Definition des Begriffs „Funktion"

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, *x*-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, *y*-Wert) zuordnet.

Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen sind zusammengesetzte Funktionen, deren einzelne Glieder wiederum aus Potenzfunktionen mit ganzzahlig positivem Exponenten bestehen.
Die allgemeinen Form einer Ganzrationalen Funktion lautet:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

n ist höchste Potenz, $n-1$ ist die um 1 verminderte höchste Potenz, $n-2$ die um 2 verminderte höchste Potenz usw. bis zur Potenz 1 bei $a_1 x$. Am Ende der Funktionsgleichung steht dann das absolute Glied a_0.
Die a-Werte in der Gleichung werden als Koeffizienten bezeichnet. Alle a sind Element von $\mathbb{R}$. Die Indices von a_n, a_{n-1}, a_{n-2} usw. verweisen auf die Teilfunktion mit dem entsprechenden n als Exponenten.

Klassifizierung ganzrationaler Funktionen, Definitionsmenge

Entsprechend der höchsten Potenz n von x wird den ganzrationalen Funktionen ein Grad zugesprochen. Ist $n = 3$, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Ist $n = 4$, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 4. Grades.
Ganzrationale Funktionen werden auch Polynome oder (seltener für Funktionen mit einem Grad größer 2) Parabeln genannt.
Auch die lineare Funktion g mit $g(x) = mx + c$ zählt zu den ganzrationalen Funktionen, sie ist vom Grad 1.
Der Nullfunktion f mit $f(x) = 0$ (für alle reellen Werte von x) wird kein Grad zugeordnet.
Die maximale Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion ist $\mathbb{R}$.

Merksatz Definition ganzrationaler Funktionen

Eine Funktion f, deren Funktionsgleichung man in der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

schreiben kann, heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades. Dabei sind $a_0, a_1, \ldots a_n$ reelle Zahlen ($a_n \neq 0$). n ist eine natürliche Zahl.

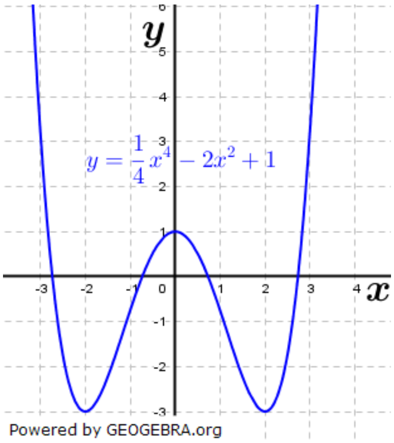
n bestimmt gleichzeitig den Grad der Funktion. Wir sprechen von ganzrationalen Funktionen *n-ten Grades*.

Auswirkung des Exponenten n

Je nachdem ob die höchste Potenz n der Funktions-gleichung gerade oder ungerade ist, hat der Graph einer ganzrationalen Funktion unterschiedlichen Verlauf.

Auswirkung gerader Werte von n.

Wir betrachten eine Funktion mit $n = 4$.
Der Graph der rechts dargestellten Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$. Gemäß der Klassifizierung von zuvor handelt es sich um eine ganzrationale Funktion *4. Grades*.



Wir wollen uns nun anhand des Funktionsterms ein ungefähres Bild vom Verlauf des Graphen der ganzrationalen Funktion machen.
Dazu untersuchen wir zunächst, wie sich die Funktion für sehr große und sehr kleine Werte von x verhält.
Eine Auswahl entsprechender Werte findet sich in nachfolgender Tabelle.

x	-1000000	-100000	-1000	0	1000	100000	1000000
$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$	$5 \cdot 10^{23}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{11}$	2	$5 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{23}$
$\frac{1}{2}x^4$	$5 \cdot 10^{23}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{11}$	2	$5 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{23}$

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung währen in der dritten Tabellenzeile nur das erste Glied der Funktionsgleichung berücksichtigt ist.
Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktions-gleichung als auch für die Rumpfgleichung dieselben Werte, was ja auch aus obiger Grafik hervorgeht, der Graph der Funktion verläuft von links oben nach rechts oben.

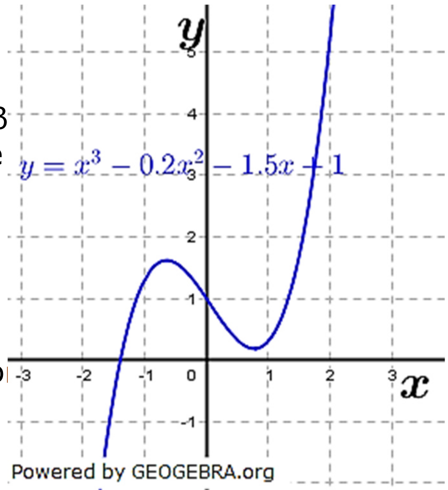
Betrachten wir jetzt das Verhalten von f nahe Null über die nachfolgend aufgeführte Tabelle:

x	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}05$	$0{,}1$
$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$	1,98	1,995	1,9998	2	1,9998	1,995	1,98
$-2x^2 + 2$	1,98	1,995	1,9998	2	1,9998	1,995	1,98

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung während in der dritten Tabellenzeile nur die letzten beiden Glieder der Funktionsgleichung berücksichtigt sind. Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktionsgleichung als auch für die Rumpfgleichung dieselben Werte. Das Verhalten nahe Null wird somit nur durch die letzten beiden Glieder beeinflusst.

Auswirkung ungerader Werte von n.

