Lösung A1

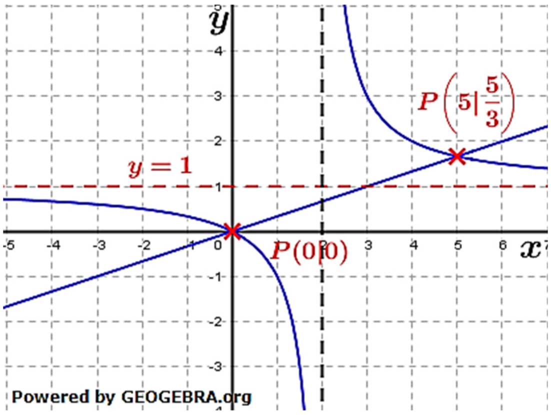
$f(x)=\frac{x}{x-2}$ und $g(x)=\frac{1}{3}x$

Nullstellen von mit :

$\frac{x}{x-2}=0 \;\rightarrow\; x=0$

$N(0|0)$

$f(x)=-2$



$\frac{x}{x-2}=-2$	|	$\cdot(x-2)$
$x=-2x+4$	|	$+2x$
$3x=4$	|	$:3$
$x=\frac{4}{3}$		
$f\left(\frac{4}{3}\right)=-2$		
$f\cap g$		
$\frac{x}{x-2}=\frac{1}{3}x$	|	$\cdot(x-2)$
$x=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x$	|	$-x$
$\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x=0$	|	$\cdot 3$; x ausklammern
$x\cdot(x-5)$	|	Satz vom Nullprodukt

$x_1=0$; $x_2=5$;

$g(0)=0$; $g(5)=\frac{5}{3}$

Schnittpunkte sind $P(0|0)$ und $Q\left(5\middle|\frac{5}{3}\right)$.

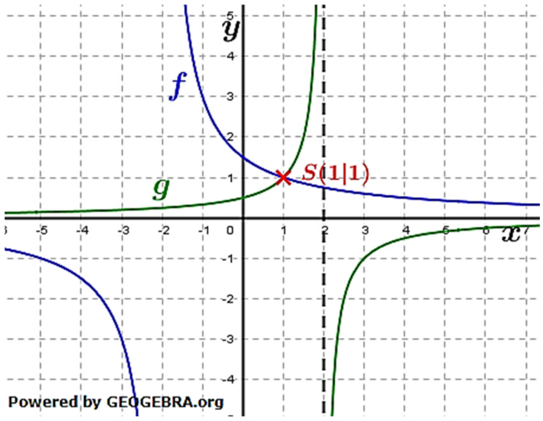
Lösung A2

$f(x)=\frac{3}{x+2}$ und $g(x)=\frac{1}{2-x}$

Schnittpunkt angelesen: $S(1|1)$

Schnittpunkt gerechnet:

$f\cap g$



$\frac{3}{x+2}=\frac{1}{2-x}$	|	$\cdot(x+2)$
$3=\frac{x+2}{2-x}$	|	$\cdot(2-x)$
$6-3x=x+2$	|	$+3x;\ -2$
$4x=4$	|	$:4$

$x=1$

$f(1)=\frac{3}{1+2}=1$

$S(1|1)$

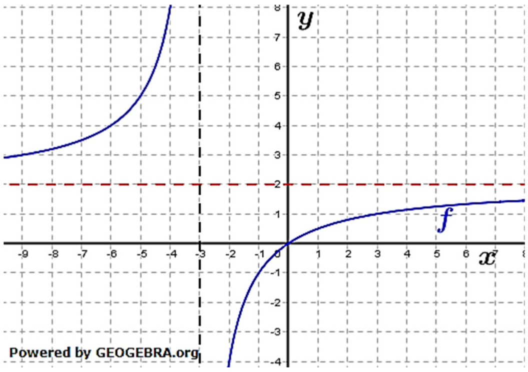
Lösung A3

a) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler gleich höchste Potenz von x im Nenner.

$\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{2x}{x+3} = 2 \;\rightarrow\; y = 2$

Pol:
$x + 3 = 0$
$x = -3$
Für $x_{\nearrow} \to -3$ läuft $g(x) \to \infty$
Für $x_{\nwarrow} \to -3$ läuft $g(x) \to -\infty$
Der Pol bei $x = -3$ ist ein Pol mit VZW.

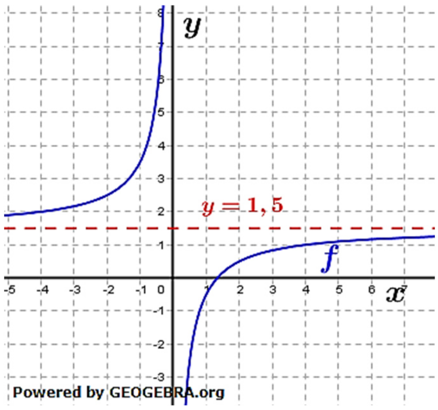


b) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler kleiner höchste Potenz von x im Nenner.

