt im Ursprung für negative t. Der Tiefpunkt ist Berührpunkt im Ursprung für positive t.



b) Schnittpunkte mit $g(x) \cap f_3(x)$

$-x^3 + 3x^2 = mx \Longrightarrow -x(x^2 - 3x + m) = 0$

$x_1 = 0 \ \vee (x^2 - 3x + m) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - m}$ | p/q-Formel

Wenn neben dem Schnittpunkt im Ursprung nur noch ein einziger gemeinsamer Punkt vorhanden sein soll, so muss der Ausdruck unter der Wurzel 0 werden. Damit ist $m = \frac{9}{4}$ die gesuchte Steigung. Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_1(0|0)$ und $S_1\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{27}{8}\right)$.

Lösung A3

a) Graph a): Punktprobe mit $(1|2)$ ergibt $t = 2$

Graph b): Punktprobe mit $(2|2)$ ergibt $t = 4$

Graph c): Punktprobe mit $(3|2)$ ergibt $t = 6$

b) Bestimmung von t nur über die Nullstellen möglich.

$f_t(x) = x^4 - \frac{t}{2}x^3 = x^3(x - \frac{t}{2})$

Dreifache Nullstelle in $x_{1,2,3} = 0$ und einfache Nullstelle in $x_4 = \frac{t}{2}$.

Graph a): Nullstelle in $(-1{,}5|0)$ ergibt $t = -3$

Graph b): Nullstelle in $(2|0)$ ergibt $t = 4$

Graph c): Nullstelle in $(2{,}5|0)$ ergibt $t = 5$

Lösung A4

$f_t(x) = (x - t)(x^2 - 5x - t);\ x \ \in \mathbb{R}$

$(x - t) = 0 \ \vee (x^2 - 5x - t) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = t$

$x_{2,3} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + t}$ | p/q-Formel

1. Fall: $t = 0$ ergibt zwei gemeinsame Punkte in $x_{1,2} = 0$ und $x_2 = 5$.
2. Fall: $t = -6{,}25$ ergibt zwei gemeinsame Punkte in $x_1 = -6{,}25$ und $x_{2,3} = 2{,}5$.
3. Fall: $t = 6$ ergibt zwei gemeinsame Punkte in $x_1 = -1$ und $x_{2,3} = 6$.

Für $t \in \{-6{,}25; 0; 6\}$ hat das Schaubild K_t von f_t mit der x–Achse genau zwei gemeinsame Punkte.

Lösung A5

$f_t(x) = \frac{1}{16t}x^4 - x^2 + t + 6;\ x \ \in \mathbb{R}$

a) Punktprobe mit $D(-1|4{,}5)$ liefert:

$4{,}5 = \frac{1}{16t} - 1 + t + 6$ | $\cdot 16t$

$72t = 1 - 16t + 16t^2 + 96t$ | $-72t$

$16t^2 - 8t + 1 = 0$ | $:16$

$t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{16} = 0$

$t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{16}}$ | p/q-Formel

Es gibt nur eine Lösung mit $t = \frac{1}{4}$.

b) Flächeninhalt eines Dreiecks:

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 2u \quad h_c = f_3(u)$

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot f_3(u)$

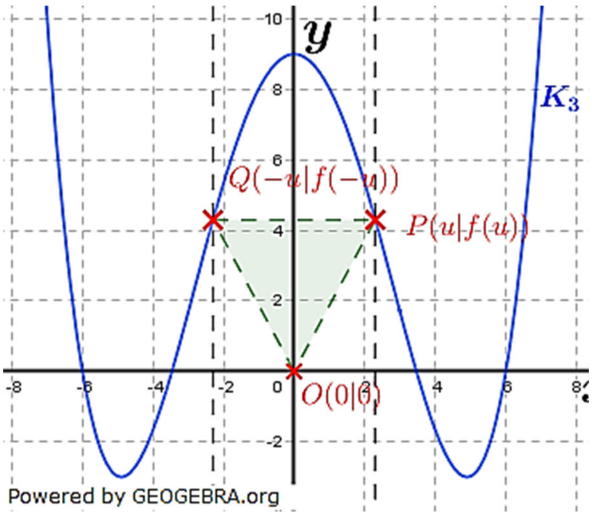
$A(u) = u(\frac{1}{48}u^4 - u^2 + 9)$

$A(u) = \frac{1}{48}u^5 - u^3 + 9u$

$A(u) = 10$

$\frac{1}{48}u^5 - u^3 + 9u - 10 = 0$

Per WTR ermitteln wir $u_1 = 1{,}41$ und $u_2 = 2{,}27$.



c) Berührpunkte mit $g(x) \cap f_t(x)$.

$\frac{1}{16t}x^4 - x^2 + t + 6 = 6 - 0{,}5x^2$

$\frac{1}{16t}x^4 - 0{,}5x^2 + t = 0$

$\frac{1}{16t}z^2 - 0{,}5z + t = 0$ | Substitution: $z = x^2$

$z^2 - 8tz + 16t^2 = 0$

$z_{1,2} = 4t \pm \sqrt{16t^2 - 16t^2}$

$z_1 = 4t$ | Wegen $D = 0$ Berührpunkte

$x^2 = 4t \implies x_{1,2} = \pm 2 \cdot \sqrt{t}$ | Resubstitution

Berührpunkte sind $B_1\left(2 \cdot \sqrt{t} \middle| 6 - 2t\right)$ und $B_1\left(-2 \cdot \sqrt{t} \middle| 6 - 2t\right)$.

Lösung A6

K_t ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten verläuft und 3 einfache Nullstellen aufweist in $x_1 = t$, $x_2 = -t$ und $x_3 = 2t$.

Lösung A7

a) Schnittpunkt mit der y–Achse in $S_y(0|t)$.

Schnittpunkte mit der x–Achse: $f_t(x) = 0$

$\frac{1}{t}x^4 - 2x^2 + t = 0$ | $\cdot t$

$x^4 - 2tx^2 + t^2 = 0$

$z^2 - 2tz + t^2 = 0$ | Substitution: $z = x^2$

$z_{1,2} = t \pm \sqrt{t^2 - t^2}$ | Wegen $D = 0$ sind dies Berührpunkte

$x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$ | Resubstitution

K_t berührt die x–Achse in $N_1(-t|0)$ und $N_2(t|0)$.

K_t verläuft aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten, ist symmetrisch zur x–Achse, schneidet diese in $S_y(0|t)$ und hat zwei Berührpunkte mit der x–Achse.

b) Die Parallele zur x-Achse durch $S_y(0|t)$ hat die Funktionsgleichung $g(x) = t$. Schnittpunkte mit K_t mit $f_t(x) \cap g(x)$

$\frac{1}{t}x^4 - 2x^2 + t = t \quad | \quad -t$

$\frac{1}{t}x^4 - 2x^2 = 0 \quad | \quad \cdot t$

$x^4 - 2tx^2 = x^2(x^2 - 2t) = 0$

$x_{1,2} = 0 \ \vee (x^2 - 2t) = 0 \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2t}$

$f_t(\sqrt{2t}) = f_t(-\sqrt{2t}) = t$

Die Koordinaten der beiden gesuchten Schnittpunkte sind $S_1(-\sqrt{2t}|t)$ und $S_2(\sqrt{2t}|t)$.

Lösung A8

$f(x) = ax^4 + bx^2 = x^2(ax^2 + b)$

$x_{1,2} = 0 \ \vee (ax^2 + b) = 0 \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$

Das Schaubild hat eine doppelte Schnittstelle mit der x–Achse im Ursprung und zwei einzelne Schnittstellen in $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$. Das Schaubild ist symmetrisch zur y–Achse.

Abbildung 1: Für $a > 0$ verläuft das Schaubild aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten. Es erfüllt die genannten Bedingungen für $b < 0$.

Abbildung 2: Für $a > 0$ verläuft das Schaubild aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten. Mit $b > 0$ entsteht bei $\sqrt{\frac{-b}{a}}$ ein $D < 0$, sodass keine weiteren Nullstellen außer $x_{1,2} = 0$ möglich sind. Das Schaubild hat eine vierfache Nullstelle und erfüllt die genannten Bedingungen.

Abbildung 3: Für $a < 0$ verläuft das Schaubild aus dem III. Quadranten in den IV. Quadranten. Es erfüllt die genannten Bedingungen für $b > 0$.

