Funktionsklassen
Potenzfunktionen

Inhaltsverzeichnis

Potenzfunktionen

Kapitel mit 148 Aufgaben

Definition des Begriffs „Funktion"

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Potenzfunktionen

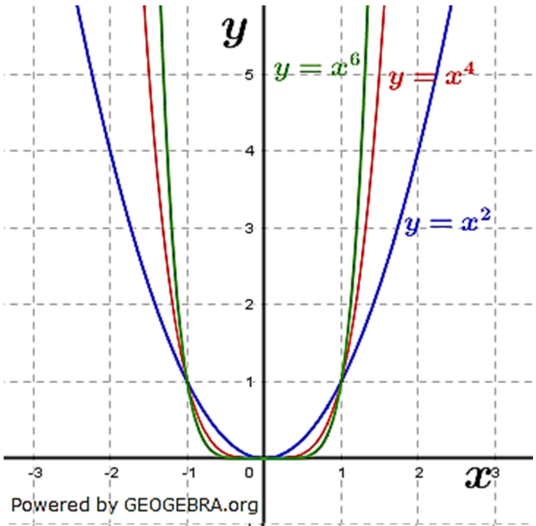
Unter Potenzfunktionen verstehen wir Funktionen mit einem einzelnen x-Glied welches eine rationale Potenz aufweist.
Die allgemeinen Form einer Potenzfunktion lautet:

$$f(x) = a(x-b)^q + c.$$

q ist dabei jede beliebige rationale Zahl, also ganzzahlig positiv, ganzzahlig negativ, oder eine Dezimalzahl bzw. ein endlicher Bruch.

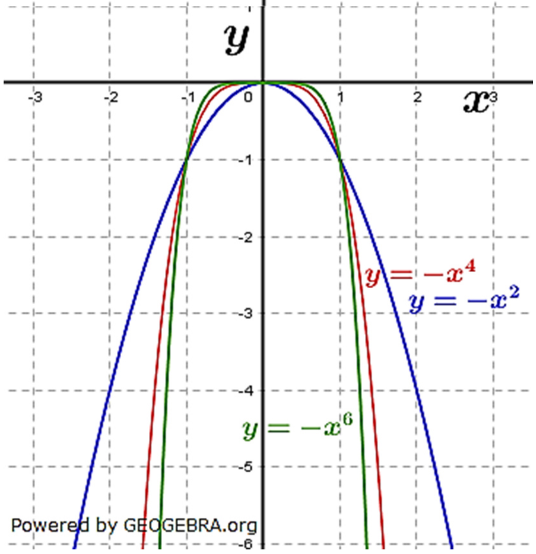
Auswirkung positiver, ganzzahliger und gerader Werte von q

Zunächst betrachten wir uns die einfachste Form einer Potenzfunktion, nämlich $f(x) = x^q$ und sehen uns die Bedeutung der Hochzahl q an.
Wir betrachten $q \in \mathbb{N}$, also im Bereich der natürlichen Zahlen.
Die nebenstehende Abbildungen zeigt Graphen von Potenzfunktionen, deren Potenz im angegebenen Bereich liegt. Eine dieser Potenzfunktionen kennen wir schon aus dem Kapitel Quadratische Funktionen / Parabeln mit der Funktionsgleichung $p(x) = x^2$, die Funktionsgleichung einer Normalparabel.
In der Graphik sehen wir nur geradzahlige Potenzen von x. Je größer die Potenz ist, umso schmäler wird der Graph der Funktion.



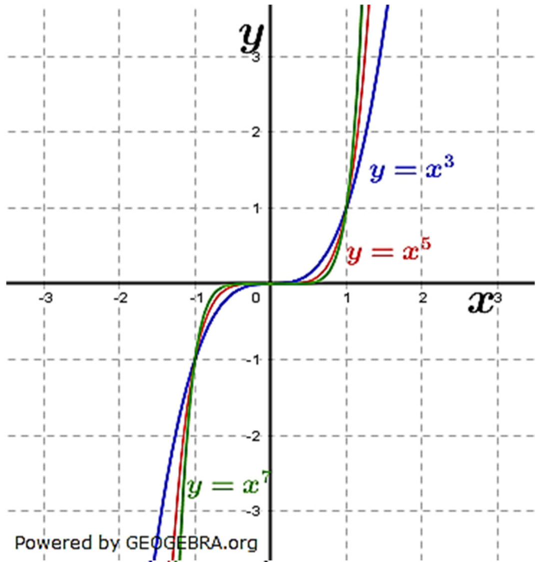
Ist das Vorzeichen von x ein Minuszeichen, so ist der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt. Die Auswirkung der geraden Potenz von x ist identisch.

Potenzfunktionen mit ganzzahligen geraden Hochzahlen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.

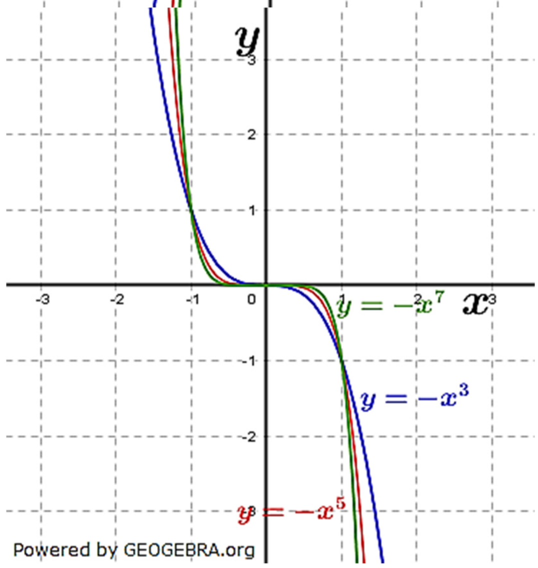


Auswirkung positiver, ganzzahliger und ungerader Werte von q

Sind die ganzzahligen Potenzen von x ungerade, gilt wie bei den geradzahligen Potenzen:
Je größer die Potenz ist, umso schmäler wird der Graph der Funktion. Der Graph verläuft aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten.



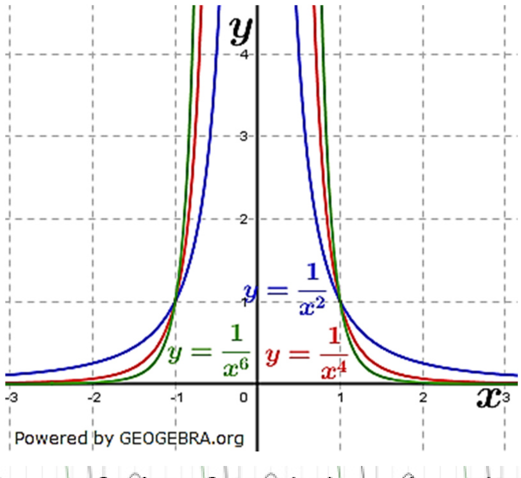
Ist das Vorzeichen von x ein Minuszeichen, so ist der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt. Die Auswirkung der ungeraden Potenz von x ist identisch. Der Graph verläuft aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten.



Potenzfunktionen mit ganzzahligen ungeraden Hochzahlen sind punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt.

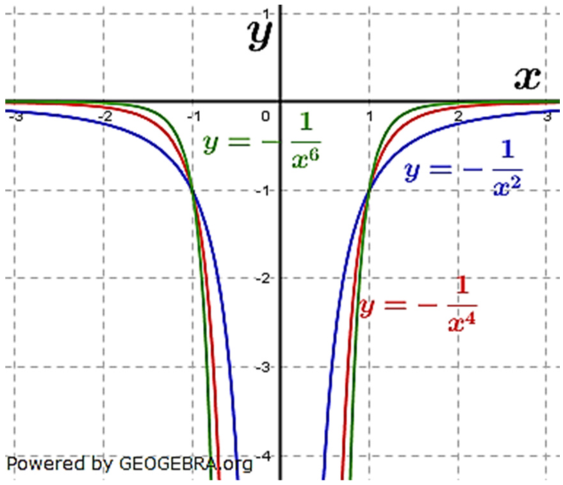
Auswirkung negativer, ganzzahliger gerader Werte von q

Nachdem wir die Auswirkungen von ganzzahligen positiven Exponenten kennengelernt haben, widmen wir uns den Auswirkungen von ganzzahligen negativen Exponenten.
Wir betrachten zunächst die Exponenten mit geraden negativen Zahlen. Die nebenstehende Grafik zeigt die Schaubilder der Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^{-4}$ und $h(x) = x^{-6}$.
Der aufmerksame Beobachter erkennt, dass in der Grafik eine andere Schreibweise verwendet wurde, nämlich $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$ und $h(x) = \frac{1}{x^6}$. Hier wurden Potenzgesetze angewandt, nämlich die Umwandlung negativer Hochzahlen in positive Hochzahlen.



Je größer die Hochzahlen werden, umso steiler wird die Kurve, alle Kurven schneiden sich in den Punkten $S_1(-1|1)$ sowie $S_2(1|1)$. Die Funktionen sind in $x = 0$ nicht definiert, haben dort eine Definitionslücke.

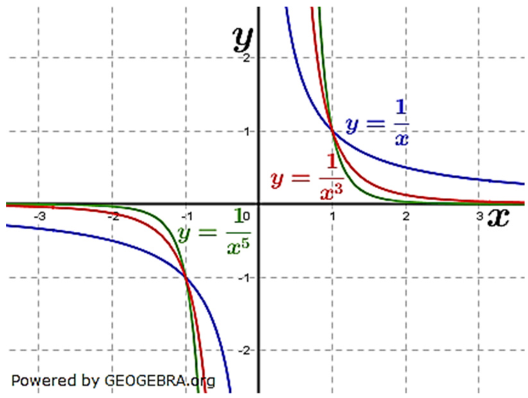
Ist das Vorzeichen von x ein Minuszeichen, so ist der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt. Die Auswirkung der geraden Potenzen von x ist identisch. Der Graph verläuft im III. Quadranten in im IV. Quadranten.



Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen, geraden Hochzahlen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.

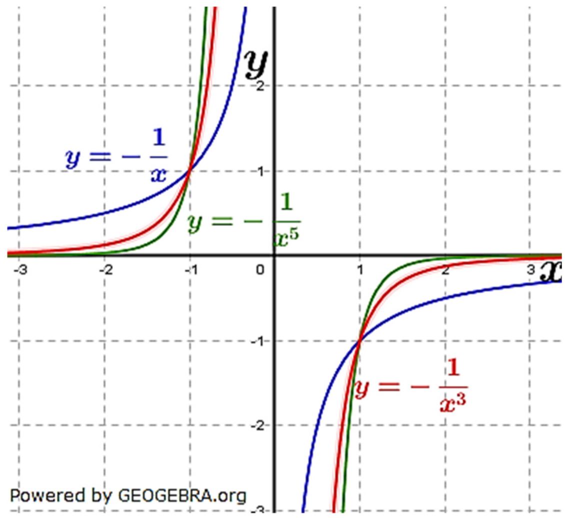
Auswirkung negativer, ganzzahliger ungerade Werte von q

Wir betrachten die Exponenten mit ungeraden negativen Zahlen. Die nebenstehende Grafik zeigt die Schaubilder der Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = x^{-3}$ und $h(x) = x^{-5}$.
Der aufmerksame Beobachter erkennt, dass in der Grafik eine andere Schreibweise verwendet wurde, nämlich $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ und $h(x) = \frac{1}{x^5}$. Hier wurden Potenzgesetze angewandt, nämlich die Umwandlung negativer Hochzahlen in positive Hochzahlen.