$\lim\limits_{x \to |\infty|} -\frac{2}{x} = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3}{2}$

Pol:
$x = 0$
Für $x_{\nearrow} \to 0$ läuft $g(x) \to \infty$
Für $x_{\nwarrow} \to 0$ läuft $g(x) \to -\infty$
Der Pol bei $x = 0$ ist ein Pol mit VZW.

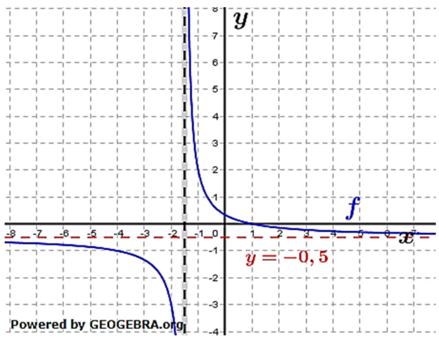


c) $f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler gleich höchster Potenz von x im Nenner.

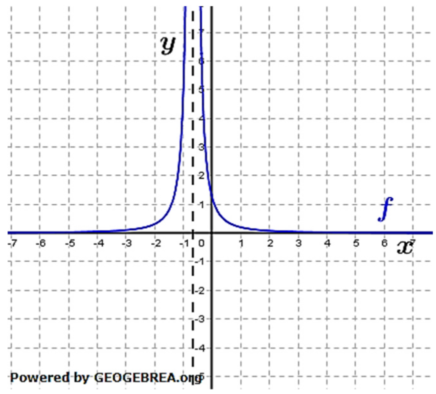
$\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{1-x}{2x+3} = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; y = -\frac{1}{2}$

Pol:
$2x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{3}{2}$
Für $x_{\nearrow} \to -\frac{3}{2}$ läuft $g(x) \to -\infty$
Für $x_{\nwarrow} \to -\frac{3}{2}$ läuft $g(x) \to +\infty$
Der Pol bei $x = -\frac{3}{2}$ ist ein Pol mit VZW.



d) $f(x) = \frac{5}{(3x+2)^2}$

Waagrechte Asymptote:
Höchste Potenz von x im Zähler kleiner höchster Potenz von x im Nenner.
$\frac{5}{(3x+2)^2} = 0$ ➔ $y = 0$



Pol:
$(3x+2)^2 = 0$
$3x = -2$
$x = -\frac{2}{3}$
Für $x_{\nearrow} \to -\frac{2}{3}$ läuft $g(x) \to +\infty$
Für $x_{\nwarrow} \to -\frac{2}{3}$ läuft $g(x) \to +\infty$
Der Pol bei $x = -\frac{2}{3}$ ist ein Pol ohne VZW.

Lösung A4

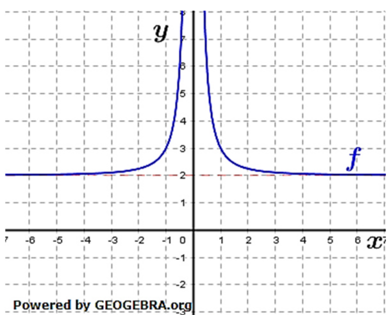
$f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x-3)}$.
Definitionsmenge:
$(x+3)(x-3) = 0$
$x_1 = -3;\ \ x_2 = 3$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
Nullstellen über $f(x) = 0$
$2 - x = 0$ ➔ $x_0 = 2$
$N_1(2|0)$

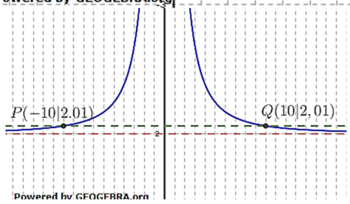
Lösung A5

$f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$

a) Definitionsmenge:
Der Nenner wird für $x_0 = 0$ zu Null. Deshalb ist $x_0 = 0$ auszuschließen.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Achsensymmetrie zur y-Achse mit $f(-x) = f(x)$:
$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + 2 = \frac{1}{x^2} + 2 = f(x)$





c) Siehe Grafik rechts.

d) Werte von x mit Unterschied von weniger als $\frac{1}{100}$ vom Wert 2.
Der Wertebereich für diesen Fall lautet:
$\mathbb{W} =]1{,}99; 2{,}01[$
Wir bestimmen die Grenzwerte:
$f(x) = 1{,}99 = \frac{1}{x^2} + 2$
$\frac{1}{x^2} = -0{,}01$ ➔ $\mathbb{L} = \{\}$
$f(x) = 2{,}01 = \frac{1}{x^2} + 2$
$\frac{1}{x^2} = 0{,}01$
$x^2 = 100$
$x_1 = 10;\ \ x_2 = -10$
Für $x < -10 \vee x > 10$ ist der Unterschied von f vom Wert 2 weniger als $\frac{1}{100}$.