Abbildung 4: Kann nicht zugeordnet werden, da $f(x) = ax^4 + bx^2$ achsensymmetrisch ist, Abbildung 4 jedoch nicht.

Lösung A9

Die Auflösung von $f(x)$ ergibt $f(x) = 0{,}1(x+1)(x-1)(x-2)(x-t)$. Dies führt zu einem Polynom 4. Grades. Zwar sind drei Nullstellen sichtbar in $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$, die vierte Nullstelle muss bei $x_4 = t$ liegen. Nun erhalten wir durch ausmultiplizieren den y-Achsenabschnitt mit $0{,}1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-t) = -0{,}2t$. Das Schaubild schneidet die y–Achse in $S_y(0|-2)$. Dies führt zu $-0{,}2t = -2$ und damit $t = 10$.

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f für $t = 10$.

Aufgabe A1

Bestimme diejenigen Werte von t, für die der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) $f_t(x) = x^3 + 2tx^2 + tx$

b) $f_t(x) = (x - t) \cdot (x + 2)$

c) $f_t(x) = (x + t)^2 - 4x$

Aufgabe A2

Bestimme alle Werte von t so, dass

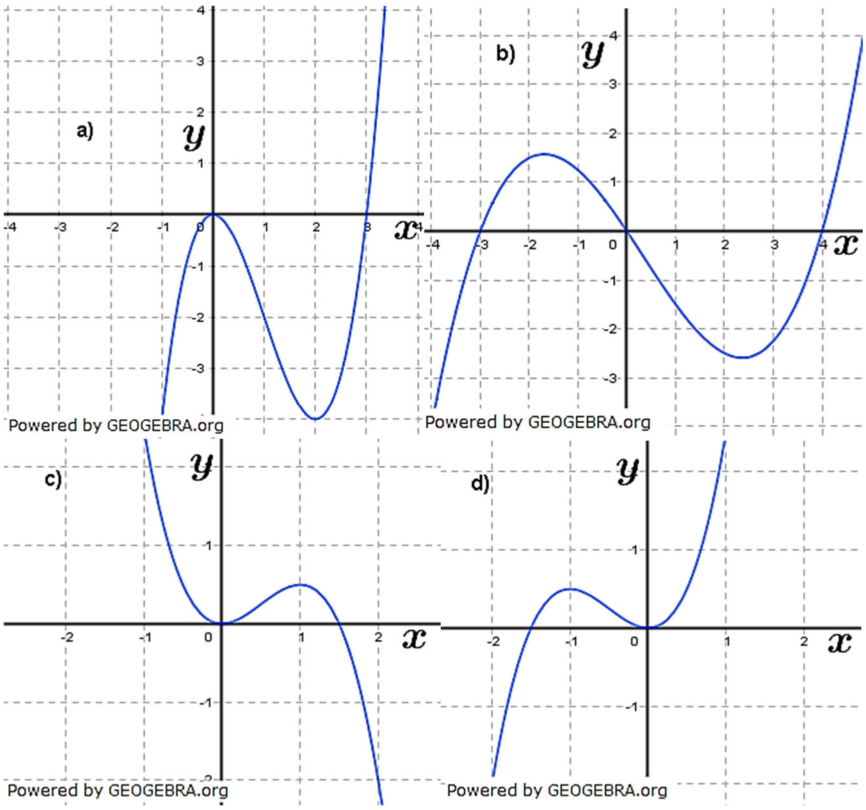
a) die Funktion f_t mit $f_t(x) = 7(x - t)^2(x - 2)$ eine dreifache Nullstelle hat.

b) die Funktion f_t mit $f_t(x) = (x + 2)(x - t)(x - 3)(x - 4)$ eine doppelte Nullstelle hat.

c) der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = 5(x - 2)(x - 4)(x - t)$ die x-Achse berührt.

Aufgabe A3

Gegeben ist für $t \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}t\right)$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f_t ist K_t. Welche Schaubilder gehören zu einer Funktion f_t, welche nicht? Begründe deine Entscheidung und ermittle gegebenenfalls den Wert von t.



Aufgabe A4

Zu jedem $t \in \mathbb{R}^*$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{12}x(x-t)^2$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f_t ist K_t.

a) Betrachte K_t für drei verschiedene Werte von t. Gib gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an. Zeichne K_6.

b) Zeige, dass jede Ursprungsgerade mit positiver Steigung m und $m \neq 3$ K_6 dreimal schneidet.

Aufgabe A5

Für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ ist eine Funktion f_t geben durch $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f_t ist K_t.
Betrachte Schaubilder für positive und negative Werte von t. Wie unterscheiden sich die Schaubilder für negative Werte von t von denen für positive Werte von t? Gib gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an. Skizziere zwei Schaubilder.

Aufgabe A6

Gegeben ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = (x-t)^2 \cdot (x^2 + 4x + 4)$.

a) Faktorisiere den Term so weit wie möglich.

b) Gib mit Fallunterscheidung Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen in Abhängigkeit von t an.

c) Bestimme sämtliche Schnittpunkte der Graphen f_t mit den Koordinatenachsen.

d) Bestimme t so, dass der zugehörige Graph durch den Punkt $P(-1|1)$ verläuft.

e) Zeichne den Graphen f_0 im Intervall $[-3; 1]$.

Aufgabe A7

Die Funktion f_k und g_k mit $k > 0$ sind gegeben durch $f_k(x) = \frac{1}{k}x(kx-1)^2$ und $g_k(x) = 3kx^2 - 4x + \frac{1}{k}$.

a) Gib die Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f_k an.

b) Bestimme die Nullstellen von g_k in Abhängigkeit von k und gib das Intervall an, in dem gilt $g_k \leq 0$.

c) Die beiden Funktionen haben eine gemeinsame Nullstelle. Gib die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunktes an und bestimme k so, dass die Abszisse des Schnittpunktes bei 3 liegt.

d) Zeichne den Graphen von f_k und g_k für $k = \frac{1}{3}$ im Intervall $[-1; 4]$. Für beide Koordinatenachsen gilt: $1\,LE = 2\,cm$

Aufgabe A8

Gegeben ist die Funktion f_t durch $f_t(x) = t(x^3 + (t-4)x^2 + 4(1-t)x + 4t)$.

a) Zeige, dass f_t eine Nullstelle bei 2 hat.

b) Stelle f_t in faktorisierter Form dar.

c) Bestimme die Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

d) Berechne t so, dass $P(1|2)$ auf f_t liegt.

e) Zeichne für $t = 1$ den zugehörigen Graphen.

Lösung A1

a) $f_t(x) = x^3 + 2tx^2 + tx$
f_0 mit $f_0(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) $f_t(x) = (x - t) \cdot (x + 2)$
f_2 mit $f_2(x) = (x - 2) \cdot (x + 2)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) $f_t(x) = (x + t)^2 - 4x$
f_2 mit $f_2(x) = (x + 2)^2 - 4x = x^2 + 4$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung A2

a) t für $f_t(x) = 7(x - t)^2(x - 2)$ mit dreifacher Nullstelle:
$t = 2$ mit $f_2(x) = 7(x - 2)^3$

b) t für $f_t(x) = (x + 2)(x - t)(x - 3)(x - 4)$ mit einer doppelte Nullstelle:
$t = -2$ mit $f_{-2}(x) = (x + 2)^2(x - 3)(x - 4)$
$t = 3$ mit $f_3(x) = (x + 2)(x - 3)^2(x - 4)$
$t = 4$ mit $f_4(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4)^2$

c) t das $f_t(x) = 5(x - 2)(x - 4)(x - t)$ die x-Achse berührt:
<u>Hinweis:</u> Eine Nullstelle, die -Achse berührt ist eine doppelte Nullstelle.
$t = 2$ mit $f_2(x) = 5(x - 2)^2(x - 4)$
$t = 4$ mit $f_4(x) = 5(x - 2)(x - 4)^2$.

Lösung A3

Schaubild a)
$t = 2$ für $f_2(x) = x^2 \cdot (x - 3)$.
Doppelte Nullstelle bei $x_1 = 0$ und einfache Nullstelle bei $x_2 = 3$.