Je größer die Hochzahlen werden, umso steiler wird die Kurve, alle Kurven schneiden sich in den Punkten $S_1(1|1)$ sowie $S_2(-1|-1)$. Die Funktionen sind in $x = 0$ nicht definiert, haben dort eine Definitionslücke.

Ist das Vorzeichen von x ein Minuszeichen, so ist der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt. Die Auswirkung der ungeraden Potenz von x ist identisch. Der Graph verläuft im II. Quadranten im IV. Quadranten.



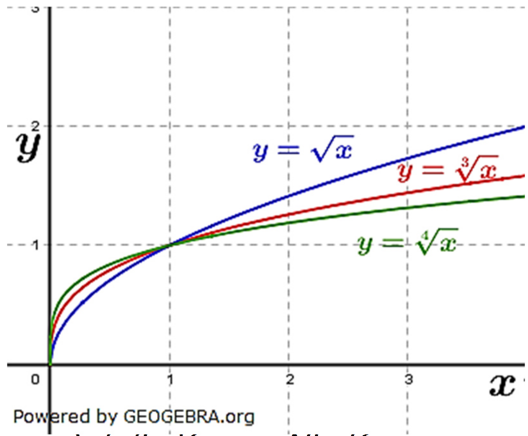
Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen, ungeraden Hochzahlen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

Die Schaubilder der Funktionen mit ungeraden negativen ganzen Hochzahlen haben einen eigenen Namen, man nennt sie Hyperbeln.

Auswirkung rationaler positiver Werte von q

Nachdem wir die Auswirkungen von ganzzahligen Exponenten kennengelernt haben, widmen wir uns den Auswirkungen von rationalen sowohl positiven als auch negativen Exponenten.

Wir betrachten zunächst die positiven rationalen Zahlen. Die nebenstehende Grafik zeigt die Schaubilder der Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ und $h(x) = x^{\frac{1}{4}}$.

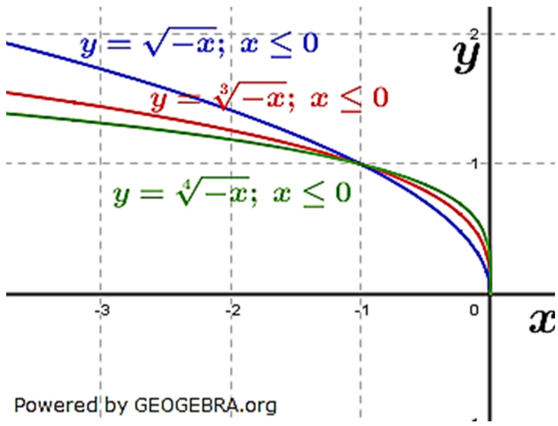


Der aufmerksame Beobachter erkennt, dass in der Grafik eine andere Schreibweise verwendet wurde, nämlich $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ und $h(x) = \sqrt[4]{x}$. Hier wurden Potenzgesetze angewandt, nämlich die Potenzdarstellung von Wurzeln.

Je kleiner die Hochzahlen werden, umso flacher wird die Kurve. Alle Kurven gehen sowohl durch $P(1|1)$ als auch durch den Ursprung. Sie sind in $O(0|0)$ zwar definiert, sind aber dort nicht differenzierbar.

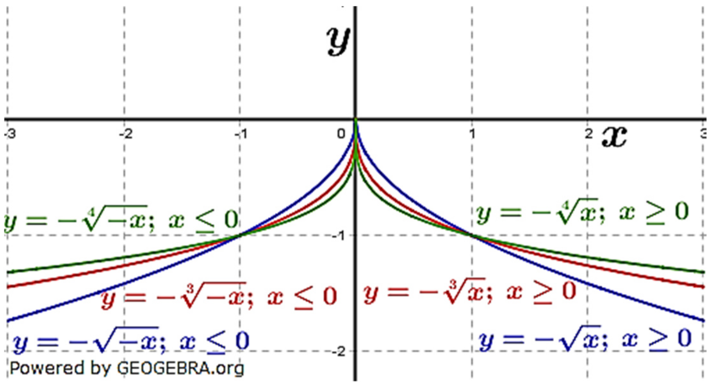
Wir müssen zusätzlich feststellen, dass die Graphen der Funktionen ausschließlich im I. Quadranten verlaufen. Negative Werte von x kommen nicht vor, da negative Zahlen unter Wurzeln nicht zulässig sind.

Allerdings müssen wir hier eine Einschränkung machen, denn wir können diese Funktionen ja an der y-Achse spiegeln. Die nebenstehende Grafik zeigt die Schaubilder der Funktionen f, g und h mit $f(x) = (-x)^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = (-x)^{\frac{1}{3}}$ und $h(x) = (-x)^{\frac{1}{4}}$, alle mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}^-$ (Definitionsbereich ist der negative reelle Zahlenbereich).



Der aufmerksame Beobachter erkennt, dass in der Grafik eine andere Schreibweise verwendet wurde, nämlich $f(x) = \sqrt{-x}$, $g(x) = \sqrt[3]{-x}$ und $h(x) = \sqrt[4]{-x}$, jeweils aber mit $x \leq 0$. Im Übrigen gilt hier das zuvor beschriebene.

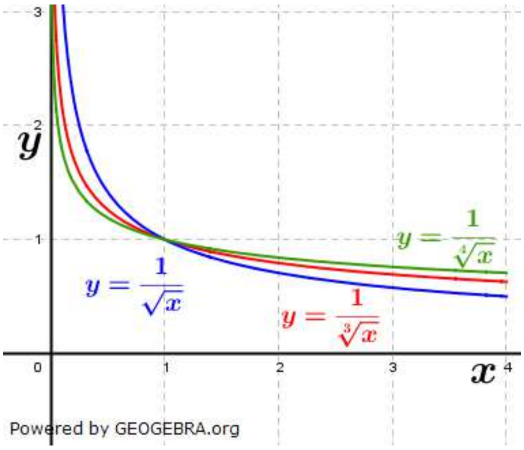
Ist das Vorzeichen von $f(x)$ ein Minuszeichen, so ist der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt. Die Auswirkung rationaler Potenzen von x ist identisch mit dem oben Beschriebenen.



Die Schaubilder der Funktionen mit rationalen positiven Hochzahlen haben einen weiteren Namen, man nennt sie auch Wurzelfunktionen.

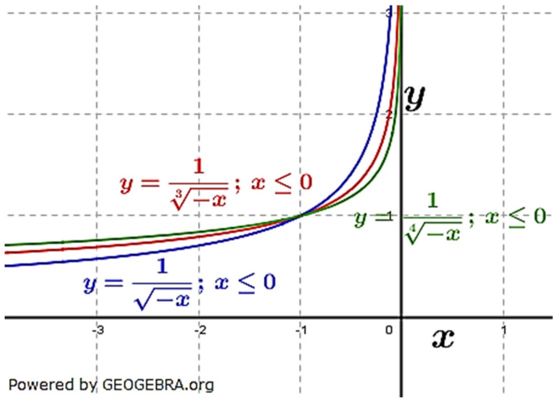
Auswirkung rationaler negativer Werte von q

Die nebenstehende Grafik zeigt die Schaubilder der Funktionen f, g und h mit rationalem negativem q. Die Funktionsgleichungen lauten: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ und $h(x) = x^{-\frac{1}{4}}$.
Der aufmerksame Beobachter erkennt, dass in der Grafik eine andere Schreibweise verwendet wurde, nämlich $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ und $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Hier wurden Potenzgesetze angewandt, nämlich zunächst Umwandlung negativer in positive Hochzahlen und dann die Potenzdarstellung von Wurzeln.

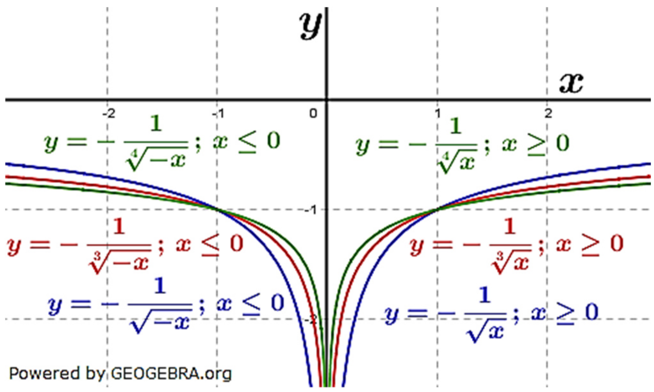


Je größer die Hochzahlen werden, umso flacher wird die Kurve. Alle Kurven gehen durch *P(1|1).* Die Funktionen sind für *x=0* nicht definiert.
Im Übrigen gilt das unter ganzzahlig negativen Werten von q Beschriebene.

Auch diese Funktionen können an der y-Achse gespiegelt werden. Es gilt das unter „Auswirkung rationaler positiver Werte von q„ Beschriebene analog.



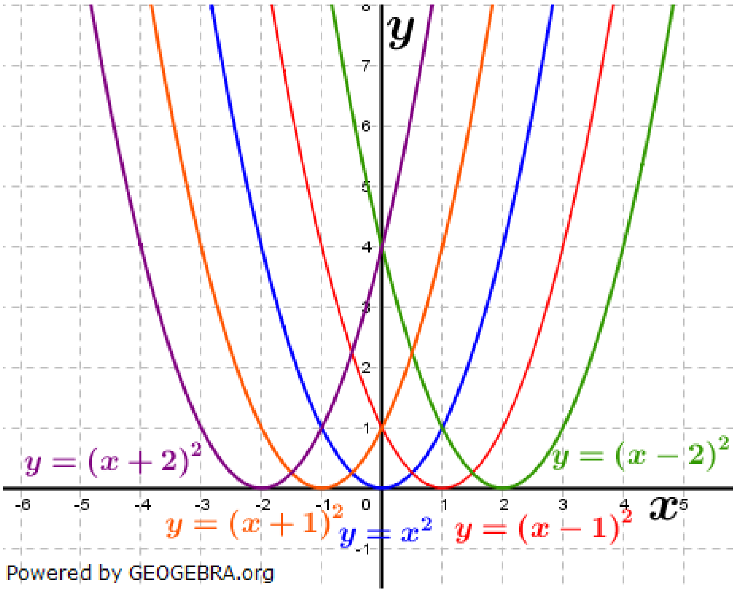
Ist das Vorzeichen von $f(x)$ ein Minuszeichen, so ist der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt. Es gilt das „Auswirkung rationaler positiver Werte von q“ bereits Angeführte analog.



Auswirkung des Parameters b

Der Parameter b beeinflusst die Verschiebung des Graphen der Funktion in x-Richtung. Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies an Hand der Funktionsgleichung $f(x) = (x - b)^2$.
b ist in dieser Form der Gleichung gleichzeitig der Scheitelpunkt $S(b|0)$ auf der x-Achse.

<ins>Für den Parameter b gilt:</ins>
Ist b positiv, wird der Graph in x-Richtung um die Anzahl Einheiten nach rechts verschoben, die durch den Wert von b angegeben ist.
Ist b negativ, wird der Graph in x-Richtung um die Anzahl Einheiten nach links verschoben, die durch den Wert von b angegeben ist.



