Aufgabe A1

Zeichne die Graphen zu den Termen $f(x)=\frac{x}{x-2}$ und $g(x)=\frac{1}{3}x$ in ein Koordinatensystem. Bestimme rechnerisch die Nullstellen von f, denjenigen x-Wert für $f(x)=-2$ sowie die Schnittpunkte von f und g.

Aufgabe A2

Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x)=\frac{3}{x+2}$ und $g(x)=\frac{1}{2-x}$ in ein Koordinatensystem. Lies die Koordinate des Schnittpunktes der Graphen aus der Zeichnung ab und überprüfe dein Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe A3

Skizziere die Graphen der nachfolgend aufgeführten Funktionen, indem du zuerst die Lage der waagrechten Asymptoten und der Pole sowie den Vorzeichenwechsel des / der Pol(e) bestimmst.

a) $f(x)=\frac{2x}{x+3}$

b) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}$

c) $f(x)=\frac{1-x}{2x+3}$

d) $f(x)=\frac{5}{(3x+2)^2}$

Aufgabe A4

Bestimme die Definitionsmenge und die Nullstellen der gegebenen Funktion $f(x)=\frac{2-x}{(x+3)(x-3)}$.

Aufgabe A5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x^2}+2$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Gib die maximale Definitionsmenge an.

b) Weise nach, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

c) Skizziere den Graphen von f in ein geeignetes Koordinatensystem.

d) Für welche Werte von x unterscheiden sich die Funktionswerte der Funktion f um weniger als $\frac{1}{100}$ vom Wert 2?

Aufgabe A6

Gegeben sind gebrochen-rationale Funktionen der Form $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$.
Überprüfe rechnerisch, welche der gegebenen Punkte auf dem Graphen von f liegen.

a) $f(x)=\frac{2}{x+3}-1$ $\quad P_1(-2|0{,}6);\ P_2(-1|0{,}4);\ P_3(4|3);\ P_4(3{,}5|4)$

b) $f(x)=\frac{-3}{x+1}-2$ $\quad P_1(-5|-1{,}1);\ P_2(-4|-1);\ P_3(-2|1);\ P_4(4|-2{,}6)$

c) $f(x)=\frac{1{,}5}{x+1{,}5}+2$ $\quad P_1(-4|-2{,}5);\ P_2(-3|-3);\ P_3(-2|-5{,}5);\ P_4(1|-1{,}3)$

Aufgabe A7

Gib eine gebrochen-rationale Funktion in der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ an, die die angegebenen Asymptoten besitzt.
Es gibt viele Lösungsmöglichkeiten, gib mindestens zwei davon an.

a) Die Funktion hat den Pol $x = -3$ und die waagrechte Asymptote $y = 1{,}5$.

b) Die Funktion hat den Pol $x = 4{,}5$ und die waagrechte Asymptote $y = -1$.

Aufgabe A8

Gegeben sind gebrochen-rationale Funktionen in der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$.
Ermittle die Funktionsgleichung einer gebrochen-rationalen Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Der Graph der gesuchten Funktion f hat eine waagrechte Asymptote mit der Funktionsgleichung $y = 2{,}5$, einen Pol mit der Gleichung $x = -3$ und verläuft durch den Punkt $T(0|3{,}5)$.

b) Der Graph der gesuchten Funktion f hat eine waagrechte Asymptote mit der Funktionsgleichung $y = 1{,}5$, schneidet die x-Achse im Punkt $(-2|0)$ und die y-Achse nicht.

Aufgabe A9

Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der gegebenen Funktionen mit den Koordinatenachsen.

a) $g(x) = \frac{2{,}5}{x+2{,}5} + 5$

b) $h(x) = \frac{2}{x+1} + 2$

c) $k(x) = \frac{2}{x+2} - 4$

Lösung A1

$f(x) = \frac{x}{x-2}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x$

Nullstellen von mit :

$\frac{x}{x-2} = 0 \;\;➔\;\; x = 0$

$N(0|0)$

$f(x) = -2$

$\frac{x}{x-2} = -2$	|	$\cdot (x-2)$
$x = -2x + 4$	|	$+2x$
$3x = 4$	|	$:3$

$x = \frac{4}{3}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = -2$

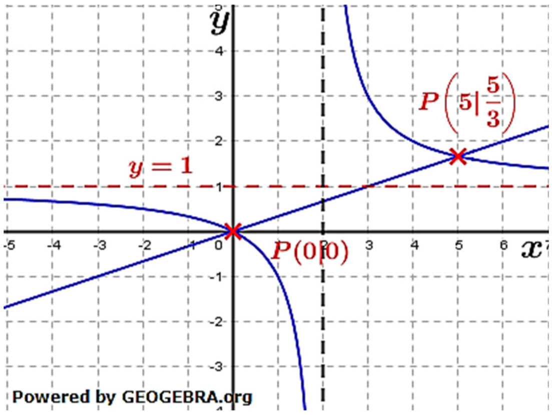
$f \cap g$

$\frac{x}{x-2} = \frac{1}{3}x$	|	$\cdot (x-2)$
$x = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$	|	$-x$
$\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x = 0$	|	$\cdot 3$; x ausklammern
$x \cdot (x-5)$	|	Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0;\;\; x_2 = 5;$