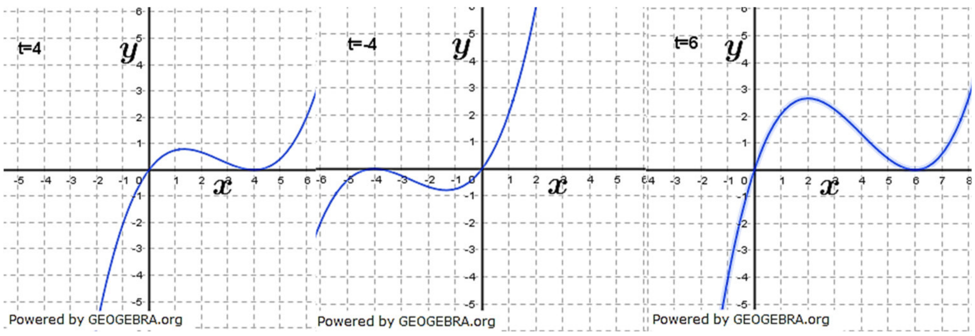
Schaubild b)
gehört zu keine Funktion f_t, da das Schaubild drei einfache Nullstellen aufweise.

Schaubild c)
gehört zu keine Funktion f_t. Zwar hat das Schaubild für $t = 1$ die doppelte Nullstelle $x_1 = 0$ und die einfache Nullstelle $x_2 = \frac{3}{2}$, jedoch verläuft das Schaubild aus dem zweiten Quadranten in den vierten Quadranten, was durch f_t nicht darstellbar ist.

Schaubild d)
$t = -1$ für $f_{-1}(x) = x^2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$.
Doppelte Nullstelle bei $x_1 = 0$ und einfache Nullstelle bei $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Lösung A4

a) K_t für verschiedene Werte von t:



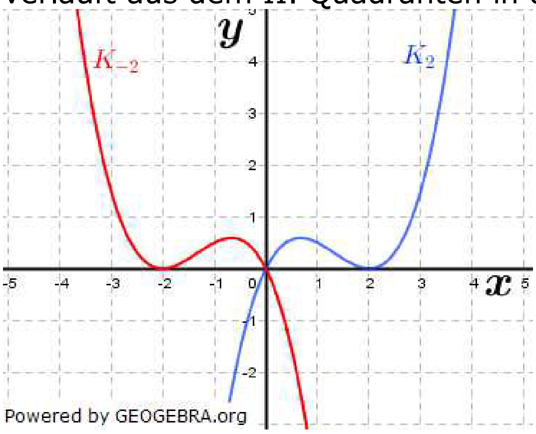
Gemeinsame Eigenschaften:
Alle Schaubilder gehen durch den Ursprung.
Alle Schaubilder haben einen Berührpunkt mit der $\boldsymbol{x}$–Achse.
$f_t(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ $\quad f_t(x) \to \infty$ für $x \to \infty$
Alle Schaubilder verlaufen aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten.

b) Eine Ursprungsgerade hat die Funktionsgleichung $g(x) = mx$.
$f_6(x) = \frac{1}{12}x(x-6)^2$. Schnittpunktberechnung: $g(x) \cap f_6(x)$.
$\frac{1}{12}x(x-6)^2 = mx \Longrightarrow \frac{1}{12}x(x-6)^2 - mx = 0$
$x\left(\frac{1}{12}(x-6)^2 - m\right) = 0$
$x_1 = 0 \ \vee \left(\frac{1}{12}(x-6)^2 - m\right) = 0 \quad |$ Satz vom Nullprodukt
$\frac{1}{12}x^2 - x + 3 - m = 0 \quad | \cdot 12$
$x^2 - 12x + 36 - 12m = 0$
$x_{2,3} = -6 \pm \sqrt{36 - 36 + 12m} = -6 \pm \sqrt{12m}$
Für positive m und $m = 3$ gibt es nur eine weitere Schnittstelle bei $x_2 = -12$. Für $m \neq 3$ gibt es außer dem Schnittpunkt im Ursprung 2 weitere Schnittstellen $x_2 = -6 + \sqrt{12m}$ sowie $x_3 = -6 - \sqrt{12m}$.

Lösung A5

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx$
Für positive t liegt der Berührpunkt rechts von der y–Achse und es gilt:
$f_t(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ $\quad f_t(x) \to \infty$ für $x \to \infty$
Der Graph der Funktion verläuft aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten.

Für negative t liegt der Berührpunkt links von der y–Achse und es gilt:
$f_t(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ $\quad f_t(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$
Der Graph der Funktion verläuft aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten.



Lösung A6

$f_t(x) = (x-t)^2 \cdot (x^2 + 4x + 4)$.

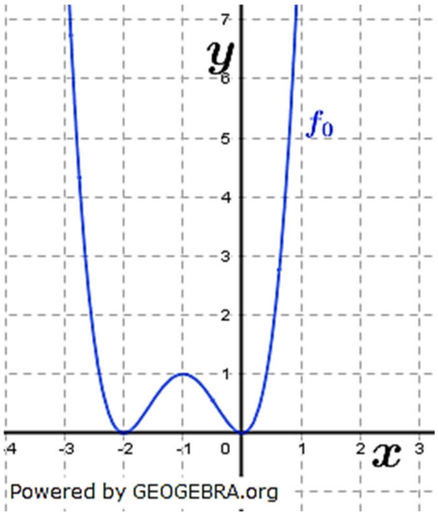
a) Faktorisieren:
$(x-t)^2 \cdot (x^2+4x+4) = (x-t)^2 \cdot (x+2)^2 = \left((x-t)(x+2)\right)^2$

b) Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen
Für $t = -2$ vierfache Nullstelle in $N(-2|0)$.
Für $t \neq -2$ doppelte Nullstellen in $N_1(t|0)$ und $N_2(-2|0)$.

c) Schnittpunkte der Graphen f_t mit den Koordinatenachsen
Schnittpunkt mit der y-Achse mit $f_t(0)$ ist $S_y(0|4t^2)$
Nullstellen:
$(x-t)^2 \cdot (x+2)^2 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$N_1(t|0)$; $N_2(-2|0)$

d) t für $f_t(-1) = 1$:
$1 = (-1-t)^2 \cdot (-1+2)^2$
$t^2 + 2t + 1 = 1$
$t(t+2) = 0$
$t_1 = 0$; $t_2 = -2$

e) Zeichnung siehe Grafik rechts.



Lösung A7

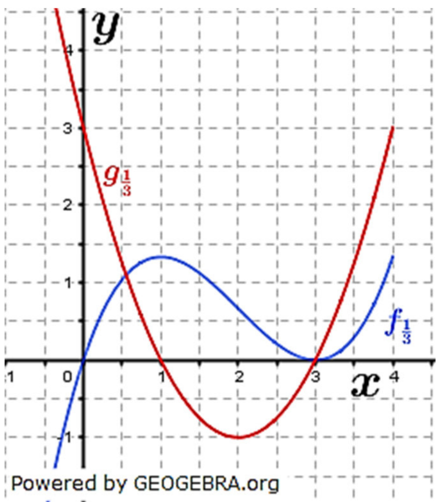
$f_k(x) = \frac{1}{k}x(kx-1)^2$ und $g_k(x) = 3kx^2 - 4x + \frac{1}{k}$

a) Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f_k
$N_1(0|0)$ einfache Nullstelle
$(kx-1)^2 = 0 \quad ==> \quad x = \frac{1}{k}$;
$N_2\left(\frac{1}{k}\middle|0\right)$ doppelte Nullstelle.

b) Nullstellen von g_k in Abhängigkeit von k, Intervall in dem $g_k \leq 0$ gilt:
$3kx^2 - 4x + \frac{1}{k} = 0$ | $:3k$
$x^2 - \frac{4}{3k}x + \frac{1}{3k^2} = 0$
$x_{1,2} = \frac{2}{3k} \pm \sqrt{\frac{4}{9k^2} - \frac{1}{3k^2}}$ | p/q-Formel
$= \frac{2}{3k} \pm \sqrt{\frac{1}{9k^2}} = \frac{2}{3k} \pm \frac{1}{3k}$
$x_1 = \frac{1}{k}$; $x_2 = \frac{1}{3k}$
Wegen $k > 0$ ist g_k eine nach oben geöffnete Parabel. $g_k(x)$ ist somit zwischen den beiden Nullstellen kleiner als Null:
$g_k(x) < 0$ in $I =]\frac{1}{3k}; \frac{1}{k}[$.

c) Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunktes:
$f_k(x) \cap g_k(x)$
Aus Teilaufgabe a) und b) ergibt sich eine gemeinsame Nullstelle bei $x_0 = \frac{1}{k}$.
k für $x_0 = 3$:
$3 = \frac{1}{k} \quad ==> \quad k = \frac{1}{3}$

d) Zeichnung siehe Grafik rechts.