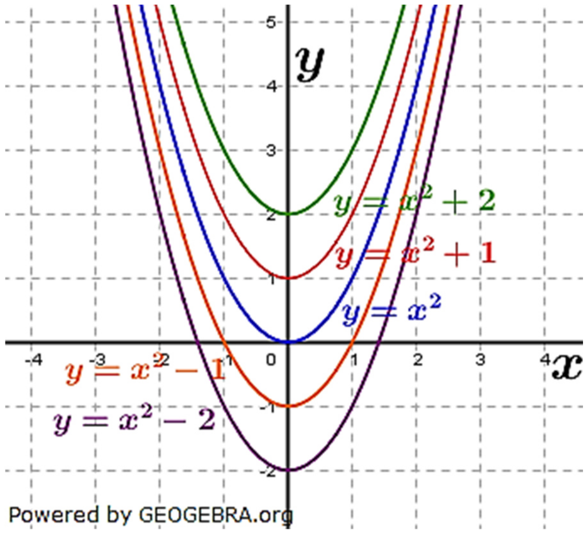
Hinweis:

Ist b positiv, muss in der Funktionsgleichung $(x - b)^2$ angegeben werden.
Ist b negativ, muss in der Funktionsgleichung $(x + b)^2$ angegeben werden.

Auswirkung des Parameters c

Der Parameter c beeinflusst die Verschiebung des Graphen der Funktion in y-Richtung. Die nebenstehende Grafik verdeutlicht dies an Hand der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + c$.
c ist in dieser Form der Gleichung gleichzeitig der Schnittpunkt $S_y(0|c)$ mit der y-Achse.

<ins>Für den Parameter c gilt:</ins>
Ist c positiv, wird der Graph in y-Richtung um die Anzahl Einheiten nach oben verschoben, die durch den Wert von c angegeben ist.
Ist c negativ, wird der Graph in c-Richtung um die Anzahl Einheiten nach unten verschoben, die durch den Wert von c angegeben ist.



Definitions- und Wertebereich von Potenzfunktionen

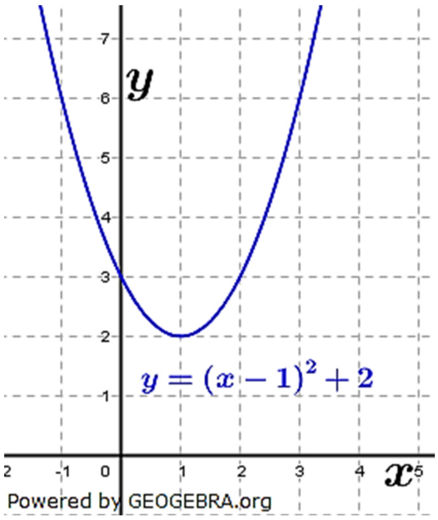
Definitions- und Wertebereich (auch Definitionsmenge bzw. Wertemenge genannt) von Funktionen bestimmen den Verlauf des Graphen einer Funktion, so auch bei den Potenzfunktionen.
Zur Erinnerung hier noch einmal die Definition der beiden Bereiche:

Definitionsbereich (Definitionsmenge):
Der Definitionsbereich umfasst alle für eine Funktion gültigen x-Werte. Er wird mit $\mathbb{D}$ bzw. einfach nur D bezeichnet.

Wertebereich (Wertemenge):
Der Wertebereich umfasst alle für eine Funktion sich aus den gültigen x-Werten ergebende y-Werte. Er wird mit $\mathbb{W}$ bzw. einfach nur W bezeichnet.

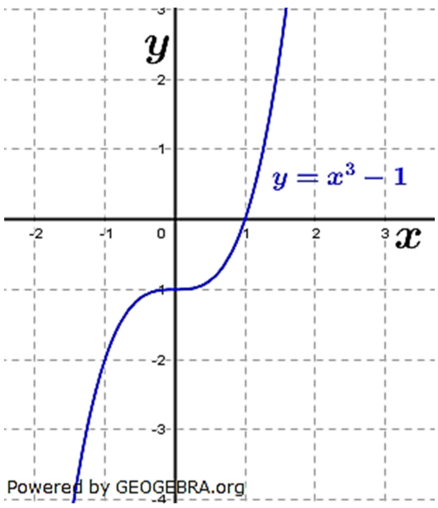
Beispiel 1:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-1)^2 + 2$. Bestimme Definitions- und Wertbereich.

Lösung 1:
Die gegebene Funktion ist eine Potenzfunktion 2. Grades (Parabel). Aus dem nebenstehenden Graphen erkennen wir, dass alle reellen Zahlen der Variablen x zugeordnet werden können, da sich für jedes beliebige x ein ganz bestimmter Funktionswert $f(x) = y$ ergibt. Wir schreiben:
$\mathbb{D}\; x \in \mathbb{R}$ (sprich Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen)



Anders ist dies beim Wertebereich. Der tiefste Punkt des Graphen der Funktion hat den y-Wert $f(x) = 2$. Kleinere y-Werte können nicht vorkommen. Wir schreiben:
$\mathbb{W}\; y \in \mathbb{R} \geq 2$ (sprich der Wertebereich ist die Teilmenge der reellen Zahlen größer oder gleich zwei).

Beispiel 2:
Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = x^3 - 1$. Bestimme Definitions- und Wertbereich.



Lösung 2:
Die gegebene Funktion ist eine Potenzfunktion 3. Grades. Aus dem nebenstehenden Graphen erkennen wir, dass alle reellen Zahlen der Variablen x zugeordnet werden können, da sich für jedes beliebige x ein ganz bestimmter Funktionswert $f(x) = y$ ergibt. Wir schreiben:
$\mathbb{D}\; x \in \mathbb{R}$ (sprich Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen)

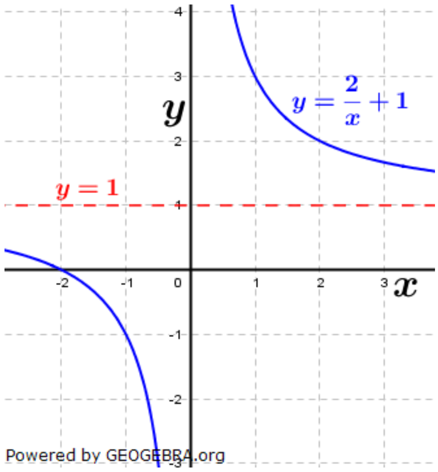
Da der Graph der Funktion aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten verläuft, gilt dies entsprechend auch für den Wertbereich. Wir schreiben:
$\mathbb{W}\ y \in \mathbb{R}$ (sprich der Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen).

Beispiel 3:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} + 1$. Bestimme Definitions- und Wertbereich.

Lösung 3:

Die gegebene Funktion ist eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten ($\frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$). Aus dem nebenstehenden Graphen erkennen wir, dass mit einer einzigen Ausnahme alle reellen Zahlen der Variablen x zugeordnet werden können, da sich für jedes beliebige x ein ganz bestimmter Funktionswert $f(x) = y$ ergibt. Die Ausnahme ist bei $x = 0$, denn dadurch wird ja der Nenner von f zu Null, was einer besonderen Betrachtung bedarf. Wir schreiben:



$\mathbb{D}\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (sprich Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen mit Ausnahme der Null)

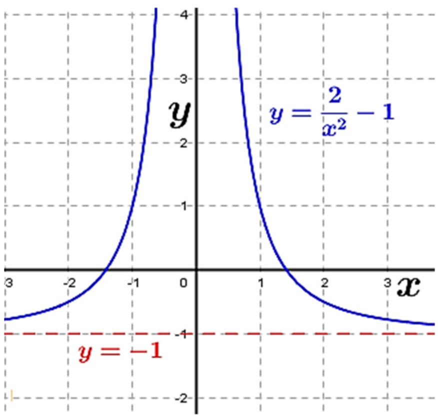
Für den Wertebereich ergibt sich auch eine Ausnahme, in obiger Grafik durch die Parallele zur x-Achse mit $y = 1$ gekennzeichnet. Für $x \to \pm\infty$ läuft $\frac{2}{x} \to 0$. Da jedoch $\frac{2}{x} = 0$ nie erreicht wird, kann die Funktion nie den Wert 1 annehmen. Wir schreiben:
$\mathbb{W}\ y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (sprich der Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen mit Ausnahme von 1).

Beispiel 4:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2} - 1$. Bestimme Definitions- und Wertbereich.

Lösung 4:

Die gegebene Funktion ist eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten ($\frac{2}{x^2} = 2 \cdot x^{-2}$). Aus dem nebenstehenden Graphen erkennen wir, dass mit einer einzigen Ausnahme alle reellen Zahlen der Variablen x zugeordnet werden können, da sich für jedes beliebige x ein ganz bestimmter Funktionswert $f(x) = y$ ergibt. Die Ausnahme ist bei $x = 0$, denn dadurch wird ja der Nenner von f zu Null, was einer besonderen Betrachtung bedarf. Wir schreiben:



$\mathbb{D}\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (sprich Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen mit Ausnahme der Null)

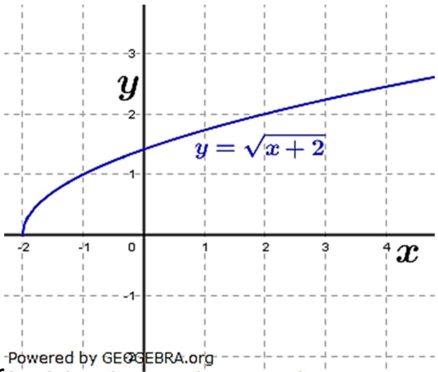
Für den Wertebereich ergibt sich auch eine Ausnahme, in obiger Grafik durch die Parallele zur x-Achse mit $y = -1$ gekennzeichnet. Für $x \to \pm\infty$ läuft $\frac{2}{x^2} \to 0$. Da jedoch $\frac{2}{x^2} = 0$ nie erreicht wird, kann die Funktion nie den Wert -1 annehmen. Wir schreiben:

$\mathbb{W}\ y \in \mathbb{R} > -1$ (sprich der Wertebereich ist die Teilmenge der reellen Zahlen größer als -1).

Beispiel 5:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}$. Bestimme Definitions- und Wertbereich.

Lösung 5:



Die gegebene Funktion ist eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten ($\sqrt{x+2} = (x+2)^{\frac{1}{2}}$. Aus dem nebenstehenden Graphen als auch aus dem Term unter der Wurzel erkennen wir, dass x-Werte kleiner als -2 nicht eingesetzt werden können, da sich für $x < -2$ ein negativer Wert unter der Wurzel ergibt. Wir schreiben:

$\mathbb{D}\ x \in \mathbb{R} \geq -2$ (sprich Definitionsbereich ist die Teilmenge der reellen Zahlen größer gleich -2)

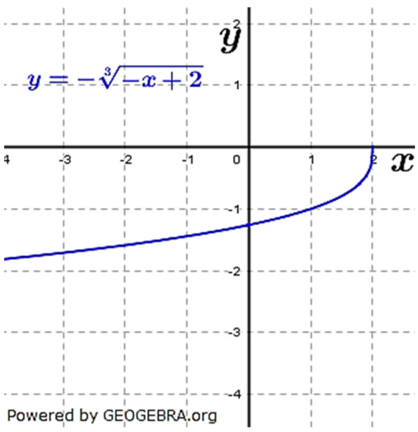
Für den Wertebereich erkennen wir ebenfalls aus der Grafik als auch aus der Funktionsgleichung, dass y-Werte kleiner als 0 nicht vorkommen können. Wir schreiben:

$\mathbb{W}\ y \in \mathbb{R}_+$ (sprich der Wertebereich ist die Teilmenge der positiven reellen Zahlen einschließlich der 0).

Beispiel 6:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\sqrt[3]{-x+1};\ \ x < 0$. Bestimme Definitions- und Wertbereich.