Wir betrachten nun eine Funktion mit $n = 3$.
Der Graph der rechts dargestellten Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 1$. Gemäß der Klassifizierung von zuvor handelt es sich um eine ganzrationale Funktion *3. Grades*.
Wir machen uns wieder anhand des Funktionsterms ein ungefähres Bild vom Verlauf des Graphen dieser ganzrationalen Funktion.



Dazu untersuchen wir wiederum, wie sich die Funktion für sehr große und sehr kleine Werte von x verhält. Eine Auswahl entsprechender Werte findet sich in nachfolgender Tabelle.

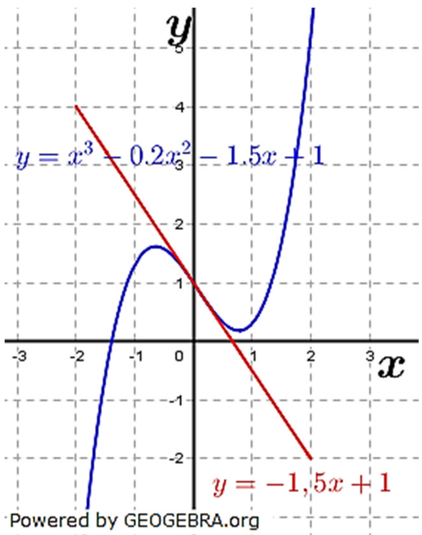
x	-1000000	-100000	-1000	0	1000	100000	1000000
$x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 1$	-10^{18}	-10^{15}	-10^9	2	10^9	10^{15}	10^{18}
x^3	-10^{18}	-10^{15}	-10^9	2	10^9	10^{15}	10^{18}

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung währen in der dritten Tabellenzeile nur das erste Glied der Funktionsgleichung berücksichtigt ist.
Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktions-gleichung als auch für die Rumpfgleichung dieselben Werte. Allerdings im Gegensatz zu geraden Werten von n stellen wir fest, dass, je kleiner der x-Wert wird, umso kleiner wird der $f(x)$-Wert. Und je größer x wird, umso größer wird der $f(x)$-Wert. Der Graph der Funktion verläuft von links unten nach rechts oben.

Betrachten wir jetzt das Verhalten von f nahe Null über die nachfolgend aufgeführte Tabelle:

x	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}05$	$0{,}1$
$x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 1$	$1{,}147$	$1{,}074$	$1{,}015$	1	$0{,}985$	$0{,}925$	$0{,}849$
$-1{,}5x + 1$	$1{,}15$	$1{,}075$	$1{,}015$	1	$0{,}985$	$0{,}925$	$0{,}85$

Die zweite Tabellenzeile enthält die komplette Funktionsgleichung während in der dritten Tabellenzeile nur die letzten beiden Glieder der Funktionsgleichung berücksichtigt sind. Die Berechnung der Funktionswerte zeigt sowohl für die komplette Funktionsgleichung als auch für die Rumpfgleichung ungefähr dieselben Werte. Das Verhalten nahe Null wird somit nur durch die letzten beiden Glieder beeinflusst, wie dies auch aus nebenstehender Grafik hervorgeht.



Fazit:

Wir haben festgestellt, dass das Verhalten ganzrationaler Funktionen für sehr kleine bzw. sehr große Werte von x nur von der ***höchsten*** Potenz von x der Funktionsgleichung beeinflusst wird, alle Glieder der Funktionsgleichung sind nicht von Interesse.
Dagegen ist beim Verhalten nahe Null nur die ***kleinste*** Potenz von x zuzüglich einem eventuell vorhandenen absoluten Glied zuständig. Dies führt uns zu nachfolgendem

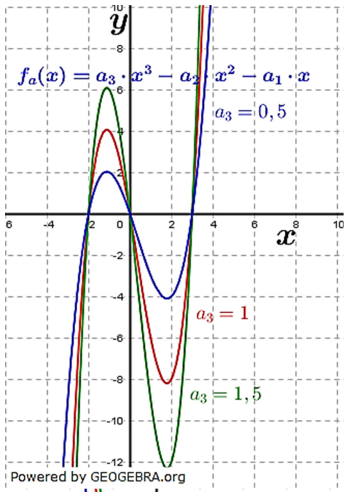
Merksatz Verhalten ganzrationaler Funktionen

Verhalten für $x \to \pm\infty$
Für $x \to \pm\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion vom Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt. Der Graph verhält sich wie der Graph mit der Gleichung $y = a_n x^n$, wobei n der Grad von f ist.

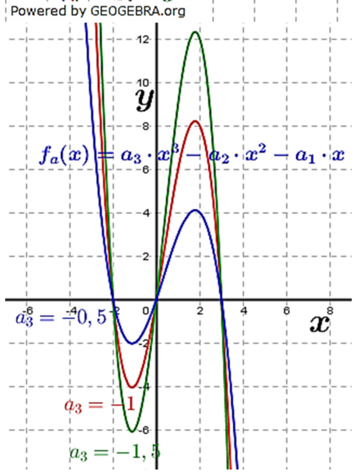
Verhalten für x nahe 0
Für x nahe 0 wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion von den Summanden mit der niedrigsten Potenz bestimmt. Der Graph verhält sich wie derjenige Graph mit der Gleichung $y = a_k x^k + a_0$, wobei k die niedrigste Hochzahl von f ist, die vorkommt.

Auswirkung des Koeffizienten a_n

Der Parameter a_n beeinflusst die Streckung des Graphen der Funktion in y-Richtung.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies anhand der Funktionsgleichung
$f(x) = a_3 \cdot x^3 - a_2 \cdot x^2 - a_1 \cdot x$.