Lösung A8

$f_t(x) = t(x^3 + (t-4)x^2 + 4(1-t)x + 4t)$

a) Nachweis Nullstelle bei $x_0 = 2$

$t(2^3 + (t-4)2^2 + 4(1-t)2 + 4t) = 0$ | Punktprobe mit $P(2|0)$

$t(8 + 4t - 16 + 8 - 8t + 4t) = 0$

$0 = 0$

b) $f_t(x) = t(x^3 + (t-4)x^2 + 4(1-t)x + 4t) = t(x^3 + t^2x^2 - 8tx + 16x^2 + 4x - 4tx + 4t)$

$f_t(x) = t(x^3 + (t-4)x^2 + (4-4t)x + 4t)$

$x^3 + (t-4)x^2 + (4-4t)x + 4t : (x-2) = x^2 + (t-2)x - 2t$

$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$

$(t-2)x^2 + (4-4t)x$

$\underline{-(t-2)x^2 - 2(t-2)x)}$

$-2tx + 4t$

$\underline{-(-2tx + 4t)}$

0

$x^2 + (t-2)x - 2t = 0$

$x_{2,3} = -\frac{t-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t-2}{2}\right)^2 + 2t} = -\frac{t-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(t-2)^2}{4} + \frac{8t}{4}}$

$x_{2,3} = -\frac{t-2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 8t} = -\frac{t-2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(t+2)^2}$

$x_{2,3} = -\frac{t-2}{2} \pm \frac{t+2}{2}$

$x_2 = \frac{-(t-2)+t+2}{2} = 2$

$x_3 = \frac{-(t-2)-t-2}{2} = -t$

$x^2 + (t-2)x - 2t = (x-2)(x+t)$

$f_t(x) = t \cdot (x-2)(x+t)(x-2)) = t \cdot (x-2)^2(x+t)$

c) Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen von f_t:

Für $t = -2$ ist $N_1(2|0)$ dreifache Nullstelle.

Für $t \neq -2$ ist $N_1(2|0)$ doppelte Nullstelle und $N_2(-t|0)$ einfache Nullstelle.

d) t für $f_t(1) = 2$:

$f_t(1) = 2 = t \cdot (1-2)^2(1+t) = t(1+t)$

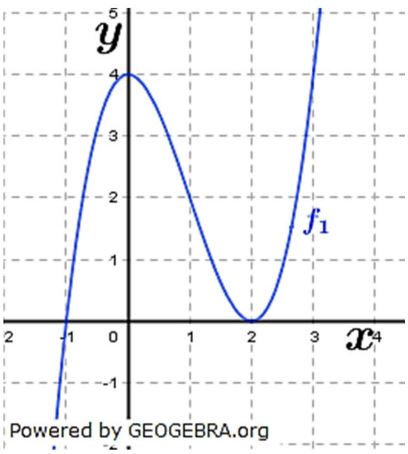
$t^2 + t - 2 = 0$

$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$ | p/q-Formel

$t_1 = 1;\quad t_2 = -2$

f_1 bzw. f_{-2} enthält den Punkt $P(1|2)$.

e) Zeichnung siehe Grafik rechts.



Level 3 – Fortgeschritten – Blatt 3
Dokument mit 21 Aufgaben

Aufgabe A1

Die (theoretische) Leistung P einer Windkraftanlage hängt von der Windgeschwindigkeit v ab und kann mit $P(v) = 0{,}25v^3;\ v > 0$ berechnet werden. Dabei ist v die Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$, P die Leistung in kW.

a) Berechne für verschiedene Windgeschwindigkeiten bis $20\frac{m}{s}$ die Leistung der Anlage.

b) Wie verändert sich die Leistung, wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt?

c) Ein Haushalt benötigt eine Leistung von 11 kW. Wie viele Haushalte können mit dieser Anlage bei $v = 6{,}4\frac{m}{s}$ mit Strom versorgt werden?

d) Der Wirkungsgrad einer Anlage ist der Quotient aus der tatsächlich erbrachten Leistung und der theoretischen Leistung.
Die Tabelle gibt die erbrachte Leistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit an. Berechnen Sie den jeweiligen Wirkungsgrad. Bei welcher Geschwindigkeit hat man den besten Wirkungsgrad?

v in ms^{-1}	5	8	10	14
Erbrachte Leistung P in kW	12	59	120	298

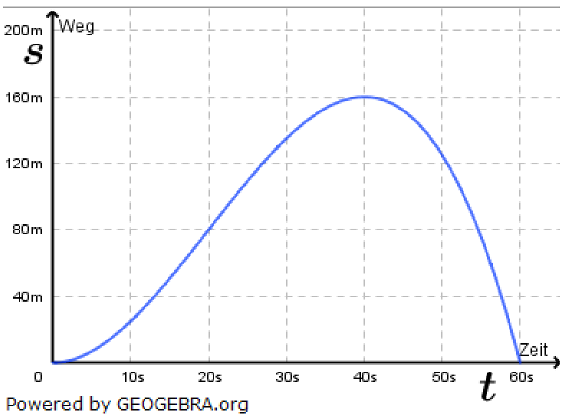
Aufgabe A2

Ein Hundehalter plaudert auf dem Feld mit einem Bauer. Sein Hund rennt ihm davon. Das Diagramm zeigt den Weg s in m als direkte Entfernung von Hund und Herr.

a) Interpretiere das Diagramm.

b) Gib den Funktionsterm der Weg-Zeit-Funktion s in Abhängigkeit von t an.

c) Wie weit ist der Hund nach 20 Sekunden von seinem Herrn entfernt? Wie lange ist der Hund mehr als 100 m von seinem Herrn entfernt?



Aufgabe A3

Die Fixkosten für die Produktion einer Ware belaufen sich auf 300 Geldeinheiten (GE). Werden 10 Mengeneinheiten (ME) der Ware hergestellt, erhöhen sich die Gesamtkosten um 300 GE. Bei 20 ME betragen die Gesamtkosten 900 GE.

a) Prüfe, ob die Gesamtkosten durch die Kostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 300$ richtig beschrieben werden.

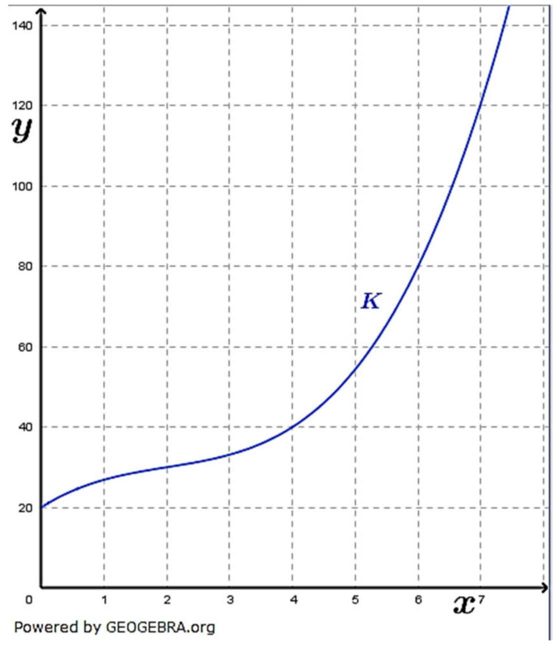
b) Bestimme den mittleren Kostenzuwachs im Intervall $[0; 10]$.

c) Der Verkaufspreis pro ME wird auf 60 € festgelegt. In welchem Bereich wird dann mit Gewinn produziert?

d) Für welche Produktionsmengen entsteht ein Gewinn von 200 GE?

Aufgabe A4

Ein Unternehmen berechnet seine Gesamtkosten mit Hilfe der Funktion K. Ihr Graph ist im Folgenden gegeben.
Zeichne in die Abbildung den Graphen einer linearen Erlösfunktion so ein, dass zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze ungefähr 3 ME liegen.
Lies die Nutzenschwelle und Nutzengrenze aus dem Schaubild ab.
Welcher Preis wird dann pro ME verlangt?