Lösung A6

Lösung dieser Aufgabe mittels Punktproben.
Gegeben sind gebrochen-rationale Funktionen der Form $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$.
Überprüfe rechnerisch, welche der gegebenen Punkte auf dem Graphen von f liegen.

a) $f(x)=\frac{2}{x+3}-1$

$P_1(-2|0{,}6)$ $\quad 0{,}6=\frac{2}{-2+3}-1;\ 0{,}6=2-1;\ 0{,}6\neq 1 \ \rightarrow\ P_1\notin f$

$P_2(-1|0{,}4)$ $\quad 0{,}4=\frac{2}{-1+3}-1;\ 0{,}6=2-1;\ 0{,}6\neq 1 \ \rightarrow\ P_2\notin f$

$P_3(-2|1)$ $\quad 1=\frac{2}{-2+3}-1;\ 1=1 \ \rightarrow\ P_3\in f$

$P_4(3{,}5|4)$ $\quad 4=\frac{2}{3{,}5+3}-1;\ 7=\frac{4}{13}-1;\ 7\neq -\frac{9}{13} \ \rightarrow\ P_4\notin f$

b) $f(x)=\frac{-3}{x+1}-2$

$P_1(-5|-1{,}1)$ $\quad -1{,}1=\frac{-3}{-5+1}-2;\ -1{,}1=-0{,}75-2;\ -1{,}1\neq -2{,}75 \ \rightarrow\ P_1\notin f$

$P_2(-4|-1)$ $\quad -1=\frac{-3}{-4+1}-2;\ -1=1-2;\ -1=-1 \ \rightarrow\ P_2\in f$

$P_3(-2|1)$ $\quad 1=\frac{-3}{-2+1}-2;\ 1=3-2;\ 1=1 \ \rightarrow\ P_3\in f$

$P_4(4|-2{,}6)$ $\quad -2{,}6=\frac{-3}{4+1}-2;\ -2{,}6=-0{,}6-2\ -2{,}6=-2{,}6 \ \rightarrow\ P_4\in f$

c) $f(x)=\frac{1{,}5}{x+1{,}5}+2$

$P_1(-4|-2{,}5)$ $\quad -2{,}5=\frac{1{,}5}{-4+1{,}5}+2;\ -2{,}5=-0{,}6+2;\ -2{,}5\neq 1{,}4 \ \rightarrow\ P_1\notin f$

$P_2(-3|-3)$ $\quad -3=\frac{1{,}5}{-3+1{,}5}+2;\ -3=-1+2;\ -3\neq 1 \ \rightarrow\ P_2\notin f$

$P_3(-2|-5{,}5)$ $\quad -5{,}5=\frac{1{,}5}{-2+1{,}5}+2;\ -5{,}5=-3+2;\ -5{,}5\neq -1 \ \rightarrow\ P_3\notin f$

$P_4(1|-1{,}3)$ $\quad -1{,}3=\frac{1{,}5}{1+1{,}5}+2;\ -1{,}3=0{,}6+2;\ -1{,}3\neq 2{,}6 \ \rightarrow\ P_4\notin f$

Lösung A7

$f(x)=\frac{a}{x+b}+c$

a) Pol bei $x=-3$ und waagrechte Asymptote $y=1{,}5$:

$f(x)=\frac{1}{x+3}+1{,}5;\quad g(x)=\frac{x}{x+3}+0{,}5$

b) Pol $x=4{,}5$ und waagrechte Asymptote $y=-1$.

$f(x)=\frac{1}{x-4{,}5}-1;\quad g(x)=\frac{0{,}5x-2{,}25}{x-4{,}5}$

Lösung A8

$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$.

a) Waagrechte Asymptote $y = 2{,}5$, Pol mit $x = -3$ und $T(0|3{,}5) \in f$.

$f(x) = \frac{3}{x+3} + 2{,}5$

b) Waagrechte Asymptote $y = 1{,}5$, $P(-2|0) \in f$ und kein Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(x) = \frac{3}{x} + 1{,}5$

Lösung A9

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

a) $g(x) = \frac{2{,}5}{x+2{,}5} + 5$

$g(0) = \frac{2{,}5}{2{,}5} + 5 = 6 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|6)$

$\frac{2{,}5}{x+2{,}5} + 5 = 0$

$\frac{2{,}5}{x+2{,}5} = -5 \qquad | \quad \cdot (x+2{,}5)$

$2{,}5 = -5x - 12{,}5 \qquad | \quad +12{,}5$

$15 = -5x \qquad | \quad :(-5)$

$x = -3 \quad \Rightarrow \quad N_1(-3|0)$

b) $h(x) = \frac{2}{x+1} + 2$

$h(0) = \frac{2}{1} + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|4)$

$\frac{2}{x+1} + 2 = 0$

$\frac{2}{x+1} = -2 \qquad | \quad \cdot (x+1)$

$2 = -2(x+1)$

$2 = -2x - 2$

$4 = -2x \qquad | \quad :(-2)$

$x = -2 \quad \Rightarrow \quad N_1(-2|0)$

c) $k(x) = \frac{2}{x+2} - 4$

$k(0) = \frac{2}{2} - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|-3)$

$\frac{2}{x+2} - 4 = 0$

$\frac{2}{x+2} = 4 \qquad | \quad \cdot (x+2)$

$2 = 4x + 8 \qquad | \quad -8$

$-6 = 4x \qquad | \quad :4$

$x = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad N_1\left(-\frac{3}{2}\middle|0\right)$