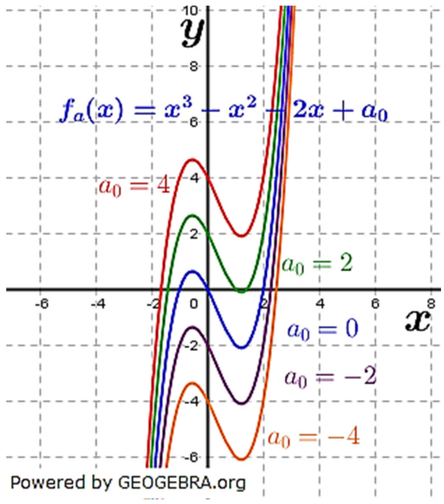
Für den Parameter $a_3 > 0$ gilt:
Ist $0 < a_3 < 1$ wird der Graph in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestaucht.
Ist $a_3 > 1$ wird der Graph in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestreckt.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies mit $a_3 = 0{,}5$, $a_3 = 1$ und $a_3 = 1{,}5$.



Ist hingegen $a_3 < 0$, so gilt:
Ist $-1 < a_3 < 0$ wird der Graph zunächst an der x-Achse gespiegelt und dann in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestaucht.
Ist $a_3 < -1$ wird der Graph zunächst an der x-Achse gespiegelt und dann in y-Richtung mit dem Faktor $k = a_3$ gestreckt.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies mit $a_3 = -0{,}5$, $a_3 = -1$ und $a_3 = -1{,}5$.

Auswirkung des Parameters a_0

Der Parameter a_0 beeinflusst die Verschiebung des Graphen der Funktion in y-Richtung.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies anhand der Funktionsgleichung
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + a_0$.

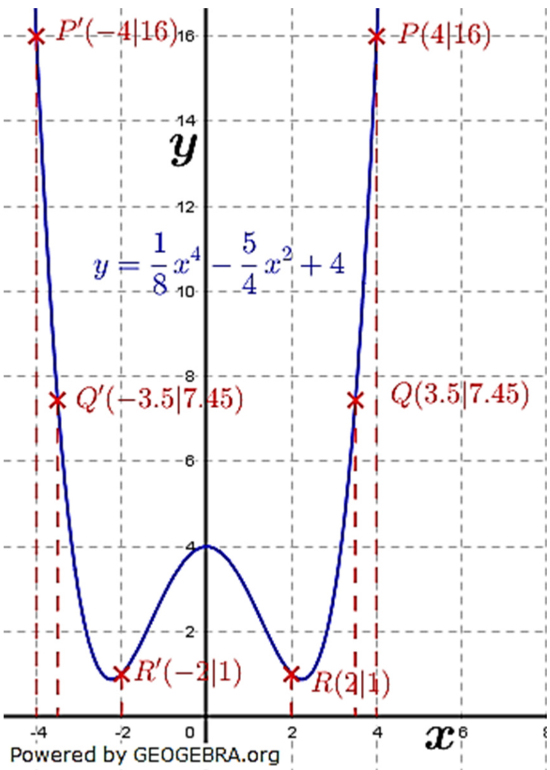


Für den Parameter a_0 gilt:
Der Graph wird in y-Richtung verschoben und zwar um die Anzahl Einheiten deren Wert von a_0 darstellt wird.
Die Funktion schneidet dabei die y-Achse im Punkt $S_y(0|a_0)$, also an der Stelle der y-Achse, die dem Wert von a_0 entspricht.
Der Parameter a_0 wird auch y-Achsenabschnitt genannt (vergleiche lineare Funktionen mit $y = mx + c$ sowie quadratische Funktionen mit $y = ax^2 + bx + c$, das dortige c entspricht dem hiesigen a_0).

Symmetrie

Neben dem Verhalten für $x \to \pm\infty$ und für x nahe 0 haben ganzrationale Funktionen noch weitere Eigenschaften, die das Zeichnen ihrer Graphen erleichtern.
Hier behandeln wir nun zwei grundlegende Symmetrieeigenschaften, nämlich die **Achsensymmetrie** (Symmetrie zu x-Achse) und die **Punktsymmetrie** (Symmetrie zum Ursprung).

Achsensymmetrie
Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 4$. Die rechte Abbildung zeigt den Graphen von f.
Betrachten wir die Punkte P, Q und R sowie deren „Spiegelpunkte" P', Q' und R', so stellen wir fest, dass die jeweiligen y-Werte identisch, die x-Werte die jeweiligen Spiegel an der y-Achse sind.