$g(0) = 0;\;\; g(5) = \frac{5}{3}$

Schnittpunkte sind $P(0|0)$ und $Q\left(5\middle|\frac{5}{3}\right)$.



Lösung A2

$f(x) = \frac{3}{x+2}$ und $g(x) = \frac{1}{2-x}$

Schnittpunkt angelesen: $S(1|1)$

Schnittpunkt gerechnet:

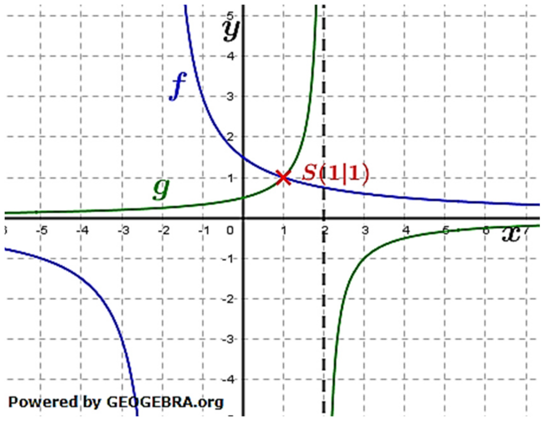
$f \cap g$

$\frac{3}{x+2} = \frac{1}{2-x}$	|	$\cdot (x+2)$
$3 = \frac{x+2}{2-x}$	|	$\cdot (2-x)$
$6 - 3x = x + 2$	|	$+3x;\; -2$
$4x = 4$	|	$:4$

$x = 1$

$f(1) = \frac{3}{1+2} = 1$

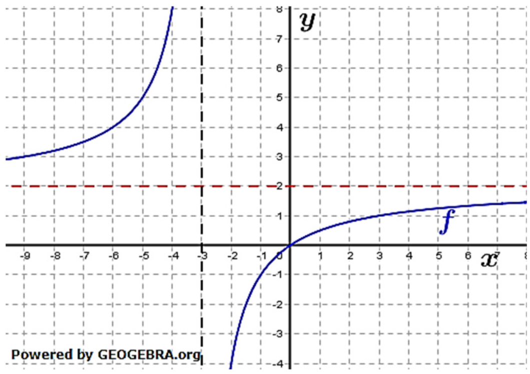
$S(1|1)$



Lösung A3

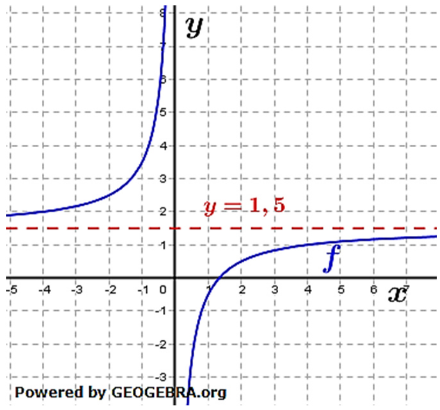
a) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler gleich höchste Potenz von x im Nenner.
$\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{2x}{x+3} = 2 \;\Rightarrow\; y = 2$
Pol:
$x + 3 = 0$
$x = -3$
Für $x_{\nearrow} \to -3$ läuft $g(x) \to \infty$
Für $x_{\nwarrow} \to -3$ läuft $g(x) \to -\infty$
Der Pol bei $x = -3$ ist ein Pol mit VZW.



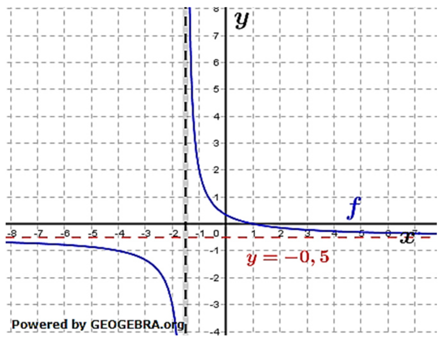
b) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler kleiner höchste Potenz von x im Nenner.
$\lim\limits_{x \to |\infty|} -\frac{2}{x} = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{3}{2}$
Pol:
$x = 0$
Für $x_{\nearrow} \to 0$ läuft $g(x) \to \infty$
Für $x_{\nwarrow} \to 0$ läuft $g(x) \to -\infty$
Der Pol bei $x = 0$ ist ein Pol mit VZW.