Lösung 6:



Die gegebene Funktion ist eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten ($\sqrt[3]{-x+2} = (-x+2)^{\frac{1}{3}}$. Aus dem nebenstehenden Graphen als auch aus dem Term unter der Wurzel erkennen wir, dass x-Werte größer als 2 nicht eingesetzt werden können, da sich für $x > 2$ ein negativer Wert unter der Wurzel ergibt. Wir schreiben:

$\mathbb{D}\ x \in \mathbb{R} \leq 2$ (sprich Definitionsbereich ist die Teilmenge der reellen Zahlen kleiner gleich 2)

Für den Wertebereich erkennen wir ebenfalls aus der Grafik als auch aus der Funktionsgleichung, dass y-Werte größer als 0 nicht vorkommen können. Wir schreiben:

$\mathbb{W}\ y \in \mathbb{R}_-$ (sprich der Wertebereich ist die Teilmenge der negativen reellen Zahlen einschließlich der 0).

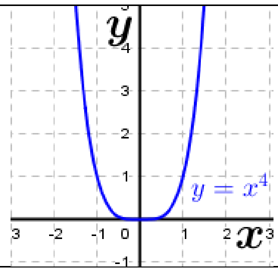
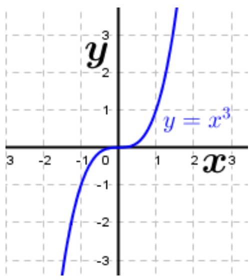
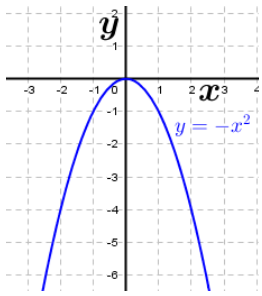
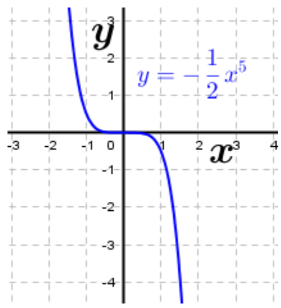
Symmetrien von Potenzfunktionen

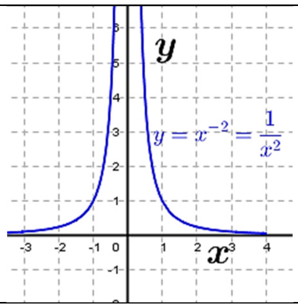
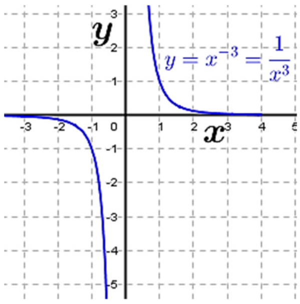
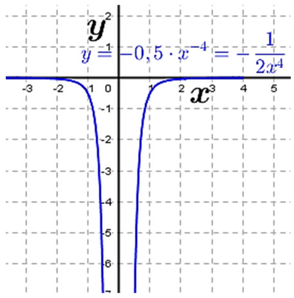
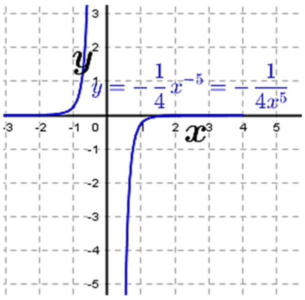
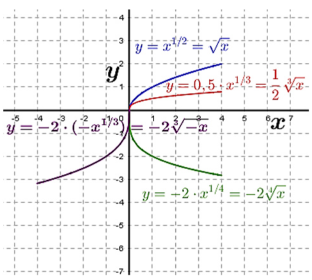
Auch Potenzfunktionen haben ein Symmetrieverhalten. Die nachfolgende Übersicht zeigt dir, bei welcher Art von Potenzfunktion welche Symmetrie vorliegt. Detaillierte Information über Symmetrien findest du im Kapitel

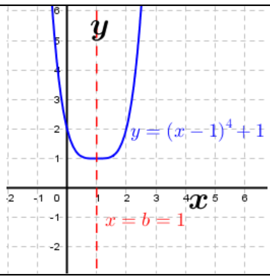
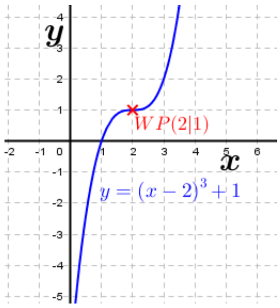
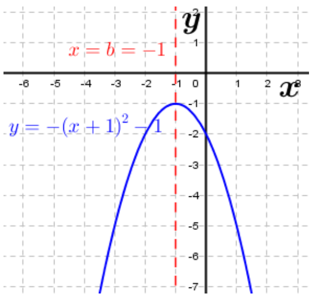
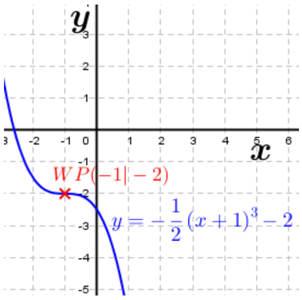
„Graphen und Funktionen analysieren“

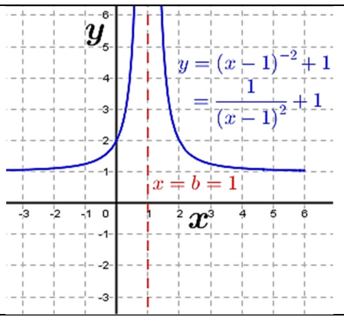
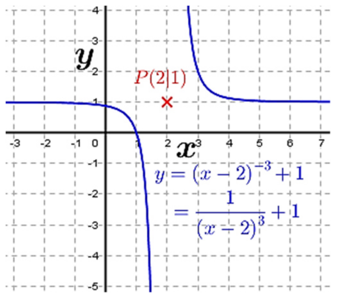
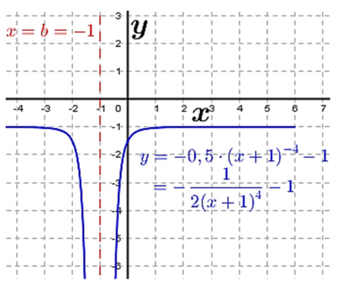
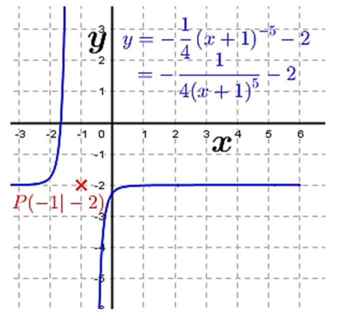
hier im Portal.

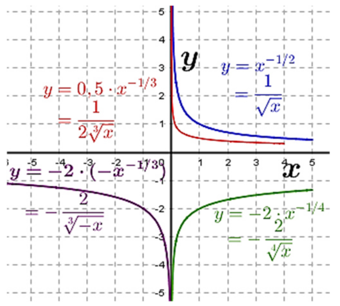
Funktion $f(x) = a(x-b)^q + c;\ \ q \in \mathbb{R}$

Symmetrieverhalten für $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^*$					
a	b	c	$\boldsymbol{q}$	Grafik	Symmetrie
$> \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *gerade*		achsensymmetrisch zur $\boldsymbol{y}$-Achse
$> \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *ungerade*		punktsymmetrisch zum Ursprung
$< \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *gerade*		achsensymmetrisch zur $\boldsymbol{y}$-Achse.
$< \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *ungerade*		punktsymmetrisch zum Ursprung

Symmetrieverhalten für $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}_{-}^{*}$					
a	b	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{q}$	Grafik	Symmetrie
$> \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *gerade*		achsensymmetrisch zur $\boldsymbol{y}$-Achse
$> \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *ungerade*		punktsymmetrisch zum Ursprung
$< \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *gerade*		achsensymmetrisch zur $\boldsymbol{y}$-Achse.
$< \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *ungerade*		punktsymmetrisch zum Ursprung
Symmetrieverhalten für $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}_{+}^{*}$					
$\neq \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	rational $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}} > \mathbf{0}$		Potenzfunktionen mit rationalen positivem Exponenten $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}} > \mathbf{0}$ haben keine Symmetrie

Symmetrieverhalten für $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^*$					
a	b	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{q}$	Grafik	Symmetrie
$> \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	rational positiv *gerade*		achsensymmetrisch zur Achse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$> \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *ungerade*		punktsymmetrisch zum (Wende-) Punkt $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{c})$
$< \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *gerade*		achsensymmetrisch zur Achse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$< \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig positiv *ungerade*		punktsymmetrisch zum (Wende-) Punkt $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{c})$

Symmetrieverhalten für $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}_-^*$					
a	b	c	q	Grafik	Symmetrie
$> \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *gerade*		achsensymmetrisch zur Achse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$> \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *ungerade*		punktsymmetrisch zum Punkt $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{c})$
$< \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *gerade*		achsensymmetrisch zur Achse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$< \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	ganzzahlig negativ *ungerade*		punktsymmetrisch zum Punkt $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{c})$

Symmetrieverhalten für $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}_-^*$					
$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	$\neq \mathbf{0}$	rational $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}} < \mathbf{0}$		Potenzfunktionen mit rationalen negativem Exponenten $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}} < \mathbf{0}$ haben keine Symmetrie

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1
Dokument mit 27 Aufgaben

Aufgabe A1

Zeichne die Graphen der Funktionen im angegebenen Intervall. Skaliere die y-Achse passend.

a) $f(x) = 0{,}2x^4;\ -3 \le x \le -3$ b) $f(x) = -0{,}4x^3;\ -3 \le x \le 3$

c) $f(x) = -0{,}1x^6;\ -4 \le x \le 4$

Aufgabe A2

a) Bestimme drei Punkte, die auf dem Graphen der Potenzfunktion f mit $f(x) = -0{,}5x^3$ liegen.

b) Die Punkte P, Q, R und S liegen auf dem Graphen der Potenzfunktion f mit $f(x) = \frac{3}{2}x^5$. Bestimme jeweils die fehlende Koordiate.

$P(2|y)$ $Q(-2|y)$ $R(x|0{,}000015)$ $S(x|-96)$

Aufgabe A3

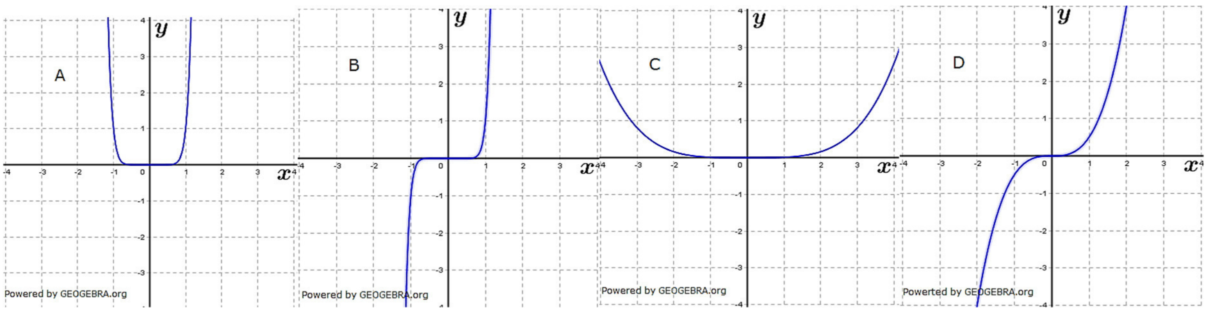
Skizziere die Graphen der Funktionen f, g, h und j. Vergleiche die Graphen und begründe Gemeinsamkeiten und Unterschiede mithilfe der Funktionsgleichung.

$f(x) = 0{,}1x^2$ $g(x) = 0{,}1x^3$ $h(x) = 0{,}1x^4$ $j(x) = 0{,}1x^5$

Aufgabe A4

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe.