Wir können hieraus den Merksatz für die Achsensymmetrie herleiten, nämlich

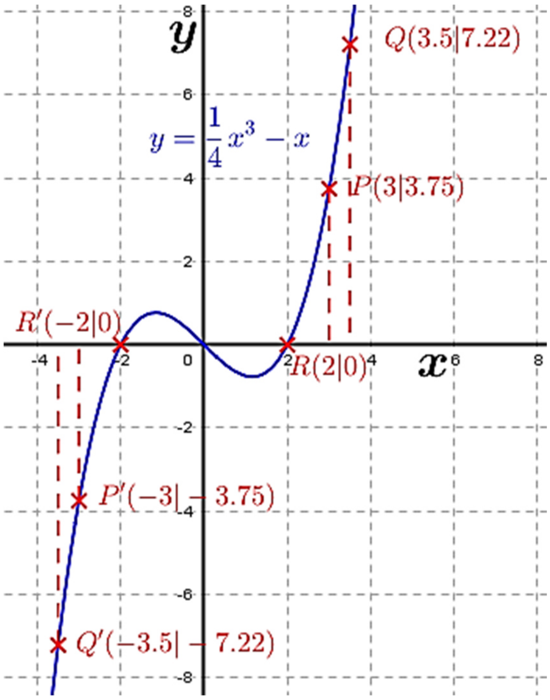
Merksatz Achsensymmetrie

Der Graph einer Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie

Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$. Die rechte Abbildung zeigt den Graphen von f.
Betrachten wir die Punkte P, Q und R sowie deren „Spiegelpunkte" P', Q' und R', so stellen wir fest, dass die jeweiligen y-Werte die Spiegel an der x-Achse, die x-Werte die jeweiligen Spiegel an der y-Achse sind.
Wir können hieraus den Merksatz für die Punktsymmetrie herleiten, nämlich



Merksatz Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung $O(0|0)$, wenn für alle $x\in\mathbb{D}$ gilt:

$$-f(-x)=f(x)$$

Hinweis:
Im Schulbetrieb wird eigentlich gelehrt, dass *f(-x)=-f(x)* ist. Die hier aufgeführte Regel mit *-f(-x)=f(x)* ist identisch, denn die Multiplikation von *f(-x)=-f(x)* mit *-1* führt ja zu *-f(-x)=f(x)*. Letztere Formel führt jedoch zu einfacheren Berechnungen, wenn Symmetrie rechnerisch nachgewiesen werden soll.

Beispiele

Beispiel 1: Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x)=4x^6-3x^4+2$. Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 1: Wir bilden $f(-x)$:
$f(-x)=4\cdot(-x)^6-3\cdot(-x)^4+2$ | Auflösung der Klammern
$f(-x)=4x^6-3x^4+2=f(x)$
Die Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse wegen
$f(-x)=f(x)$

Beispiel 2: Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x)=3x^5-2x^3+x$. Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 2: Wir bilden zunächst $f(-x)$:
$f(-x)=3\cdot(-x)^5-2\cdot(-x)^3-x$ | Auflösung der Klammern
$f(-x)=-3x^5+2x^3-x\neq f(x)$
Die Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse wegen
$f(-x)\neq f(x)$
Wir bilden $-f(-x)$:
$-f(-x)=3x^5-2x^3+x=f(x)$
Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung wegen
$-f(-x)=f(x)$

Beispiel 3: Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x)=3x^4-2x^2+x$.
Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 3: Wir bilden zunächst $f(-x)$:
$f(-x)=3\cdot(-x)^4-2\cdot(-x)^2-x$ | Auflösung der Klammern
$f(-x)=3x^4-2x^2-x\neq f(x)$
Die Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse wegen $f(-x)\neq f(x)$
Wir bilden zunächst $f(-x)$:
$-f(-x)=-(3x^4-2x^2-x)=-3x^4+2x^2+x\neq f(x)$
Die Funktion f ist weder achsen- noch punktsymmetrisch wegen $f(-x)\neq f(x)\wedge -f(-x)\neq f(x)$.

Beispiel 4 Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit $f(x)=3x^3-2x+5$.
Prüfe auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

Lösung 4: Wir bilden zunächst $f(-x)$:
$f(-x)=3\cdot(-x)^3-2\cdot(-x)+5$ | Auflösung der Klammern
$f(-x)=-3x^3+2x+5\neq f(x)$
Die Funktion f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse wegen $f(-x)\neq f(x)$
Wir bilden $-f(-x)$:
$-f(-x)=-(-3x^3+2x+5)=3x^3-2x-5\neq f(x)$
Die Funktion f ist weder achsen- noch punktsymmetrisch wegen $f(-x)\neq f(x)\wedge -f(-x)\neq f(x)$.

Aus den obigen Beispielen erkennen wir:

Ganzrationale Funktionen sind nur dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn die Potenzen von x alle geradzahlig sind.

Ganzrationale Funktionen sind nur dann punktsymmetrisch, wenn die Potenzen von x alle ungeradzahlig sind und das absolute Glied a_0 fehlt.

Achsensymmetrien zu anderen Achsen bzw. Punktsymmetrien zu anderen Punkten findest du im Kapitel

Graphen und Funktionen analysieren

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Wir unterscheiden zwei Arten von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen, nämlich zum einen den **Schnittpunkt** mit der **y-Achse** und zum anderen den bzw. die **Schnittpunkte** mit der **x-Achse**, **Nullstellen** genannt.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Der Graph jeder ganzrationalen Funktion hat genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse. Dieser Punkt hat die Koordinaten $S_y(0|a_0)$. Der Parameter a_0 wird ja auch als y-Achsenabschnitt bezeichnet und ist das absolute Glied der Funktionsgleichung ganzrationaler Funktionen, siehe Abschnitt

Auswirkung des Parameters a_0

weiter vorne in diesem Kapitel.

Schnittpunkt mit der x-Achse

Kennen wir die Nullstellen einer Funktion, so kann uns dies für das Zeichnen des Graphen oder für die Bearbeitung einer Anwendungsaufgabe nützlich sein.
Wir haben die Berechnung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen ersten Grades (Geraden) bzw. zweiten Grades (Parabeln) bereits kennengelernt und geübt.

Bei einer Geradengleichung mit z. B. $g(x) = 2x - 8$ mussten wir die Gleichung $2x - 8 = 0$ lösen, womit wir die Nullstelle $x = 4$ erhielten.