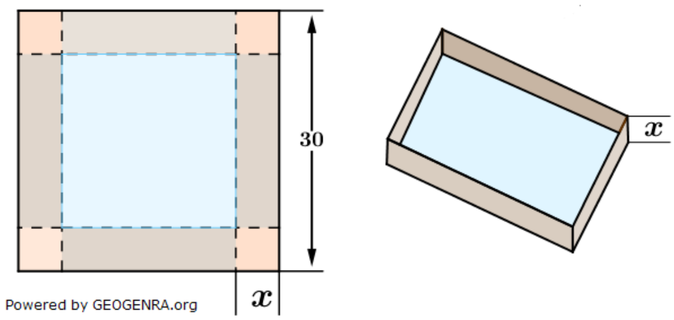
Aufgabe A5

Aus einem quadratischen Karton der Seitenlänge 30 cm wird durch Falten eine Schachtel ohne Deckel mit der Höhe x geformt.

a) Zeige, dass man nur für $0 < x < 15$ eine solche Schachtel formen kann.

b) Bestimme einen Funktionsterm, der das Volume V in Abhängigkeit der Höhe x bestimmt.

c) Bestimme das maximale Volumen der Schachtel.



Aufgabe A6

Die Stromgewinnung aus Windkraft nimmt neben der aus Wasserkraft immer mehr an Bedeutung. Die installierte Leistung in Megawatt (MW) lässt sich aus der Tabelle entnehmen.

Jahr	1994	1998	2002	2004
Leistung	640	2875	12000	16600

a) Stellen Sie die Entwicklung grafisch dar. Bestimmen Sie eine geeignete Funktion, die die Entwicklung beschreibt.

b) Erstellen Sie eine Prognose für die Jahre 2007 und 2010. Vergleichen Sie die Funktionswerte mit der installierten Leistung von $20.000\ MW$ in 2007 und dem Ziel von $30.000\ MW$ in 2010.

Aufgabe A7

Die Gesamtkosten K eines Betriebses lassen sich durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades berechnen.

Produktionsmenge x in ME	0	2	4	6
Gesamtkosten in GE	18	30	42	102

Bestimmen Sie den Funktionsterm aus der Tabelle. Zeichnen Sie das Schaubild von K. Bestimmen Sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn, wenn der Verkaufspreis je ME konstant bei 15 GE liegt.

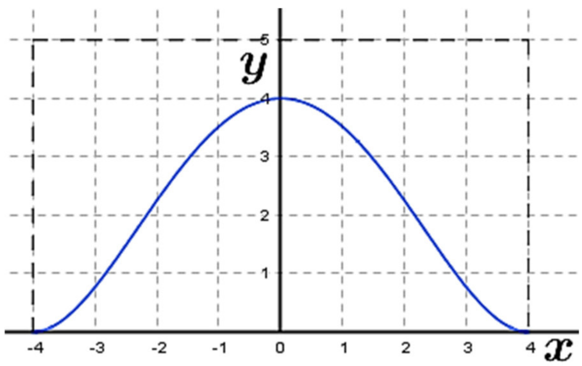
Aufgabe A8

Die Abbildung zeigt den Giebel eines Barock-Hauses (Maße in m).

a) Begründe, dass es sich bei der Randfunktion um eine ganzrationale Funktion 4. Grades handelt.

b) Bestimme den Funktionsterm.

c) Ein Fenster der Höhe $2{,}25\ m$ soll in den Giebel eingepasst werden. Wie breit kann es höchstens sein?



Powered by GEOGEBRA.org

Lösung A1

a)

v in ms^{-1}	3	5	8	10	14	20
$P(v)$ in kW	6,75	31,25	128	250	686	2000

b) Die Leistung verachtfacht sich, da $(2v)^3 = 8v^3$.

c) Leistung bei $v = 6{,}4$: $P(6{,}4) = 65{,}536$
Anzahl der Haushalte: $n = \frac{65{,}536}{11} = 5{,}96$
Es können maximal 6 Haushalte versorgt werden.

d)

v in ms^{-1}	5	8	10	14
Wirkungsgrad	$\frac{12}{31{,}25} = 0{,}384$	$\frac{59}{128} = 0{,}461$	$\frac{120}{250} = 0{,}48$	$\frac{298}{686} = 0{,}434$

Den besten Wirkungsgrad erzielt man bei einer Windgeschwindigkeit von ca. $10\,\frac{m}{s}$.

Lösung A2

a) Die maximale Entfernung des Hundes zum Herrn wird nach 40 Sekunden erreicht und beträgt 160 m. Nach 60 Sekunden ist der Hund wieder bei seinem Herrn.

b) Aus dem Diagramm lassen sich 4 Punkte ablesen: $(0|0)$, $(20|80)$, $(40|160)$ und $(60|0)$. Mit vier gegebenen Punkten lässt sich eine ganzrationale Funktion 3. Grades aufstellen.
Es gibt drei Lösungsansätze:

1. Ansatz: über Punktproben ein LGS erstellen.
   I) $20^3a + 20^2b + 20c = 80$
   II) $40^3a + 40^2b + 40c = 160$
   III) $60^3a + 60^2b + 60c = 0$
   Auflösung mit dem GTR ergibt $a = -\frac{1}{200}$; $b = \frac{3}{10}$; $c = 0$.
2. Ansatz: über Regressionsfunktion eines GTR/WTR ***CubicReg***. Liefert dieselben Ergebnisse.
3. Ansatz: Produktansatz $s(t) = at^2(t-60)$, da $t = 0$ doppelte Nullstelle und $t = 60$ einfache Nullstelle. Dann Punktprobe mit $(20|80)$ ergibt $a = -\frac{1}{200}$.

c) Aus $s(20) = 80$ folgt: der Hund ist nach 20 Sekunden 80 m von seinem Herrn entfernt.
Bedingung für den Zeitpunkt t: $s(t) = 100$, eine Parallele g zur s–Achse. Die Entfernung > 100 m liegt zwischen den Schnittpunkten von g und $s(t)$. Lösungen mit dem GTR sind $t_1 = 23{,}4$ und $t_2 = 52{,}8$.
Etwa zwischen $23\,s$ und $53\,s$ (also ca. 30 Sekunden lang) ist der Hund mehr als $100\,m$ von seinem Herrn entfernt.

Lösung A3

a) $K(0) = 300;\quad K(10) = 600;\quad K(20) = 900$. Alle Bedingungen sind erfüllt.

b) Mittlerer Kostenzuwachs auf $[0; 10]$:

$\frac{K(10)-K(0)}{10} = \frac{600-300}{10} = 30$

Der mittlere Kostenzuwachs beträgt 60 GE pro ME.

c) Erlösfunktion: $E(x) = 60x$

Bereich, in dem mit Gewinn produziert wird:

$E(x) \cap K(x)$

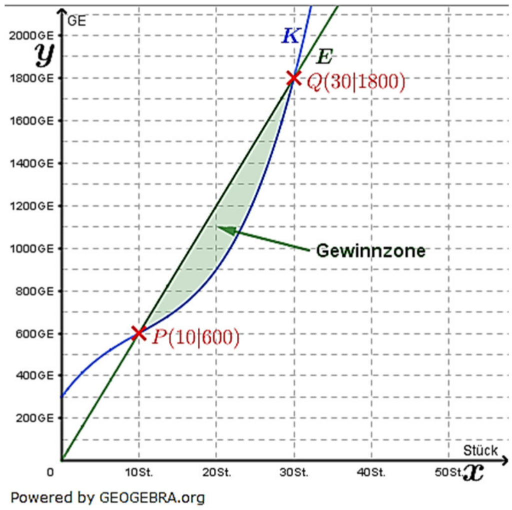
$\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 300 = 60x \quad | \quad -60x$

$\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 - 10x + 300 = 0$

Lösung mit dem GTR/WTR liefert

$x_1 \approx 10;\quad x_2 \approx 30$

Die Gewinnzone liegt bei $10 < x < 30$.



d) Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 60x - \left(\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 300\right) = 200$

$60x - \left(\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 300\right) = 200 \quad | \quad -200$

$-\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 10x - 500 = 0$

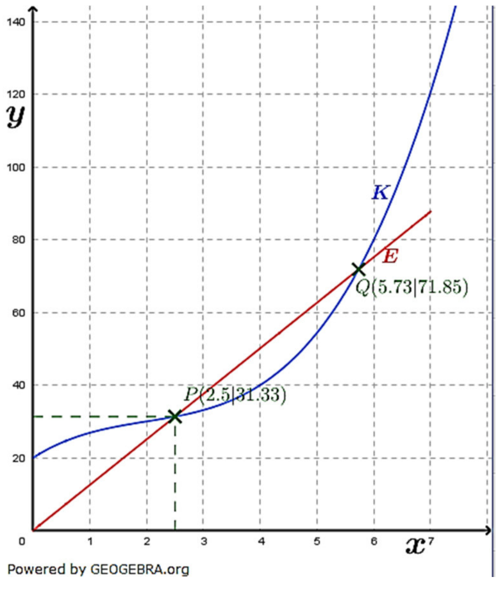
Lösung mit dem GTR/WTR liefert $x_1 = 15{,}4$ und $x_2 = 26{,}75$.