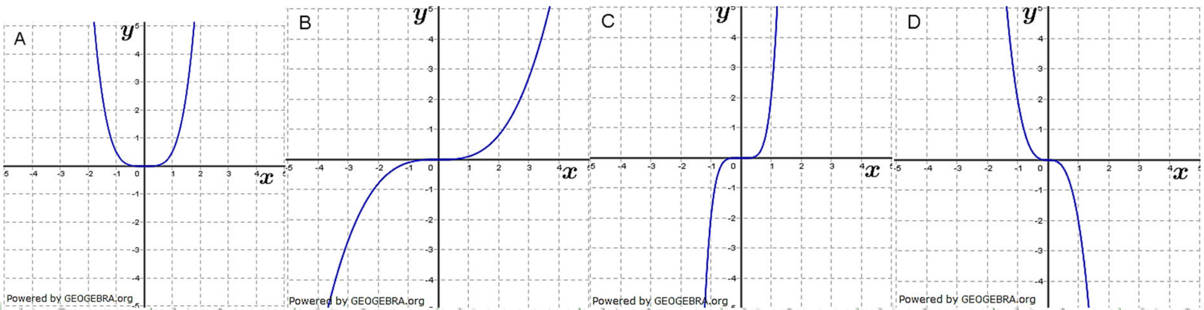
$f(x) = 0{,}01x^4$ $g(x) = 0{,}5x^3$ $h(x) = x^{11}$ $i(x) = x^{10}$



Aufgabe A5

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe.

$f(x) = 0{,}1x^3$ $g(x) = -2x^3$ $h(x) = 0{,}5x^4$ $i(x) = 2x^5$



Aufgabe A6

Bestimme die Gleichung der Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$, deren Schaubild durch die Punkte P und Q verläuft.

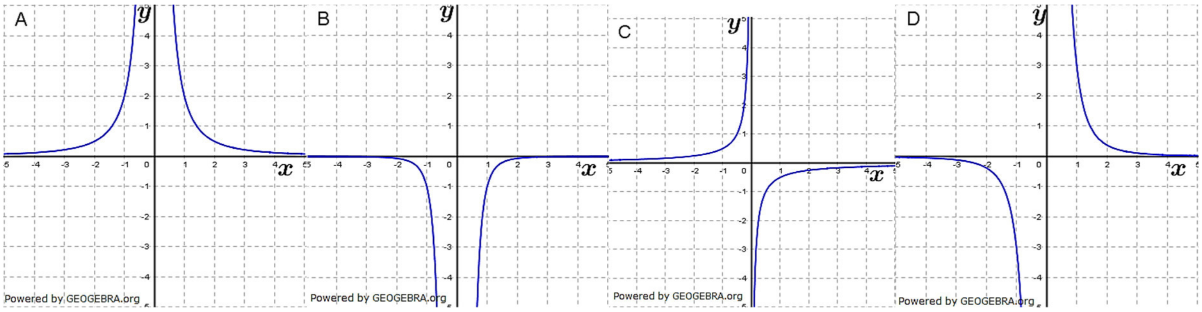
a) $P(1|0{,}25)$ und $Q(2|4)$ b) $P(0{,}5|2)$ und $Q(-0{,}25|8)$ c) $P(2|-\frac{32}{3})$ und $Q(3|-81)$

d) $P(2|-4)$ und $Q(3|13{,}5)$ e) $P(-1{,}5|8)$ und $Q(3|-1)$ f) $P(-3|-\frac{27}{5})$ und $Q(5|25)$

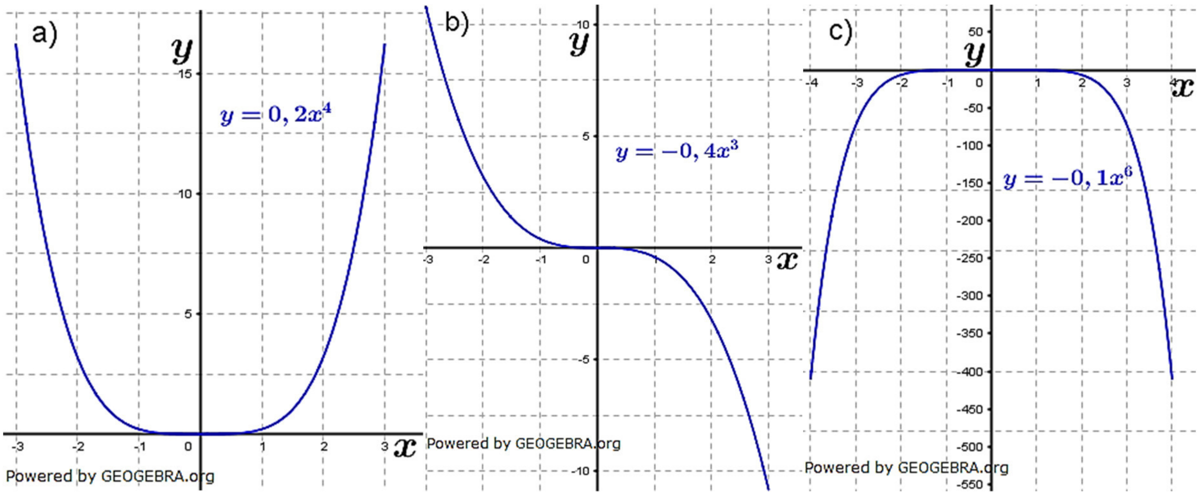
Aufgabe A7

Ordne den Funktionsgleichungen die Graphen zu und begründe.

$f(x) = -0{,}5x^{-1}$ $g(x) = 2x^{-2}$ $h(x) = 3x^{-3}$ $i(x) = -x^{-4}$



Lösung A1



Lösung A2

a) $f(x) = -0{,}5x^3$

$f(0) = 0$ $\quad$ $f(1) = -0{,}5$ $\quad$ $f(-1) = 0{,}5$

$P(0|0)$ $\quad$ $Q(1|-0{,}5)$ $\quad$ $R(-1|0{,}5)$

b) $f(x) = \frac{3}{2}x^5$

$f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^5 = 48 \;=>\; P(2|48)$

$f(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2)^5 = -48 \;=>\; Q(-2|-48)$

$0{,}000015 = \frac{3}{2}x^5 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$0{,}00001 = x^5 \quad | \sqrt[5]{\ }$

$x = 0{,}1 \;=>\; R(0{,}1|0{,}000015)$

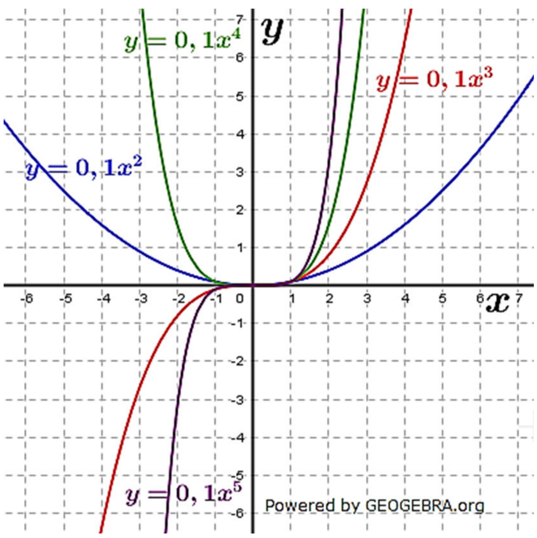
$-96 = \frac{3}{2}x^5 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$-64 = x^5 \quad | \sqrt[5]{\ }$

$x = -6 \;=>\; S(-3|-96)$

Lösung A3

Alle vier Graphen sind in y-Richtung mit dem Faktor $k = 0{,}1$ gestreckt und gehen durch den Ursprung.



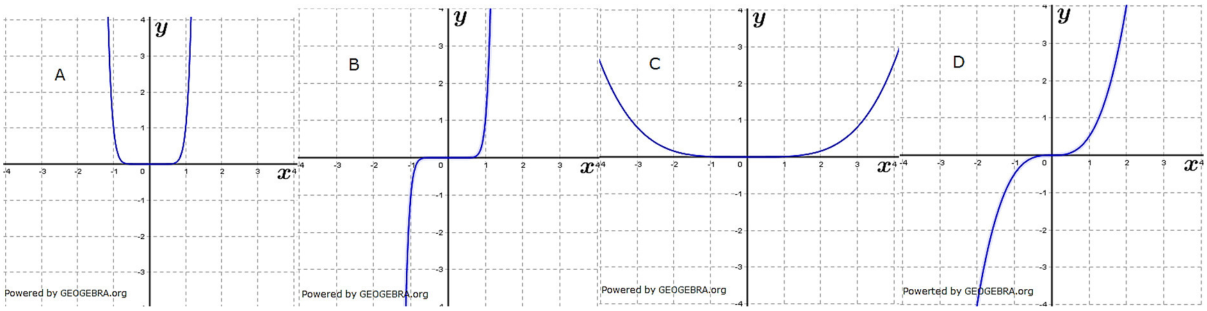
Für alle Graphen gilt: Je größer die Potenz von x ist, umso steiler verläuft der Graph.

Die Graphen der Funktionen mit geradzahligen Hochzahlen verlaufen aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten, sie haben im Ursprung einen Tiefpunkt.

Die Graphen der Funktionen mit ungeradzahligen Hochzahlen verlaufen aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten, sie haben im Ursprung einen Wendepunkt.

Lösung A4

$f(x) = 0{,}01x^4$ $g(x) = 0{,}5x^3$ $h(x) = x^{11}$ $i(x) = x^{10}$



Graphik A ist achsensymmetrisch. Sie gehört zur Funktion i mit $i(x) = x^{10}$, da die Funktionsgleichung eine große geradzahlige Potenz von x aufweist.

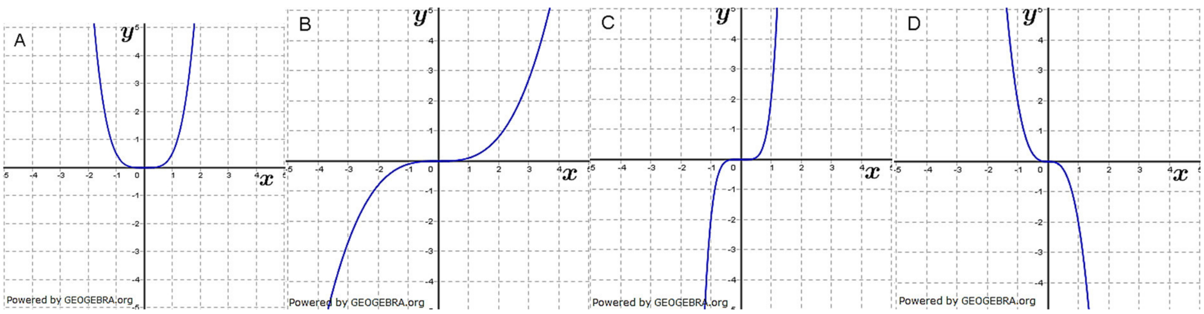
Graphik B ist punktsymmetrisch. Sie gehört zur Funktion h mit $h(x) = x^{11}$, da die Funktionsgleichung eine große ungeradzahlige Potenz von x aufweist.

Graphik C ist achsensymmetrisch. Sie gehört zur Funktion f mit $f(x) = 0{,}01x^4$, da die Funktionsgleichung eine kleinere geradzahlige Potenz von x gegenüber Graphik A aufweist.

Graphik D ist punktsymmetrisch. Sie gehört zur Funktion g mit $g(x) = 0{,}5x^3$, da die Funktionsgleichung eine kleinere ungeradzahlige Potenz von x gegenüber Graphik B aufweist.

Lösung A5

$f(x) = 0{,}1x^3$ $g(x) = -2x^3$ $h(x) = 0{,}5x^4$ $i(x) = 2x^5$



Graphik A ist achsensymmetrisch. Sie gehört zur Funktion h mit $h(x) = 0{,}5x^4$, da die Funktionsgleichung eine geradzahlige Potenz von x aufweist.