Bei einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades (Parabel) mit z. B. $p(x) = x^2 + x - 6$ erhielten wir nach Auflösung mit der Mitternachtsformel der Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ die beiden Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$.

Die Nullstellen von Funktionen höheren Grades können wir in der Regel nicht mit einer allgemein gültigen Formel – wie etwa der Mitternachtsformel – lösen. Wir können aber in einigen Fällen durch Umformungen ein „schwieriges" Problem in mehrere „leichte" Probleme überführen.

Nullstellenverfahren

Nullstellen durch **Wurzelziehen**

In einfachen Fällen, wenn im Funktionsterm nur eine einzige Potenz von x vorkommt, lassen sich Nullstellen durch **Wurzelziehen** berechnen.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 8x^4 - 50$.
Berechne die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = 8x^4 - 50$	|	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$8x^4 - 50 = 0$	|	$+50;\ :8$
$x^4 = 6{,}25$	|	$\sqrt[4]{}$
$x_1 = \sqrt[4]{6{,}25};\quad x_2 = -\sqrt[4]{6{,}25}$		

Nullstellen durch **Linearfaktorzerlegung**

Haben wir einen Funktionsterm, der in **Linearfaktoren** zerlegt ist wie z. B. $f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-5)$, lassen sich die Nullstellen aus dieser Darstellung ablesen.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-5)$. Ermittle die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-5)$	|	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$2(x+1)(x-1)(x-5) = 0$	|	Satz vom Nullprodukt
$(x+1) = 0 \Rightarrow\ x_1 = -1$		
$(x-1) = 0 \Rightarrow\ x_2 = 1$		
$(x-5) = 0 \Rightarrow\ x_3 = 5$		

Nullstellen durch Potenzen von x **ausklammern**.

In manchen Fällen kann man eine Potenz von x **ausklammern** wie z. B. bei $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$. Ermittle die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2$	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$x^4 - 3x^3 - 10x^2 = 0$	Ausklammern von x^2
$x^2(x^2 - 3x - 10) = 0$	Satz vom Nullprodukt
$x_{1,2} = 0$	
$x^2 - 3x - 10 = 0$	
$x_{3,4} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$	p/q-Formel
$x_3 = 1{,}5 + 3{,}5 = 5$	
$x_4 = 1{,}5 - 3{,}5 = 2$	

Nullstellen durch **Substitution**.

Substitution ist eine weitere Methode zur Nullstellenbestimmung wie z. B. bei $f(x) = x^4 - 9x^2 + 8$.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 9x^2 + 8$. Ermittle die Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = x^4 - 9x^2 + 8$	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$x^4 - 9x^2 + 8 = 0$	Substitution: $x^2 = z$
$z^2 - 9z + 8 = 0$	
$z_{1,2} = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 8}$	p/q-Formel
$z_1 = 4{,}5 + 3{,}5 = 8$	
$z_2 = 4{,}5 - 3{,}5 = 1$	
$x^2 = z_1 \;=>\; x^2 = 8$	Resubstitution 1
$x_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2 \cdot \sqrt{2}$	
$x^2 = z_2 \;=>\; x^2 = 1$	Resubstitution 2
$x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$	
$\mathbb{L} = \{-2\sqrt{2}; -1; 1; 2\sqrt{2}\}$	

Nullstellen durch **Polynomdivision**.

Die **Polynomdivision** dient der Zerlegung einer ganzrationalen Funktionsgleichung in einzelne Faktoren, über die wir dann mittels der bislang aufgeführten Methoden die Nullstellen ermitteln können wie z.B. für $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Eine bekannte Nullstelle ist $x_1 = 2$. Ermittle die weiteren Nullstellen.

Lösung:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$	Nullstellen mit $f(x) = 0$
$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$	

Die folgenden Lösungsschritte sind nur eine Übersicht. Genaue Beschreibung der Regel zur Polynomdivision findest du im Kapitel **Gleichungen**.

$x^3 \quad - 3x^2 \quad - 10x \; + 24 = 0$	Polynomdivision

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 & -3x^2 & -10x & +24) : (x-2) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} & & & \qquad (x-2)\cdot x^2 \\
 & -x^2 - & 10x & \\
 & \underline{-(x^2 + \; 2x)} & & \qquad (x-2)\cdot(-x) \\
 & & -12x & +24 \\
 & & \underline{-(12x + 24)} & \qquad (x-2)\cdot(-12) \\
 & & & 0
\end{array}
$$

Gegeben war eine Nullstelle mit $x_1 = 2$. Aus diesem Grund erfolgt die Division mit $(x-2)$.
Der erste Summand des zu teilenden Polynoms (x^3) wird durch den ersten Summanden des Teilers (x) dividiert. Das Ergebnis (x^2) wird mit dem Teiler $(x-2)$ multipliziert und von dem zu teilenden Polynom subtrahiert.
Mit dem Ergebnis der Subtraktion $-x^2 - 10x + 24$ verfahren wir in gleicher Weise und führen dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.
Nach Durchführung der Division erhalten wir als Ergebnis eine quadratische Gleichung, deren weiteren Lösungen wir jetzt mit bekannten Methoden finden.