Lösung A4

Nutzenschwelle bei $x_1 = 2{,}5$.

Nutzengrenze bei $x_2 = 5{,}5$.

Preis je Mengeneinheit: $\frac{K(5{,}5)}{5{,}5} = \frac{70}{5{,}5} = 12{,}70$



Lösung A5

a) x muss positiv und kleiner sein als die Hälfte der Seitenlänge ($30\,cm$), also $0 < x < 15$.

b) Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche: $(30 - 2x)$; die Höhe: x.

Volumen: $G \cdot h = V(x) = x \cdot (30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

c) Maximales Volumen mit dem WTR/GTR: $V(5) = 2000\ cm^3$

Lösung A6

a) Über den WTR/GTR mit Aufstellung einer Regressionstabelle mit dem Jahr 1994 als $t = 0$ erhalten wir:

t	0	4	8	10
$L(t)$	640	2875	12000	16600

Da wir nur vier Messpunkte haben, müssen wir uns auf eine kubische Regression beschränken. Der WTR/GTR liefert:

$a = -21{,}2;\ \ b = 469{,}9;\ \ c = -981{,}5;\ \ d = 640$

$L(t) = -21{,}2t^3 + 469{,}9t^2 - 981{,}5t + 640.$

b) 2007: $L(13) = 20682$

2010: $L(16) = 18328$

Die Funktion ist geeignet bis $t = 13$ danach fallen die Funktionswerte.

Lösung A7

Mit der Regressionstabelle und dem WTR/GTR erhalten wir:

x	0	2	4	6
$K(x)$	18	30	42	102

$a = 1;\ \ b = -6;\ \ c = 14;\ \ d = 18$

$K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18.$

Die Erlösfunktion lautet:

$E(x) = 15x$

Rote Kurve = $E(x)$

Blaue Kurve = $K(x)$

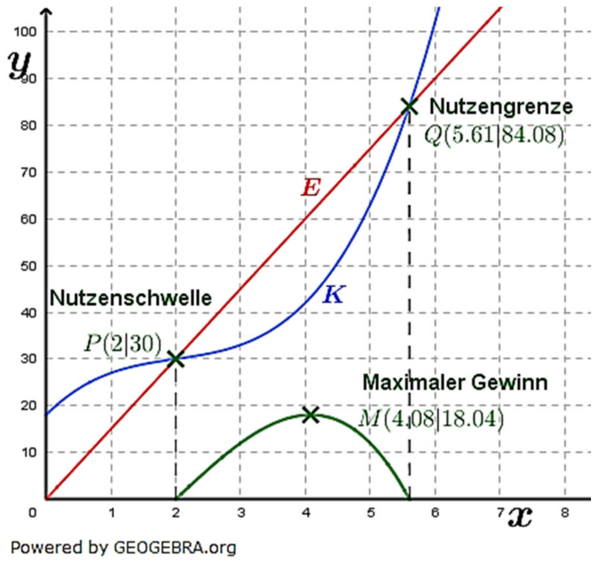
Grüne Kurve = $G(x) = E(x) - K(x)$

Nutzenschwelle ist 2 PE;

Nutzengrenze ist 5,6 PE;

Gewinnzone ist $2 < x < 5{,}6$;

Maximaler Gewinn: 18 GE bei 4,1 PE.



Lösung A8

a) Die Kurve berührt die x–Achse in $x = 4$ und $x = -4$. Zwei Berührpunkte mit der x–Achse erfordern eine ganzrationale Funktion 4. Grades.

b) Über die Nullstellengleichung erhalten wir:

$f(x) = a(x + 4)^2(x - 4)^2.$

Der Graph der Funktion schneidet die y–Achse in $S_y(0|4)$. Durch Ausmultiplizieren der Nullstellengleichung erhalten wir ein absolutes Glied von $4^2 \cdot 4^2 \cdot a = 256a$. Dies bedeutet $256a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{64}$

Die Funktionsgleichung der Kurve lautet $f(x) = \frac{1}{64}(x + 4)^2(x - 4)^2$.

c) Ansatz: $f(x) = 2{,}25$

$\frac{1}{64}(x + 4)^2(x - 4)^2 - 2{,}25 = 0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

Das Fenster kann höchstens 4 m breit sein.

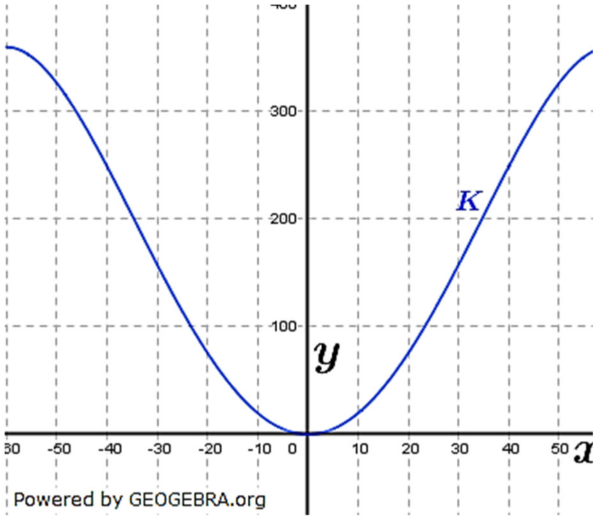
Level 3 – Fortgeschritten – Blatt 4
Dokument mit 14 Aufgaben

Aufgabe A1

Die symmetrische Querschnittsfläche eines Gebirgstales lässt sich durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades beschreiben.
Das Tal hat eine Breite von *120 m*, eine größte Höhe von *360 m*. Bei einer Breite von *60 m* wird eine Höhe von *157,5 m* erreicht.

a) Bestimme den Funktionsterm.

b) Ein *250 m* hoher Staudamm soll errichtet werden. Wie breit ist die Dammkrone (auf eine Dezimale gerundet)?



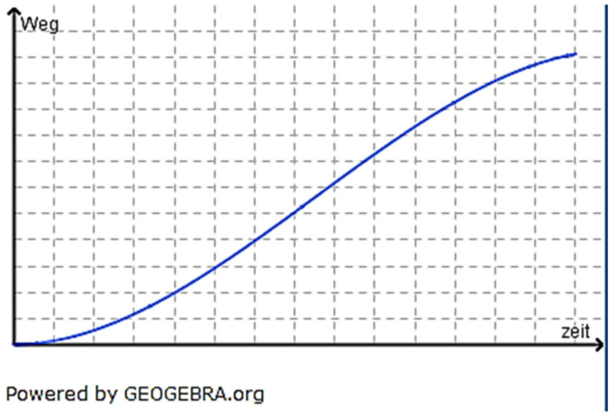
Aufgabe A2

Ein 100-m-Sprint lässt sich durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschreiben.

a) Bestätige, dass die nebenstehende Abbildung das Schaubild von f mit $f(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$ zeigt. Wähle eine geeignete Achseneinteilung.

b) Bestimme die Laufzeit für *100 m* auf eine Zehntelsekunde genau.

c) Bestimme die mittlere Geschwindigkeit des Läufers.



Aufgabe A3

Ein Zug bewegt sich nach folgendem Weg-Zeit-Gesetz:

$s(t) = 5t^4 - 40t^3 + 80t^2;\ \ t \in [0; 4]$ (t in h, s in km)

a) Zeichne das Schaubild der Funktion $s(t)$. Interpretiere den Verlauf.

b) Bestimme die maximale Entfernung des Zuges vom Ausgangspunkt.

c) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Zuges im Zeitintervall $[0; 2]$.