Graphik B ist punktsymmetrisch. Sie gehört zur Funktion f mit $f(x) = 0{,}1x^3$, da die Funktionsgleichung eine ungeradzahlige Potenz von x aufweist und eine Stauchung mit $k = 0{,}1$.

Graphik C ist punktsymmetrisch. Sie gehört zur Funktion i mit $i(x) = 2x^5$, da die Funktionsgleichung eine größere ungeradzahlige Potenz von x.

Graphik D ist punktsymmetrisch. Sie gehört zur Funktion g mit $g(x) = -2x^3$, da die Funktionsgleichung eine ungeradzahlige Potenz von x aufweist und wegen $a = -2$ an der x-Ache gespiegelt ist.

Lösung A6

$f(x) = a \cdot x^n$

Detaillierte Lösung für a)

$P(1|0{,}25)$ und $Q(2|4)$

(1) $0{,}25 = a \cdot 1^n$ | Punktprobe mit $P(1|0{,}25)$

(2) $4 = a \cdot 2^n$ | Punktprobe mit $P(2|4)$

Aus (1) folgt:

Jedes 1^n ist 1.

$a = 0{,}25$

$a \rightarrow (2)$

$4 = 0{,}25 \cdot 2^n$ | $\cdot 4$

$16 = 2^n$ => $n = 4$

$f(x) = 0{,}25 \cdot x^4$

b) $P(0{,}5|2)$ und $Q(-0{,}25|8)$

(1) $2 = a \cdot 0{,}5^n$ | Punktprobe mit $P(0{,}5|2)$

(2) $8 = a \cdot (-0{,}25)^n$ | Punktprobe mit $P(-0{,}25|8)$

(2):(1)

$\frac{8}{2} = \frac{a \cdot (-0{,}25)^n}{a \cdot 0{,}5^n}$

$4 = \left(\frac{-0{,}25}{0{,}5}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$n = -2$, denn $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = (-2)^2 = 4$

$2 = a \cdot 0{,}5^{-2} = a \cdot 2^2$

$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$f(x) = 0{,}5 \cdot x^{-2}$

c) $P(2|-\frac{32}{3})$ und $Q(3|-81)$ => $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^5$

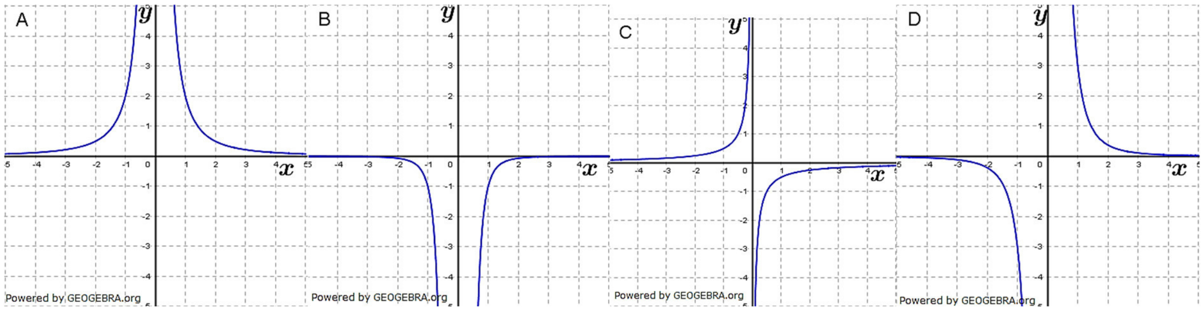
d) $P(2|-4)$ und $Q(3|-13{,}5)$ => $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^3$

e) $P(-1{,}5|8)$ und $Q(3|-1)$ => $f(x) = -27 \cdot x^{-3}$

f) $P(-3|-\frac{27}{5})$ und $Q(5|25)$ => $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

Lösung A7

$f(x) = -0{,}5x^{-1}$ $\quad g(x) = 2x^{-2}$ $\quad h(x) = 3x^{-3}$ $\quad i(x) = -x^{-4}$



Graphik A ist achsensymmetrisch. Sie gehört zur Funktion g mit $g(x) = 2x^{-2}$, da die Funktionsgleichung eine geradzahlige negative Potenz von x aufweist und nicht an der x-Ache gespiegelt ist.

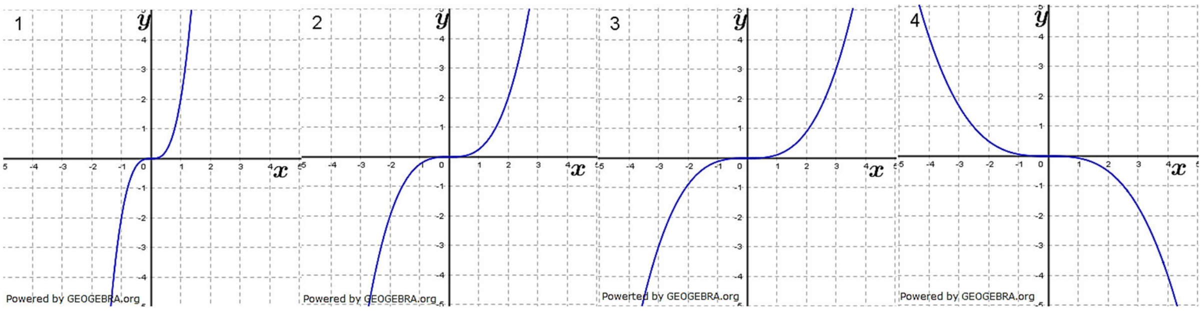
Graphik B ist achsensymmetrisch. Sie gehört zur Funktion i mit $i(x) = -x^{-4}$, da die Funktionsgleichung eine geradzahlige negative Potenz von x aufweist und zusätzlich an der x-Achse gespiegelt ist.

Graphik C ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Sie gehört zur Funktion f mit $f(x) = -0{,}x^{-1}$, da die Funktionsgleichung eine ungeradzahlige negative Potenz von x aufweist und wegen $a = -0{,}5$ an der x-Achse gespiegelt ist.

Graphik D ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Sie gehört zur Funktion h mit $h(x) = 3x^{-3}$, da die Funktionsgleichung eine ungeradzahlige negative Potenz von x aufweist und nicht an der x-Achse gespiegelt ist.

Aufgabe A1

Abgebildet sind Schaubilder der Funktionen f_i mit $f_i(x) = a_i \cdot x^3$.
Bestimme für jedes der Schaubilder die Werte von a_i.



Aufgabe A2

Beschreibe möglichst viele Eigenschaften, die jeweils zwei der folgenden Funktionen gemeinsam haben:

$f(x) = \frac{3}{4}x \quad g(x) = \frac{3}{4}x^2 \quad h(x) = \frac{3}{4}x^3 \quad i(x) = -\frac{3}{4}x \quad j(x) = -\frac{3}{4}x^2 \quad k(x) = -\frac{3}{4}x^3$

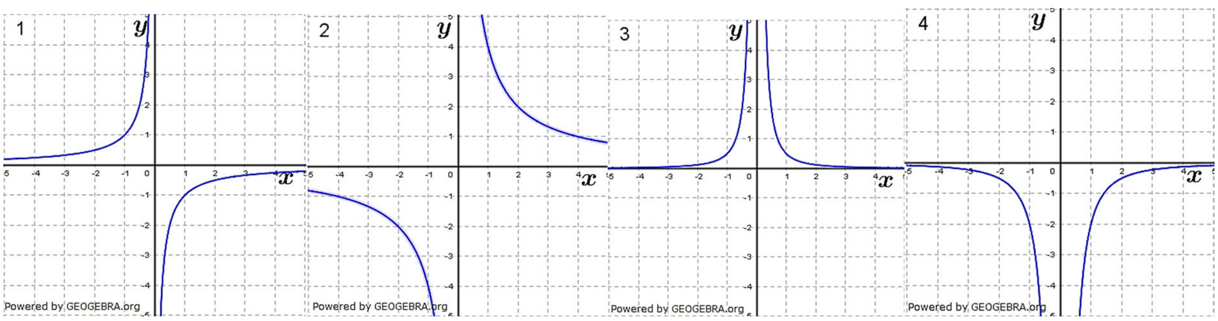
Aufgabe A3

Bestimme die Gleichung der Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$, deren Schaubild durch die Punkte P und Q verläuft.

a) $P(2|8)$ und $Q\left(-3\middle|\frac{81}{2}\right)$
b) $P(2|1)$ und $Q\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$
c) $P(4|4)$ und $Q(9|6)$
d) $P\left(2\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $Q(4|2)$
e) $P(4|1)$ und $Q(1|2)$
f) $P(2|-4)$ und $Q\left(-3\middle|-\frac{81}{4}\right)$

Aufgabe A4

Abgebildet sind Schaubilder der Funktionen f_i mit $f_i(x) = a_i \cdot x^{n_i}$.
Bestimme für jedes der Schaubilder die Werte von a_i und n_i.



Aufgabe A5

Gib zwei Funktionsgleichungen einer Potenzfunktion an, die zu der Aussage passt:

a) Der zugehörige Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
b) Der zugehörige Graph geht durch den Punkt $P(1|3)$.
c) Die zugehörigen Funktionswerte sind alle positiv oder Null.
d) Verdoppelt man den x-Wert, so verachtfacht sich der zugehörige y-Wert.

Aufgabe A6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{10}x^4$, ihr Schaubild sei K.

a) Zeichne das Schaubild K von f für $-3 \le x \le 3$.

b) Überprüfe durch Rechnung, ob die Punkte $A\left(\frac{5}{4}\middle|\frac{125}{128}\right)$ und $B\left(-\frac{8}{3}\middle|\frac{2048}{405}\right)$ auf K liegen.

c) Berechne die fehlenden Koordinaten, so dass C und D Punkte von K sind: $C(1{,}3|y_C)$ und $D\left(x_D\middle|\frac{128}{3125}\right)$.

d) Schneide die Kurve K mit der Geraden mit der Gleichung $y=10$.
Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe A7

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=3x^{-3}$, ihr Schaubild sei K.

a) Zeichne das Schaubild K von f für $-5 \le x \le 5$.

b) Überprüfe durch Rechnung, ob die Punkte $A\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{9}\right)$ und $B\left(-\frac{12}{5}\middle|-\frac{125}{576}\right)$ auf K liegen.

c) Berechne die fehlenden Koordinaten, so dass C und D Punkte von K sind: $C\left(-\frac{3}{4}\middle|y_C\right)$ und $D\left(x_D\middle|\frac{81}{8}\right)$.

d) Schneide die Kurve K mit der Geraden mit der Gleichung $y=\frac{8}{3}$.
Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte.