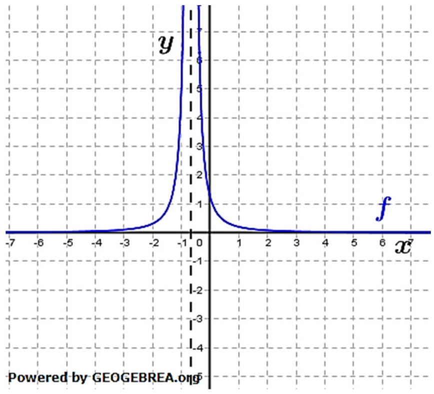
c) $f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler gleich höchster Potenz von x im Nenner.
$\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{1-x}{2x+3} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}$
Pol:
$2x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{3}{2}$
Für $x_{\nearrow} \to -\frac{3}{2}$ läuft $g(x) \to -\infty$
Für $x_{\nwarrow} \to -\frac{3}{2}$ läuft $g(x) \to +\infty$
Der Pol bei $x = -\frac{3}{2}$ ist ein Pol mit VZW.



d) $f(x) = \frac{5}{(3x+2)^2}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler kleiner höchster Potenz von x im Nenner.
$\frac{5}{(3x+2)^2} = 0$ ➔ $y = 0$



Pol:
$(3x+2)^2 = 0$
$3x = -2$
$x = -\frac{2}{3}$
Für $x_{\nearrow} \to -\frac{2}{3}$ läuft $g(x) \to +\infty$
Für $x_{\nwarrow} \to -\frac{2}{3}$ läuft $g(x) \to +\infty$
Der Pol bei $x = -\frac{2}{3}$ ist ein Pol ohne VZW.

Lösung A4

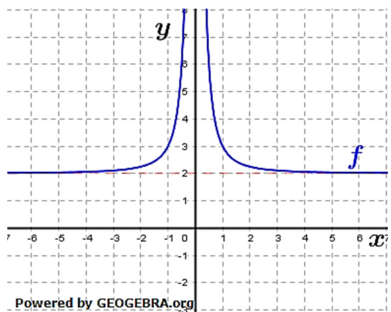
$f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x-3)}$.
Definitionsmenge:
$(x+3)(x-3) = 0$
$x_1 = -3;\ \ x_2 = 3$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
Nullstellen über $f(x) = 0$
$2 - x = 0$ ➔ $x_0 = 2$
$N_1(2|0)$

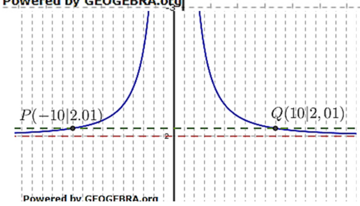
Lösung A5

$f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$

a) Definitionsmenge:
Der Nenner wird für $x_0 = 0$ zu Null. Deshalb ist $x_0 = 0$ auszuschließen.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Achsensymmetrie zur y-Achse mit $f(-x) = f(x)$:
$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + 2 = \frac{1}{x^2} + 2 = f(x)$





c) Siehe Grafik rechts.

d) Werte von x mit Unterschied von weniger als $\frac{1}{100}$ vom Wert 2.
Der Wertebereich für diesen Fall lautet:
$\mathbb{W} =]1{,}99; 2{,}01[$
Wir bestimmen die Grenzwerte:
$f(x) = 1{,}99 = \frac{1}{x^2} + 2$
$\frac{1}{x^2} = -0{,}01$ ➔ $\mathbb{L} = \{\}$
$f(x) = 2{,}01 = \frac{1}{x^2} + 2$
$\frac{1}{x^2} = 0{,}01$
$x^2 = 100$
$x_1 = 10;\ \ x_2 = -10$
Für $x < -10 \vee x > 10$ ist der Unterschied von f vom Wert 2 weniger als $\frac{1}{100}$.

Lösung A6

Lösung dieser Aufgabe mittels Punktproben.
Gegeben sind gebrochen-rationale Funktionen der Form $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$.
Überprüfe rechnerisch, welche der gegebenen Punkte auf dem Graphen von f liegen.

a) $f(x)=\frac{2}{x+3}-1$

$P_1(-2|0{,}6)$ $\quad 0{,}6=\frac{2}{-2+3}-1;\ 0{,}6=2-1;\ 0{,}6\neq 1 \Rightarrow P_1\notin f$

$P_2(-1|0{,}4)$ $\quad 0{,}4=\frac{2}{-1+3}-1;\ 0{,}6=2-1;\ 0{,}6\neq 1 \Rightarrow P_2\notin f$