Aufgabe A4

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2;\ \ x > 0$ ist näherungsweise die Flugkurve des Balles bei einem Freistoß in einem Fußballspiel.

a) Skizziere das Schaubild von f. Welche maximale Höhe erreicht der Ball?

b) Überfliegt der Ball die Abwehrmauer in *9,15 m* Entfernung?

c) Wo kommt der Ball wieder auf den Boden?

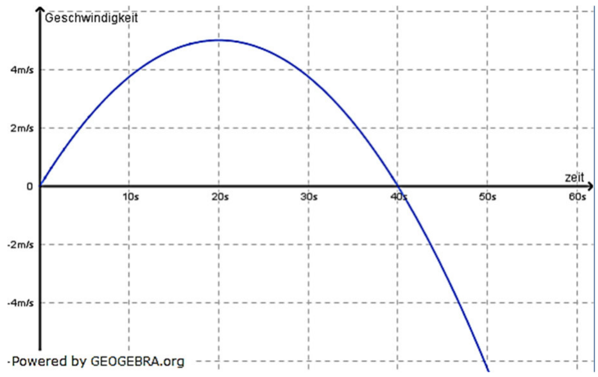
d) Wie weit entfernt vom Tor wurde der direkte Freistoß ausgeführt, wenn der Ball in einer Höhe von *1,75 m* die Torlinie überschreitet?

Aufgabe A5

Ein Hundehalter plaudert auf dem Feld mit einem Bauer. Sein Hund rennt ihm weg. Das Diagramm zeigt die Geschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) des Hundes.

a) Interpretiere das Diagramm.

b) Gib den Funktionsterm der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v in Abhängigkeit von t an.



Lösung A1

a) Wir erkennen einen Berührpunkt mit der x–Achse in $x = 0$. Das Schaubild ist symmetrisch zur y–Achse. Der Ansatz somit $f(x) = ax^4 + cx^2$.
Die Punktprobe mit $A(60|360)$ und $B(30|157{,}5)$ liefert ein LGS aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{I}) & 30^4a + 30^2b = 157{,}5 & | \quad \cdot 2^4 \\ (\mathrm{II}) & 60^4a + 60^2b = 360 & \\ (\mathrm{I}) & 60^4a + 16 \cdot 30^2b = 16 \cdot 157{,}5 & \\ (\mathrm{II}) & \underline{60^4a + 60^2b = 360} & \\ (\mathrm{II})\text{-}(\mathrm{I}) & 3600b - 14400b = -2160 & \\ & -10080b = -2160 & | \quad :(-10080) \\ & b \approx 0{,}2 & \\ b \to (I) & 810000a + 180 = 157{,}5 & | \quad -180 \\ & 810000a = -22{,}5 & | \quad :810000 \\ & a = -\frac{1}{36000} & \end{array}$$

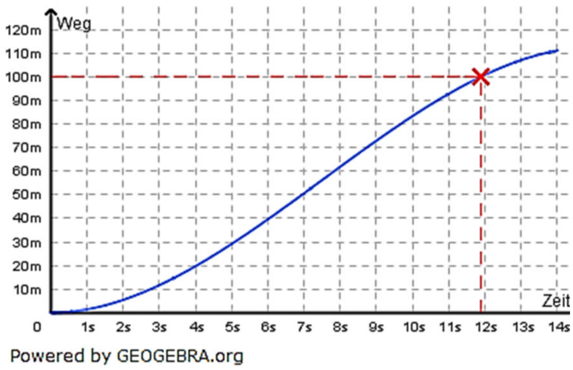
$f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + 0{,}2x^2$

b) Ansatz: $f(x) = 250$
$-\frac{1}{36000}x^4 + 0{,}2x^2 - 250 = 0$
$x_1 = 40{,}125 \quad x_2 = - - 40{,}125$
Die Dammkrone hat eine Breite von 80,25 m.

Lösung A2

a) Das Schaubild berührt die x–Achse in 0. Es handelt sich um eine ganzrationale Funktion 3. Grades, also $s(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$.

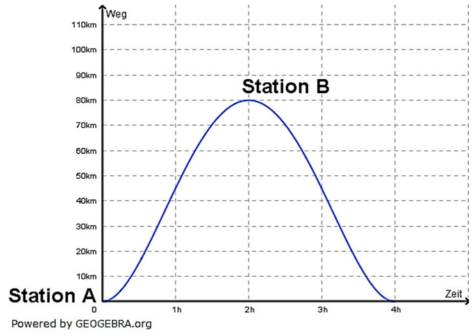
b) Ansatz: $s(t) = 100$
$-\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 100 = 0$
Die Lösung mittels WTR/GTR ergibt $t = 11{,}89$.
Die Laufzeit für 100 m beträgt $11{,}89\ s$.



c) Mittlere Geschwindigkeit des Läufers: $\frac{100m}{11{,}89s} = 8{,}41\ \frac{m}{s}$.

Lösung A3

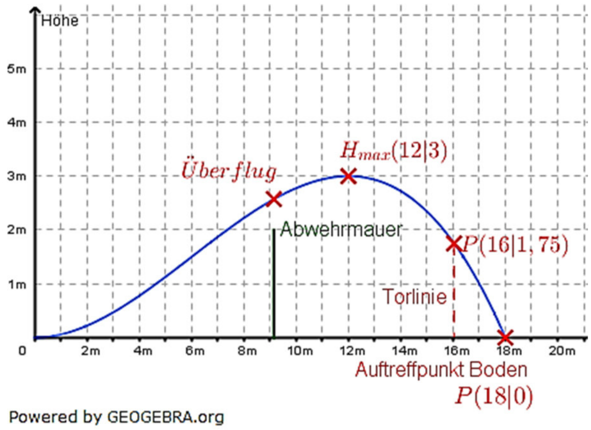
a) Der Zug fährt bei $t = 0$ von der Station A aus zur Station B, die er nach 2 Stunden Fahrtzeit erreicht. Dann fährt er von Station B wieder nach Station A zurück mit einer Gesamtfahrtzeit von 4 Stunden.



b) Maximale Entfernung des Zuges vom Ausgangspunkt in $t = 2$ ist $80\ km$.

c) Mittlere Geschwindigkeit des Zuges im Zeitintervall $[0; 2]$:
$\frac{80km}{2h} = 40\ \frac{km}{h}$.

Lösung A4



a) Für die maximale Höhe liefert der WTR/GTR $h = 3\ m$ bei $x = 12\ m$.

b) $f(9{,}15) = 2{,}57$.
Der Ball überfliegt die Abwehrmauer (ca. 2 m).

c) $f(x) = 0$
$x = 18\ m$
Der Ball kommt nach $18\ m$ wieder auf den Boden.

d) $f(x) = 1{,}75$
Der WTR/GTR liefert $x = 16\ m$.
Das Tor ist 16 m entfernt, also an der Strafraumgrenze.

Lösung A5

a) Der Hund rennt von seinem Herrn weg, nach $20\ s$ hat er die größte Geschwindigkeit von $6\ m/s$ erreicht, nach $40\ s$ dreht er sich um $(v = 0)$ und rennt in Richtung seines Herrn zurück.

b) Aus den Punkten $(0|0)$, $(20|6)$ und $(40|0)$ ergibt sich eine Parabelgleichung $v(t) = -0{,}015t^2 + 0{,}6t$.

Level 3 – Fortgeschritten – Blatt 5

Dokument mit 8 Aufgaben

Das Aufgabenblatt enthält Aufgaben zum Thema „Gegenseitige Lage" ganzrationaler Funktionen.

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2;\ \ x \in \mathbb{R}$.

Bestimme die Ursprungsgerade, die das Schaubild K von f außerhalb des Ursprungs berührt. Gib den Berührpunkt an.

Aufgabe A2

Gegeben sind die Funktion f und g mit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ und $g(x) = x^4 + x^2 + 1;\ \ x \in \mathbb{R}$.

Mache Aussagen über die gegenseitige Lage der zugehörigen Kurven.
Bestätige deine Aussage durch Rechnung.

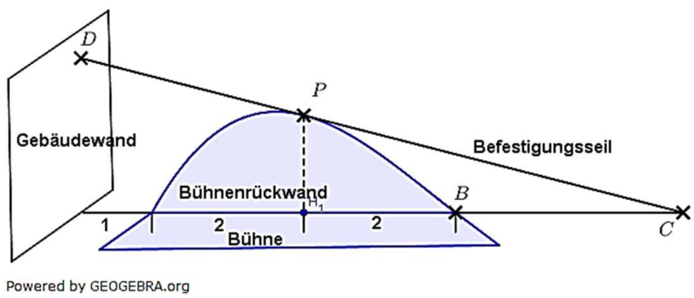
Aufgabe A3

K ist das Schaubild von f mit $f(x) = x^2(x-3);\ x \in \mathbb{R}$.