Lösung A1

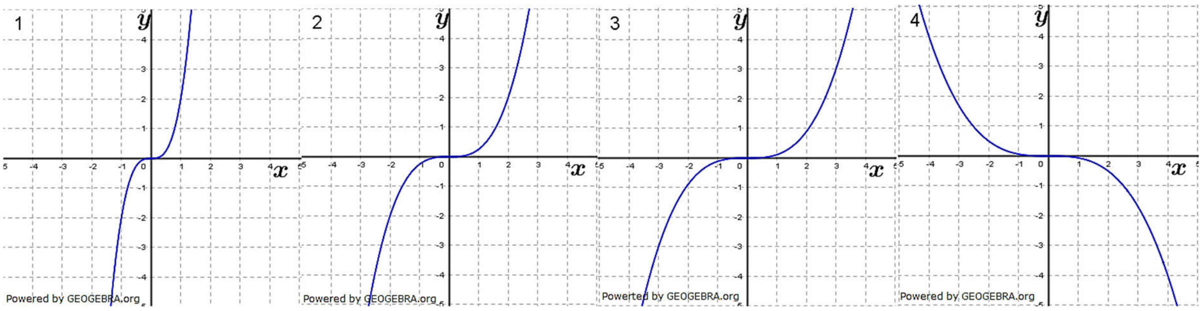


Bild 1: $f_1(x) = 2 \cdot x^3$ wegen $f_1(1) = 2$
Bild 2: $f_2(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3$ wegen $f_2(2) = 2$
Bild 3: $f_3(x) = \frac{1}{9} \cdot x^3$ wegen $f_3(3) = 3$
Bild 4: $f_4(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3$ wegen $f_4(4) = -4$

Lösung A2

1. $f(x) = \frac{3}{4}x$ und $i(x) = -\frac{3}{4}x$
   f und i gehen durch den Ursprung und schneiden sich dort. Die Graphen von f und i sind Geraden. i ist die Spiegelung von f an der x-Achse.
2. $g(x) = \frac{3}{4}x^2$ und $j(x) = -\frac{3}{4}x^2$
   g und j gehen durch den Ursprung und berühren sich dort in ihrem Scheitelpunkt. Die Graphen von g und j sind Parabeln, Potenzfunktionen mit ganzem, geradzahligem Exponenten. j ist die Spiegelung von g an der x-Achse.
3. $h(x) = \frac{3}{4}x^3$ und $k(x) = -\frac{3}{4}x^3$
   h und k gehen durch den Ursprung und und schneiden sich dort. Die Graphen von h und k sind Potenzfunktionen mit ganzem, ungeradzahligem Exponenten. k ist die Spiegelung von h an der x-Achse.

Lösung A3

$f(x) = a \cdot x^n$
Detaillierte Lösung für a)

$P(2|8)$ und $Q\left(-3\middle|\frac{81}{2}\right)$

(1) $\quad 8 = a \cdot 2^n \quad$ | Punktprobe mit $P(2|8)$

(2) $\quad \frac{81}{2} = a \cdot (-3)^n \quad$ | Punktprobe mit $P\left(-3\middle|\frac{81}{2}\right)$

(2):(1)

$$\frac{\frac{81}{2}}{8} = \frac{a \cdot (-3)^n}{a \cdot 2^n}$$
$$\frac{81}{16} = \left(\frac{-3}{2}\right)^n$$
$n = 4$, denn $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$
$$8 = a \cdot 2^4 = a \cdot 16$$
$$a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$f(x) = 0{,}5 \cdot x^4$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Detaillierte Lösung für b)

$P(2|1)$ und $Q\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$

(1) $1 = a \cdot 2^n$ | Punktprobe mit $P(2|1)$

(2) $\frac{1}{4} = a \cdot 4^n$ | Punktprobe mit $P\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$

(2):(1)

$$\frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{a \cdot 4^n}{a \cdot 2^n}$$

$$\frac{1}{4} = 2^n$$

$n = -2$, denn $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$$1 = a \cdot 2^{-2} = \frac{a}{4}$$

$$a = 4$$

$$f(x) = 4 \cdot x^{-2}$$

c) $P(4|4)$ und $Q(9|6)$ => $f(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

d) $P\left(2\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $Q(4|2)$ => $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{3}{2}}$

e) $P(4|1)$ und $Q(1|2)$ => $f(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

f) $P(2|-4)$ und $Q\left(-3\middle|-\frac{81}{4}\right)$ => $f(x) = -\frac{1}{4}x^4$

Lösung A4

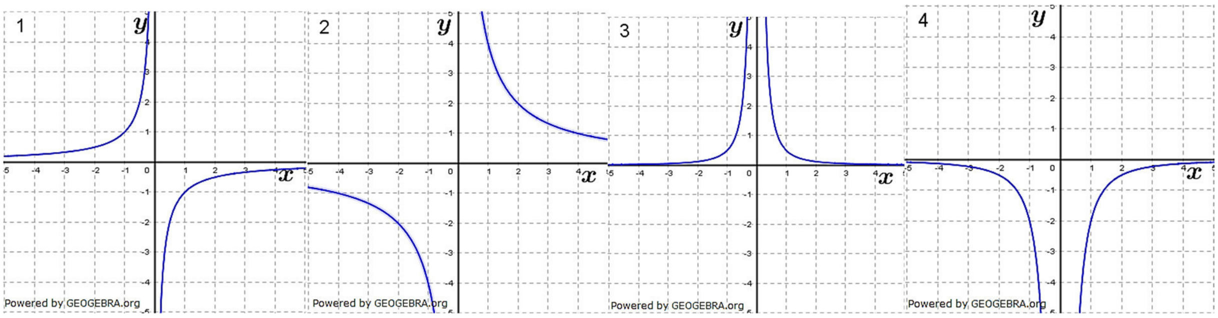


Bild 1: $f_1(x) = -x^{-1}$ wegen $f_1(1) = -1$

Bild 2: $f_2(x) = 4 \cdot x^{-1}$ wegen $f_2(1) = 4$ und $f_2(4) = 1$

Bild 3: $f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ wegen $f_3(1) = \frac{1}{2}$

Bild 4: $f_4(x) = -2 \cdot x^{-2}$ wegen $f_4(1) = -2$

Lösung A5

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{-2}$

b) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x^{-2}$

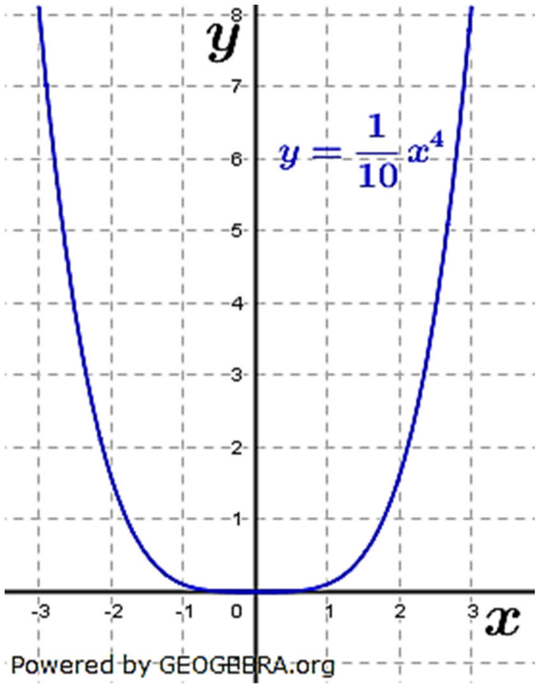
c) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^{-4}$

d) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x^3$

Lösung A6

$f(x) = \frac{1}{10}x^4$

a) Grafik siehe rechts.



b) $A \in K$

$\frac{125}{128} \overset{?}{=} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$

$\frac{125}{128} \neq \frac{625}{2560} = \frac{125}{512}$

$A \notin K$

$B \in K$

$\frac{2048}{405} \overset{?}{=} \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^4$

$\frac{2048}{405} = \frac{4096}{8410} = \frac{2048}{405}$

$B \in K$

c) $y_C = \frac{1}{10} \cdot 1{,}3^4 = 0{,}28561$

$C(1{,}3|0{,}28561)$

$\frac{128}{3125} = \frac{1}{10} \cdot x_D^4 \qquad | \cdot 10$

$\frac{1280}{3125} = x_D^4 \qquad | \sqrt[4]{}$

$x_{D_{1,2}} = \pm\frac{4}{5}$

d) $f(x) = 10 = \frac{1}{10}x^4$

$x^4 = 100 \qquad | \sqrt[4]{}$

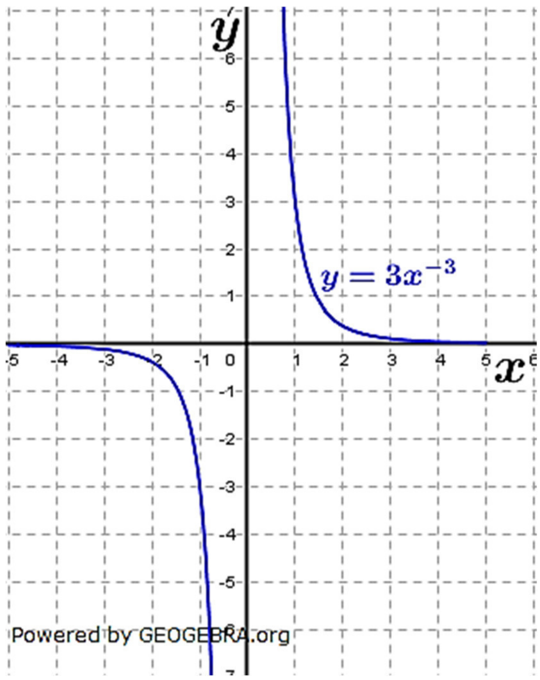
$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{100} \approx \pm 3{,}16$

$S_1(\sqrt[4]{100}|10); \quad S_2(-\sqrt[4]{100}|10)$

Lösung A7

$f(x) = 3x^{-3}$

a) Grafik siehe rechts.



b) $A \in K$

$\frac{1}{9} \overset{?}{=} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

$\frac{1}{9} \neq \frac{8}{9}$

$A \notin K$

$B \in K$

$-\frac{125}{576} \overset{?}{=} 3 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)^{-3}$

$-\frac{125}{576} = -\frac{125}{576}$

$B \in K$

c) $y_C = 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = -\frac{64}{9}$

$C\left(-\frac{3}{4}\middle|-\frac{64}{9}\right)$

$\frac{81}{8} = 3 \cdot x_D^{-3} \qquad | \cdot 10$

$\frac{81}{24} = x_D^{-3}$

$\frac{24}{81} = x_D^3 \qquad | \sqrt[3]{}$

$x_{D_{1,2}} = \frac{2}{3}$

d) $f(x) = \frac{8}{3} = 3x^{-3}$

$x^{-3} = 8 \qquad | \sqrt[4]{}$

$x = \frac{1}{2}$

$S\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{8}{3}\right)$

Aufgabe A1

Gib für die nachfolgenden Funktionen sowohl die Definitionsmenge als auch die Wertemenge an. Beschreibe den Verlauf des Graphen.

a) $f(x) = 1{,}2 \cdot \frac{1}{x^6}$ b) $f(x) = -0{,}4 \cdot x^{-5}$
c) $f(x) = 1{,}5 \cdot x^{2{,}2}$ d) $f(x) = 2 \cdot x^{-1{,}5}$

Aufgabe A2

Berechne für den gegebenen Funktionswert den x-Wert.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3};\ y = \frac{1}{8}$ b) $f(x) = 2 \cdot x^{-4};\ y = 0{,}008$
c) $f(x) = 4 \cdot x^{\frac{1}{2}};\ y = 24$ d) $f(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}};\ y = \frac{1}{32}$

Aufgabe A3

Bestimme die Gleichung der Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^k$, deren Schaubild durch die Punkte P und Q verläuft.

a) $P(1|3)$ und $Q\left(3\middle|\frac{1}{3}\right)$ b) $P(1|-8)$ und $Q(2|-0{,}25)$
c) $P(2|3)$ und $Q(4|1{,}5)$ d) $P(1|-2)$ und $Q\left(2\middle|-\frac{1}{4}\right)$
e) $P(1|2)$ und $Q\left(2\middle|\frac{1}{8}\right)$ f) $P\left(2\middle|\frac{1}{2}\right)$ und $Q\left(4\middle|\frac{1}{16}\right)$

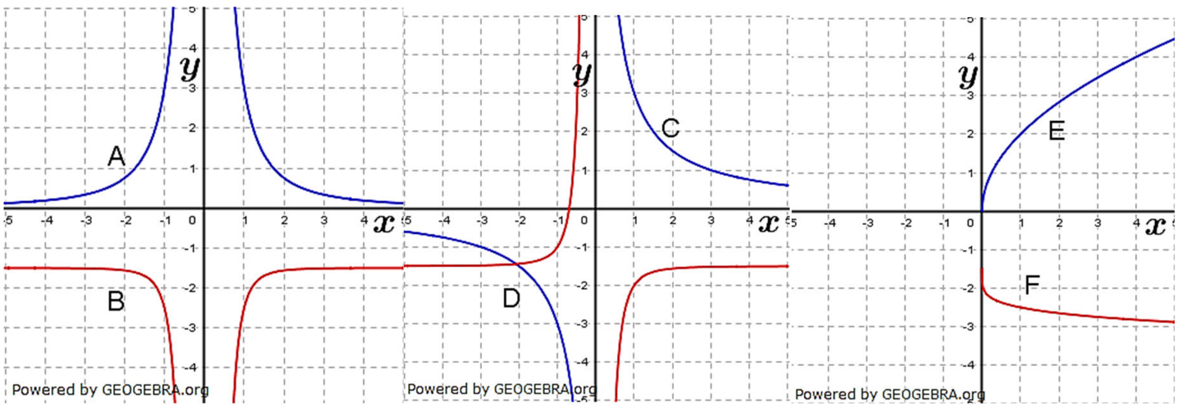
Aufgabe A4

a) Beschreibe das Verhalten der Potenzfunktionen mit den Termen $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^3}$ für sehr kleine und sehr große Werte.
b) Beschreibe das Verhalten dieser Potenzfunktionen, wenn sich x der Zahl Null von links bzw. von rechts nähert. Veranschauliche deine Aussage mithilfe von Wertetabellen.