$x^2 - x - 12 = 0$

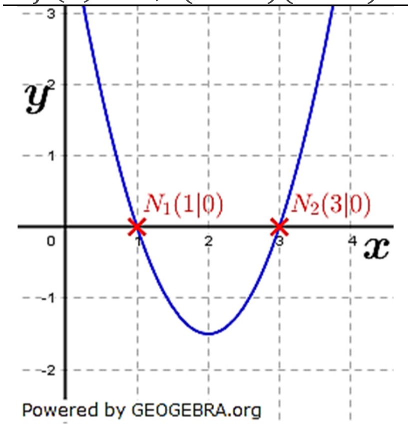
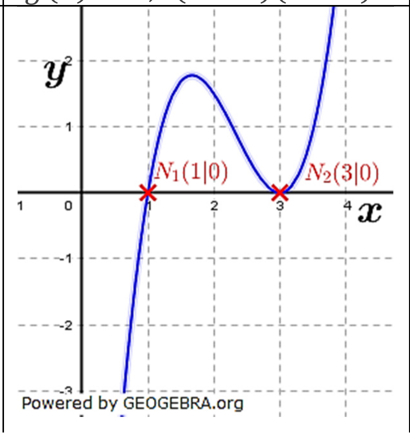
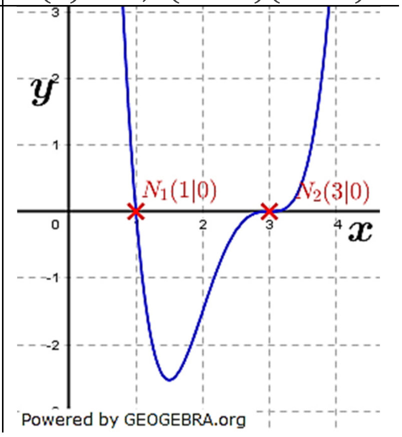
$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{0{,}25 + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{12{,}25} = \frac{1}{2} \pm 3{,}5$

$x_2 = 4; \quad x_{23} = -3$

$\mathbb{L} = \{-3; 2; 4\}$

Vielfachheit von Nullstellen

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Mehrfachheit von Nullstellen, die wir zwar bereits früher kennengelernt haben, ohne etwas über diese Vielfachheit zu wissen.
Liegt die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion in **Produktdarstellung** (→ Linearfaktorzerlegung) vor, können wir anhand des Funktionsterms Aussagen über das Verhalten in der Umgebung der Nullstellen machen. Von besonderem Interesse sind dabei mehrfach auftretende Faktoren. Hierzu betrachten wir uns drei Beispiele.

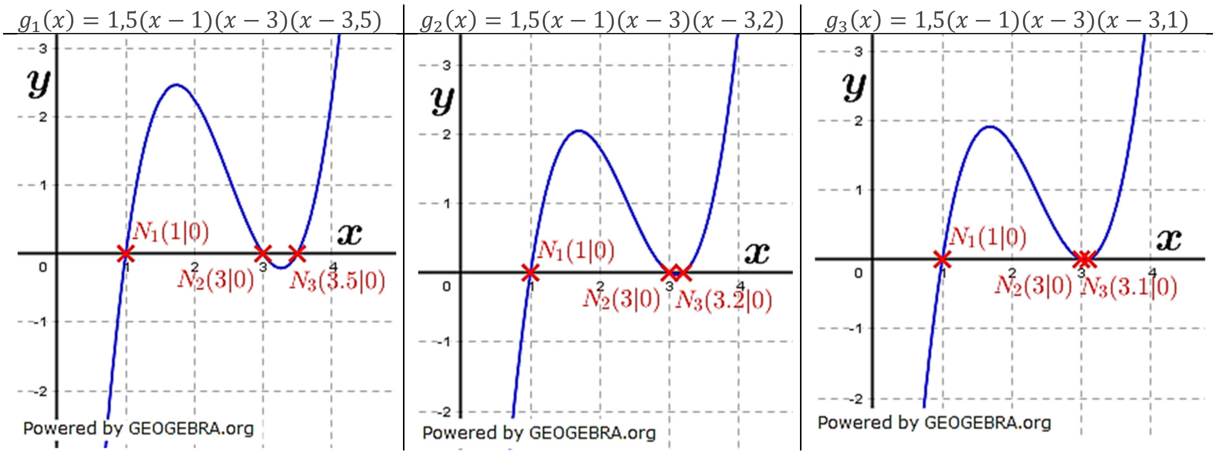
$f(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 3$	$g(x) = 1{,}5x^3 - 10{,}5x^2 + 22{,}5x - 13{,}5$	$h(x) = 1{,}5x^4 - 15x^3 + 54x^2 - 81x + 40{,}5$
$f(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)$	$g(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)^2$	$h(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)^3$
		

Vergleichen wir die oben dargestellten Graphen der jeweiligen Funktionen f, g und h, so stellen wir Folgendes fest:
An der Stelle $x = 1$ schneiden alle drei Graphen die x-Achse wie eine Gerade.
An der Stelle $x = 3$ schneidet der Graph von f die x-Achse wie eine Gerade, der Graph von g berührt die x-Achse (ähnlich dem Scheitelpunkt einer Parabel) und der Graph von h schneidet die x-Achse ähnlich der Nullstelle einer Funktion i mit $i(x) = x^3$ an der Stelle $x = 0$.

Das Verhalten der drei Graphen an der Stelle $x = 3$ wird also vom jeweiligen Funktionsglied $(x-3)$ der Funktionsgleichungen bestimmt.

Im Falle des Graphen von f hat das Funktionsglied $(x-3)^1$ die Potenz 1.
Im Falle des Graphen von g hat das Funktionsglied $(x-3)^2$ die Potenz 2.
Im Falle des Graphen von h hat das Funktionsglied $(x-3)^3$ die Potenz 3.

Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung der Nullstelle $x = 3$ wird also von der Vielfachheit des Faktors $(x-3)$ der Produktdarstellung bestimmt. Wir veranschaulichen uns dieses Verhalten für die Funktion g auf nachfolgend dargestellte Weise:



Die Funktionen g_1, g_2 und g_3 haben mit $g_a(x) = 1{,}5(x-1)(x-3)^2$ die Nulstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ gemeinsam. In den Darstellungen bewegt sich die 3. Nullstelle x_3 beginnend bei $x_3 = 3{,}5$ über $x_3 = 3{,}2$ und $x_3 = 3{,}1$ auf die Nullstelle $x_2 = 3$ zu. Wird letztendlich x_3 zu x_2, so fallen die beiden Nullstellen zusammen. Dadurch berührt der Graph die x-Achse an der Stelle $x_2 = 3$.

In diesem Falle sprechen wir bei $x_2 = 3$ von einer **zweifachen** (oder auch **doppelten**) **Nullstelle**. Die Nullstelle $x_1 = 1$ hingegen wird **einfache Nullstelle** genannt. Dies führt uns zu folgendem

Merksatz Mehrfachheit von Nullstellen

Liegt die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion f in der Produktdarstellung $f(x) = (x-x_0)^k \cdot g(x)$ mit $g(x) \neq 0$ vor, so heiß x_0 eine **Nullstelle der Vielfachheit k**.

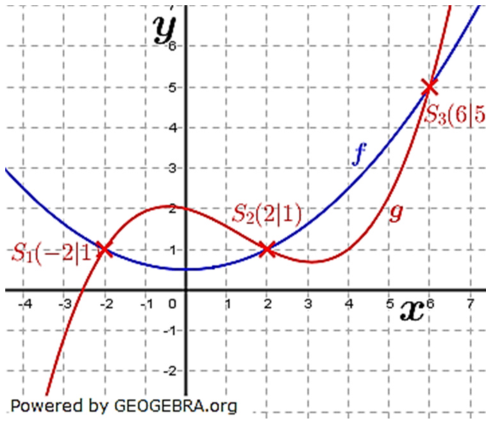
Gegenseitige Lage zweier Graphen

Oftmals ist es von Interesse, wie die Graphen zweier oder mehrerer Funktionen zueinander liegen. Dabei wollen wir wissen, ob sie sich einmal, zwei Mal, mehrfach oder überhaupt nicht schneiden. Von Interesse ist ebenfalls, ob die Schnittpunkte – falls vorhanden – Berührpunkte oder echte Schnittpunkte sind.
Dieses Verhalten können wir feststellen, wenn wir die Funktionsgleichungen der Funktionen ***gleichsetzen*** und nach x auflösen. Hierzu betrachten wir uns Beispiele.

Beispiele

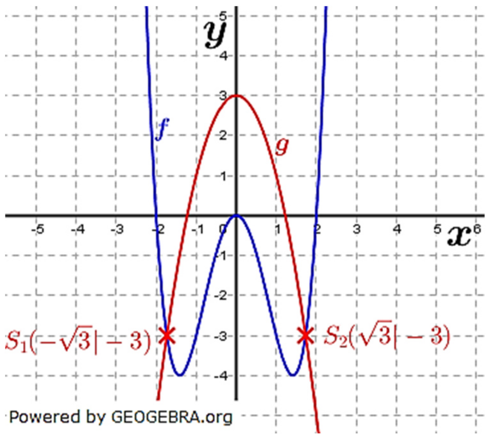
Beispiel 5: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+2$ und $g(x)=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 5: Wir bilden $f\cap g$:
$\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+2=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0$
Die Lösung dieser Gleichung führt zu 3 Lösungen mit:
$x_1=-2;\ \ x_2=2$ und $x_3=6$
Berechnung der y-Werte:
$g(-2)=1;\ \ g(2)=1;\ \ g(6)=5$
Die beiden Graphen schneiden sich in den drei Punkten $S_1(-2|1);\ \ S_2(2|1)$ sowie $S_3(6|5)$. Die Schnittpunkte sind einfache Schnittpunkte.



Beispiel 6: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x)=x^4-4x^2$ und $g(x)=-2x^2+3$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 6: Wir bilden $f\cap g$:
$x^4-4x^2=-2x^2+3$
$x^4-2x^2-3=0$
Die Lösung dieser Gleichung führt zu 2 Lösungen mit:
$x_1=-\sqrt{3}$ und $x_2=\sqrt{3}$
Berechnung der y-Werte:
$g(-\sqrt{3})=-3;\ \ g(\sqrt{3})=-3$
Die beiden Graphen schneiden sich in den zwei Punkten $S_1(-\sqrt{3}|-3)$ sowie $S_2(\sqrt{3}|-3)$. Die Schnittpunkte sind einfache Schnittpunkte.



Beispiel 7: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+4$ und $g(x)=-\frac{1}{2}x+6$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 7: Wir bilden $f \cap g$:

$-\frac{1}{8}x^3 + 4 = -\frac{1}{2}x + 6$

$-\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu 2 Lösungen mit:

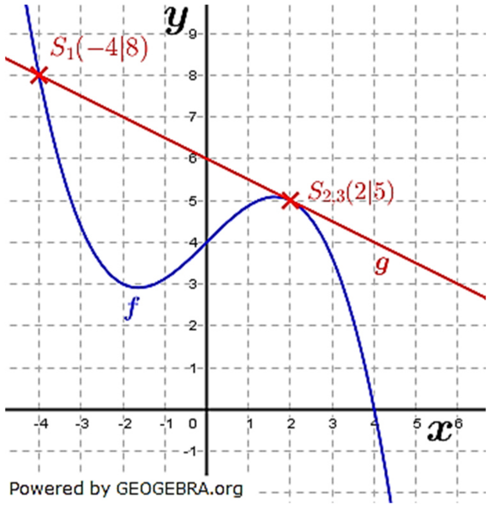
$x_1 = -4$ und $x_{2,3} = 2$

Berechnung der y-Werte:

$g(-4) = 8;\ \ g(2) = 5$

Die beiden Graphen schneiden sich in den zwei Punkten $S_1(-4|8)$ sowie $S_2(2|5)$.