Untersuche die gegenseitige Lage von K und G von g mit $g(x) = ax^2$ in Abhängigkeit von a.

Aufgabe A4

Für ein Openair-Konzert soll rechts neben einer Gebäudewand eine Bühne errichtet werden. Die Bühnenrückwand soll die Form eines Bogens haben (siehe Abbildung).



In einem geeigneten Koordinatensystem wird der Bogen durch den im I. Quadranten verlaufenden Teil der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40)$, ($1\,LE\ \hat{=}\ 1\,m$) beschrieben.

Zur Sicherung der Bühnenkonstruktion wird ein Seil vom Punkt D in $8\,m$ Höhe an der Gebäudewand zum Punkt C auf dem Erdboden gespannt. Das Seil berührt die Bühnenrückwand im Punkt P.

a) Wie muss das Koordinatensystem hinzugefügt werden? Begründe deine Ihre Wahl.

b) Bestimme die Koordinaten von P.

c) Berechne, in welcher Entfernung zum rechten Bühnenrand B sich der Befestigungspunkt C befindet.

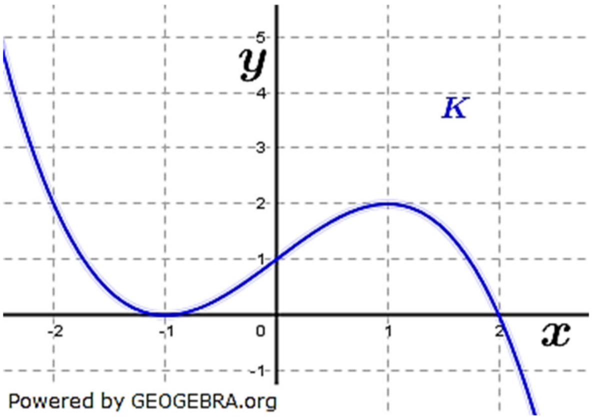
d) Bei der rechnerischen Bestimmung von P ergab sich eine doppelte Schnittstelle in $x = 3$. Formuliere einen möglchen Ansatz und interpretiere die Lösung.

Aufgabe A5

Die Grafik rechts zeigt einen Ausschnitt aus dem Graphen K von f mit

$$f(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2);\ x \in \mathbb{R}.$$

Ermittle a, x_1 und x_2 aus der Abbildung.
Welche Paralellen zur x-Achse haben mit f einen, zwei oder drei gemeinsame Punkte?



Lösung A1

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$

Ursprungsgerade $g(x) = m \cdot x$

$f \cap g$

$-\frac{1}{4}x^3 + x^2 = mx$

$-\frac{1}{4}x^3 + x^2 - mx = 0$

$x\left(-\frac{1}{4}x^2 + x - m\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$ | einfache Schnittstelle

$-\frac{1}{4}x^2 + x - m = 0$ | $\cdot (-4)$

$x^2 - 4x + 4m = 0$

$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 4m}$ | p/q-Formel

Die SAchnittstelle soll Berührpunkt – doppelte Schnttstelle – sein, somit muss der Ausdruck unter der Wurzel (Diskriminante) gleich null sein:

$4 - 4m = 0 \ ==> \ m = 1$

Die Ursprungsgerade $g(x) = x$ berührt f im Punkt $B(2|2)$.

Lösung A2

$f(x) = x^4 - x^3 + 1; \quad g(x) = x^4 + x^2 + 1$

Die beiden Funktionen sind nach oben geöffnete ganzrationale Funktionen 4. Grades mit einem gemeinsamen Punkt auf der y-Achse in $S_y(0|1)$. Alle weiteren Aussagen nur über Berechnung möglich.

$f \cap g$

$x^4 - x^3 + 1 = x^4 + x^2 + 1$

$-x^3 - x^2 = 0$

$x^2(-x - 1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$

$x_3 = -1$

Dier beiden Funktionen f und g berühren sich im Punkt $S_1(0|1)$ und schneiden sich im Punkt $S_2(-1|3)$.

Lösung A3

$f(x) = x^2(x - 3); \quad g(x) = ax^2$

$f \cap g$

$x^2(x - 3) = ax^2$

$x^3 - 3x^2 - ax^2 = 0$

$x^2(x - (3 + a)) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$ | doppelte Schnittstelle Berührpunkt

$x_3 = 3 + a$

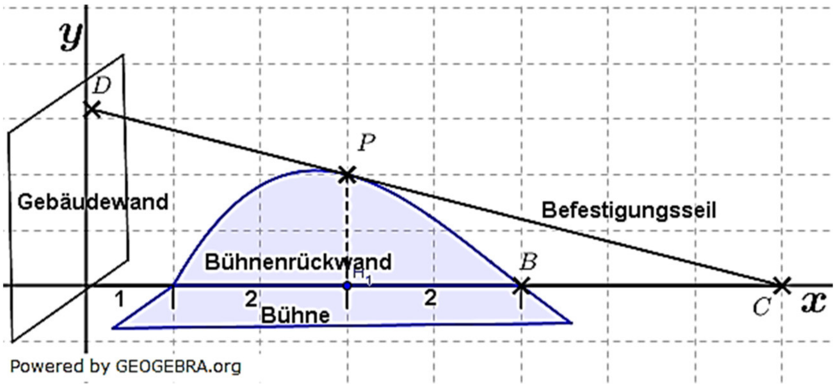
$g(3 + a) = a(3 + a)^2 = (3a^2 + a^3)^2$

Für $a = -3$ fällt x_3 mit $x_{1,2}$ zusammen und bilden eine dreifache Schnittstelle in $S_1(0|0)$.

Für $a \neq -3$ ist $x_3 = 3 + a$ einfache Schnittstelle mit $S_2(3 + a|(3a^2 + a^3)^2)$.

Lösung A4

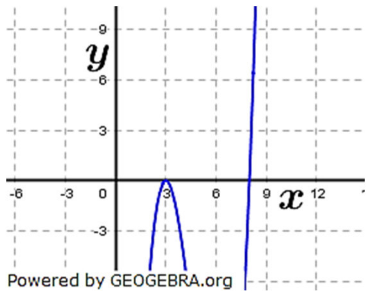
a) Wahl des Koordinatensystems siehe Grafik.



b) P hat die Koordinanten
$P(3|f(3))$.
$f(3) = 5$
$P(3|5)$.

c) Gerade durch P und D:
$g(x) = m \cdot x + c$
$m = \frac{y_D - y_P}{x_D - x_P} = \frac{8-5}{0-3} = -1$
$g(x) = -x + 8$.
Nullstelle von g:
$g(x) = 0 \;\; ==> \;\; x = 8$
Entfernung C von B:
$d_{\overline{BC}} = x_C - x_B = 8 - 5 = 3$
Der Befestigungspunkt C ist $3\,m$ vom rechten Bühnenrand entfernt.

d) $f \cap g$
$\frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40) = -x + 8$
$\frac{1}{4}x^3 - 3{,}5x^2 + \frac{57}{4}x - 18 = 0$
$x^3 - 14x^2 + 57x - 72 = 0$
$x_{1,2} = 3$
$N_1(3|0)$ ist doppelte Nullstelle.
Hieraus folgt, dass das Befestigungsseil die Bühnenrückwand im Punkt P berührt.



Lösung A5

$x_1 = -1$, da dort doppelte Nullstelle (Berührpunkt mit der -Achse).
$x_2 = 2$, da dort einfache Nullstelle.
$a(1+2)^2(1-2) = 2$ | Punktprobe mit $H(1|2)$
$-3a = 2$
$a = -\frac{2}{3}$
$f(x) = -\frac{2}{3}(x+1)^2(x-2)$
Parallelen zur x-Achse:
Alle Parallelen mit $y < 0$ sowie $y > 2$ haben einen Schnittpunkt mit f.
Die Parallelen mit $y = 0$ sowie $y = 2$ haben zwei Schnittpunkte mit f.
Alle Parallelen mit $y = a;\;\; 0 < a < 2$ haben drei Schnittpunkte mit f.