$P_3(-2|1)$ $\quad 1=\frac{2}{-2+3}-1;\ 1=1 \Rightarrow P_3\in f$

$P_4(3{,}5|4)$ $\quad 4=\frac{2}{3{,}5+3}-1;\ 7=\frac{4}{13}-1;\ 7\neq -\frac{9}{13} \Rightarrow P_4\notin f$

b) $f(x)=\frac{-3}{x+1}-2$

$P_1(-5|-1{,}1)$ $\quad -1{,}1=\frac{-3}{-5+1}-2;\ -1{,}1=-0{,}75-2;\ -1{,}1\neq -2{,}75 \Rightarrow P_1\notin f$

$P_2(-4|-1)$ $\quad -1=\frac{-3}{-4+1}-2;\ -1=1-2;\ -1=-1 \Rightarrow P_2\in f$

$P_3(-2|1)$ $\quad 1=\frac{-3}{-2+1}-2;\ 1=3-2;\ 1=1 \Rightarrow P_3\in f$

$P_4(4|-2{,}6)$ $\quad -2{,}6=\frac{-3}{4+1}-2;\ -2{,}6=-0{,}6-2\ -2{,}6=-2{,}6 \Rightarrow P_4\in f$

c) $f(x)=\frac{1{,}5}{x+1{,}5}+2$

$P_1(-4|-2{,}5)$ $\quad -2{,}5=\frac{1{,}5}{-4+1{,}5}+2;\ -2{,}5=-0{,}6+2;\ -2{,}5\neq 1{,}4 \Rightarrow P_1\notin f$

$P_2(-3|-3)$ $\quad -3=\frac{1{,}5}{-3+1{,}5}+2;\ -3=-1+2;\ -3\neq 1 \Rightarrow P_2\notin f$

$P_3(-2|-5{,}5)$ $\quad -5{,}5=\frac{1{,}5}{-2+1{,}5}+2;\ -5{,}5=-3+2;\ -5{,}5\neq -1 \Rightarrow P_3\notin f$

$P_4(1|-1{,}3)$ $\quad -1{,}3=\frac{1{,}5}{1+1{,}5}+2;\ -1{,}3=0{,}6+2;\ -1{,}3\neq 2{,}6 \Rightarrow P_4\notin f$

Lösung A7

$f(x)=\frac{a}{x+b}+c$

a) Pol bei $x=-3$ und waagrechte Asymptote $y=1{,}5$:

$f(x)=\frac{1}{x+3}+1{,}5;\quad g(x)=\frac{x}{x+3}+0{,}5$

b) Pol $x=4{,}5$ und waagrechte Asymptote $y=-1$.

$f(x)=\frac{1}{x-4{,}5}-1;\quad g(x)=\frac{0{,}5x-2{,}25}{x-4{,}5}$

Lösung A8

$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$.

a) Waagrechte Asymptote $y = 2{,}5$, Pol mit $x = -3$ und $T(0|3{,}5) \in f$.

$f(x) = \frac{3}{x+3} + 2{,}5$

b) Waagrechte Asymptote $y = 1{,}5$, $P(-2|0) \in f$ und kein Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(x) = \frac{3}{x} + 1{,}5$

Lösung A9

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

a) $g(x) = \frac{2{,}5}{x+2{,}5} + 5$

$g(0) = \frac{2{,}5}{2{,}5} + 5 = 6 \Rightarrow S_y(0|6)$

$\frac{2{,}5}{x+2{,}5} + 5 = 0$

$\frac{2{,}5}{x+2{,}5} = -5 \quad | \quad \cdot (x+2{,}5)$

$2{,}5 = -5x - 12{,}5 \quad | \quad +12{,}5$

$15 = -5x \quad | \quad :(-5)$

$x = -3 \Rightarrow N_1(-3|0)$

b) $h(x) = \frac{2}{x+1} + 2$

$h(0) = \frac{2}{1} + 2 = 4 \Rightarrow S_y(0|4)$

$\frac{2}{x+1} + 2 = 0$

$\frac{2}{x+1} = -2 \quad | \quad \cdot (x+1)$

$2 = -2(x+1)$

$2 = -2x - 2$

$4 = -2x \quad | \quad :(-2)$

$x = -2 \Rightarrow N_1(-2|0)$

c) $k(x) = \frac{2}{x+2} - 4$

$k(0) = \frac{2}{2} - 4 = -3 \Rightarrow S_y(0|-3)$

$\frac{2}{x+2} - 4 = 0$

$\frac{2}{x+2} = 4 \quad | \quad \cdot (x+2)$

$2 = 4x + 8 \quad | \quad -8$

$-6 = 4x \quad | \quad :4$

$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow N_1\left(-\frac{3}{2}\middle|0\right)$