Da sich bei der Gleichungslösung die Schnittstellen x_2 und x_3 zu 2 ergaben, ist S_1 eine einfache und S_2 eine doppelte Schnittstelle.



Beispiel 8: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$ und $g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{28}{3}$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 8: Wir bilden $f \cap g$:

$-\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{28}{3}$

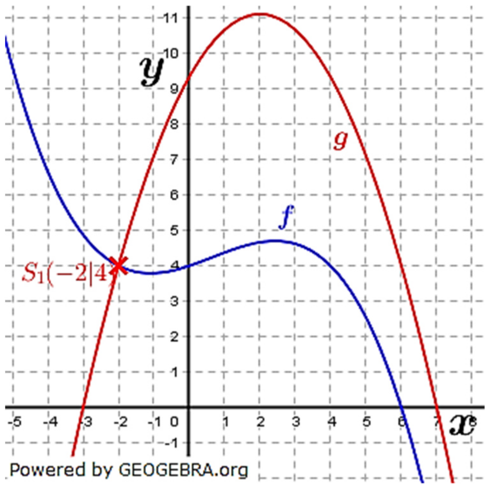
$-\frac{1}{24}x^3 + \frac{19}{36}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{16}{3} = 0$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu einer Lösung mit $x_1 = -2$.

Berechnung des y-Wertes:

$g(-2) = 4$

Die beiden Graphen schneiden sich im Punkten $S_1(-2|7)$. S_1 ist eine einfache Schnittstelle.



Beispiel 9: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$ und $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

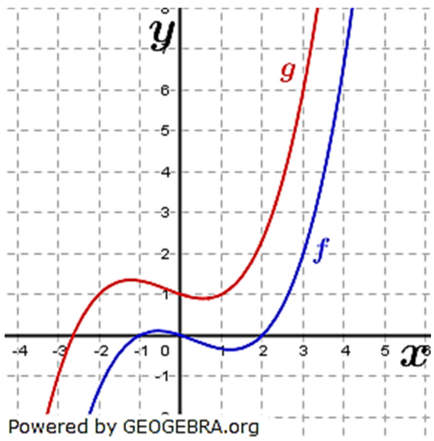
Lösung 9: Wir bilden $f \cap g$:

$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$

$1 \neq 0$

Diese Gleichung hat keine Lösung.

Die beiden Graphen haben keinen gemeinsamen Punkt.



Beispiel 10: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3$ und $g(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$. Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Funktionen.

Lösung 10: Wir bilden $f \cap g$:

$\frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3 \ = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$

$\frac{5}{48}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{3} = 0$

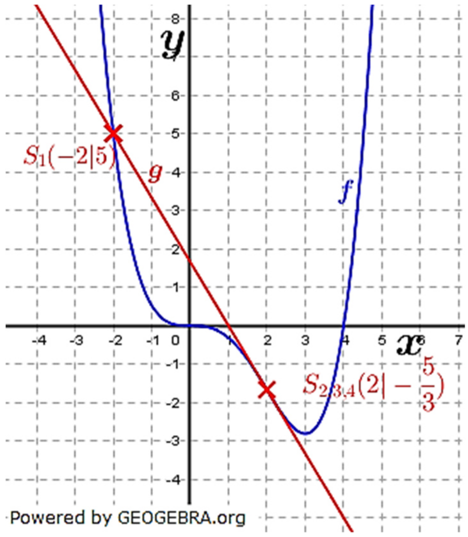
Die Lösung dieser Gleichung führt zu 2 Lösungen mit $x_1 = -2$ und $x_{2,3,4} = 2$.

Berechnung der y-Werte:

$g(-2) = 5; \quad g(2) = -\frac{5}{3}$

Die beiden Graphen schneiden sich in den Punkten $S_1(-2|5)$ und $S_2\left(2\middle|-\frac{5}{3}\right)$.

Da sich bei der Gleichungslösung die Schnittstellen $x_{2,}$ x_3 und x_4 zu 2 ergaben, ist S_1 eine einfache und S_2 eine dreifache Schnittstelle (die Steigungen von f und g in $x = 2$ sind gleich groß).



Beispiel 11: Gegeben sind zwei ganzrationalen Funktion f und g mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 + 4x$ und $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 1$.
Zeige: Die zugehörigen Schaubilder f und g schneiden sich nicht für $x > 0$. Wie liegen f und g für $x > 0$ zueinander?

Lösung 11: Wir bilden $f \cap g$:

$\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 + 4x \ = \frac{1}{16}x^2 - 1$

$\frac{1}{4}x^3 + \frac{31}{16}x^2 + 4x + 1 = 0$

Für $x > 0$ ist die linke Seite der Gleichung immer größer null. Die Gleichung hat also für $x > 0$ keine Lösung.

Die zugehörigen Schaubilder f und g schneiden sich nicht für $x > 0$.

Wegen $f(0) = 0 > g(0) = -1$ gilt:

f **verläuft für $x > 0$ oberhalb** von g.