Aufgabe A5

Ordne jedem Graphen eine der Funktionen zu.

$f_1(x) = 3 \cdot x^{-1}$ $f_2(x) = -x^{0{,}2} - 1{,}5$ $f_3(x) = -x^{-4} - 1{,}5$
$f_4(x) = 3 \cdot x^{-2}$ $f_5(x) = 2 \cdot x^{0{,}5}$ $f_6(x) = -0{,}5 \cdot x^{-3} - 1{,}5$



Aufgabe A6

Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von f um x_0 in x-Richtung und y_0 in y-Richtung verschiebt.
Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie.

a) $f(x) = x^3$ um $x_0 = 2$ nach rechts und $y_0 = -4$ nach unten
b) $f(x) = x^4$ um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = 2$ nach oben
c) $f(x) = x^{-3}$ um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = 3$ nach oben
d) $f(x) = x^{-2}$ um $x_0 = -4$ nach links und $y_0 = -3$ nach unten

Aufgabe A7

Untersuche die folgenden Funktionen auf Punkt- und Achsensymmetrie und skizziere ihre Schaubilder.

a)	$f(x) = \frac{1}{3}x$	d)	$f(x) = \frac{1}{2x}$	g)	$f(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}$	j)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4$
b)	$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$	e)	$f(x) = \frac{1}{2x} + 1$	h)	$f(x) = \frac{1}{3}x^3$	k)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4$
c)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$	f)	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	i)	$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1$	l)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

Aufgabe A8

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 0{,}5x + 1$, g mit $g(x) = x^3$ sowie h mit $h(x) = x^{-2} + 3$.
Zeichne die Graphen dieser Funktionen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem und spiegele sie dann

a) an der x-Achse b) an der y-Achse c) am Ursprung

und gib jeweils die Gleichung der gespiegelten Kurve an.

Lösung A1

a) $\mathbb{D}: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ \mathbb{W}: 0 < y$ verläuft im II. Quadranten im Intervall $I =]-\infty; 0[$ streng monoton steigend und im I. Quadranten im Intervall $I =]0; \infty[$ streng monoton fallend.

b) $\mathbb{D}: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ \mathbb{W}: y \in \mathbb{R}$ verläuft im II. Quadranten im Intervall $I =]-\infty; 0[$ streng monoton steigend und im Intervall $I =]0; \infty[$ ebenfalls streng monoton steigend.

c) $\mathbb{D}: x \in \mathbb{R}_+;\ \mathbb{W}: y \in \mathbb{R}_+$ verläuft im I. Quadranten im Intervall $I =]0; \infty[$ streng monoton steigend (Wurzelfunktion).

d) $\mathbb{D}: x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\};\ \mathbb{W}: y \in \mathbb{R}_+$ verläuft im I. Quadranten im Intervall $I =]0; \infty[$ streng monoton fallend (Hyperbel).

Lösung A2

a) $f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} = 8^3 = 512$

b) $f(0{,}008) = 2 \cdot 0{,}008^{-4} = \frac{2}{0{,}008^4} = 488281250$

c) $f(24) = 4 \cdot 24^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{4 \cdot 6} = 8 \cdot \sqrt{6}$

d) $f\left(\frac{1}{32}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2 \cdot 32^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 8} = 4 \cdot \sqrt[3]{4}$

Lösung A3

$f(x) = a \cdot x^k$

Detaillierte Lösung für a)

$P(1|3)$ und $Q\left(3\middle|\frac{1}{3}\right)$

(1) $3 = a \cdot 1^k$ | Punktprobe mit $P(1|3)$

$a = 3$

(2) $\frac{1}{3} = 3 \cdot 3^k$ | Punktprobe mit $P\left(3\middle|\frac{1}{3}\right)$

$1 = 3^2 \cdot 3^k \quad => \quad k = -2$

$f(x) = 3 \cdot x^{-2}$

Detaillierte Lösung für b)

$P(1|-8)$ und $Q(2|-0{,}25)$

(1) $-8 = a \cdot 1^k$ | Punktprobe mit $P(1|-8)$

$a = -8$

(2) $-0{,}25 = -8 \cdot 2^k$ | Punktprobe mit $P(2|-0{,}25)$

$\frac{1}{32} = 2^k \quad => \quad k = -5$

$f(x) = -8 \cdot x^{-5}$

c) $P(2|3)$ und $Q(4|1{,}5)$ $\quad => \quad f(x) = 6 \cdot x^{-1}$

d) $P(1|-2)$ und $Q\left(2\middle|-\frac{1}{4}\right)$ $\quad => \quad f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{3}{2}}$

e) $P(4|1)$ und $Q(1|2)$ $\quad => \quad f(x) = -2 \cdot x^{-3}$

f) $P\left(2\middle|\frac{1}{2}\right)$ und $Q\left(4\middle|\frac{1}{16}\right)$ $\quad => \quad f(x) = 4x^{-3}$

Lösung A4

a) $\frac{1}{x^2}$: $\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{1}{x^2} = 0$

Für $x \to_{\nearrow} 0$ gilt $\frac{1}{x^2} \to \infty$

Für $x \to 0_{\nwarrow}$ gilt $\frac{1}{x^2} \to \infty$

$\frac{1}{x^3}$: $\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{1}{x^3} = 0$

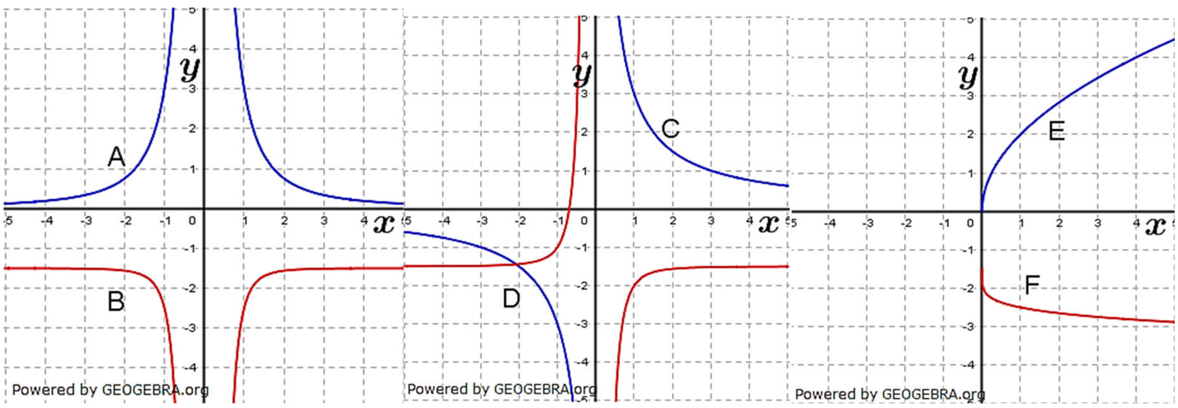
Für $x \to_{\nearrow} 0$ gilt $\frac{1}{x^3} \to -\infty$

Für $x \to 0_{\nwarrow}$ gilt $\frac{1}{x^3} \to \infty$

b)

x	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}5$	1
$\frac{1}{x^2}$	1	4	10	20	100	1000	$-$	1000	100	20	10	4	1
$\frac{1}{x^3}$	-1	-8	-1000	-8000	-10^6	-10^9	$-$	10^9	10^6	8000	1000	8	1

Lösung A5



A: $f_4(x) = 3 \cdot x^{-2}$

B: $f_3(x) = -x^{-4} - 1{,}5$

C: $f_1(x) = 3 \cdot x^{-1}$

D: $f_6(x) = -0{,}5 \cdot x^{-3} - 1{,}5$

E: $f_5(x) = 2 \cdot x^{0{,}5}$

F: $f_2(x) = -x^{0{,}2} - 1{,}5$

Lösung A6

a) $f^*(x) = (x-2)^3 - 4$ Punktsymmetrie zum Punkt $P(2|-4)$

b) $f^*(x) = (x+1)^4 + 2$ Achsensymmetrie zur Achse $x = 1$

c) $f^*(x) = (x-1)^{-3} + 3$ Punktsymmetrie zum Punkt $P(1|3)$

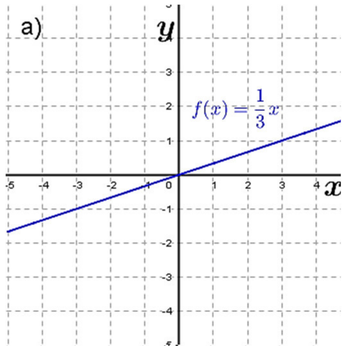
d) $f^*(x) = (x+4)^{-2} - 3$ Achsensymmetrie zur Achse $x = -4$

Lösung A7

a) $f(x)=\frac{1}{3}x$

$-f(-x)=-\frac{1}{3}(-x)=\frac{1}{3}x=f(x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung

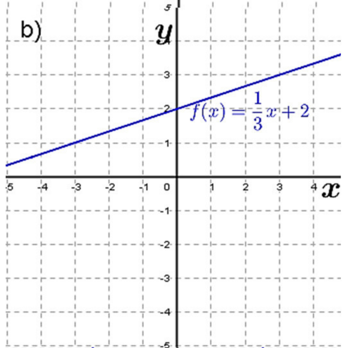


b) $f(x)=\frac{1}{3}x+2$

$f(0+x)-2=\quad\frac{1}{3}(0+x)+2-2=\frac{1}{3}x$

$-f(0-x)+2=-\left(\frac{1}{3}(-x)+2\right)+2=\frac{1}{3}x$

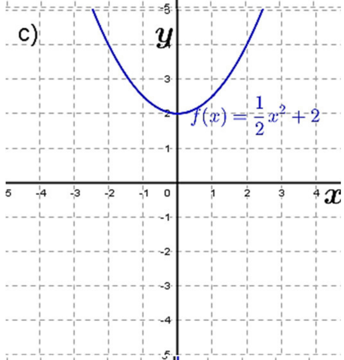
Punktsymmetrie zu $P(0|2)$



c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$

$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+2=\frac{1}{2}x^2+2=f(x)$

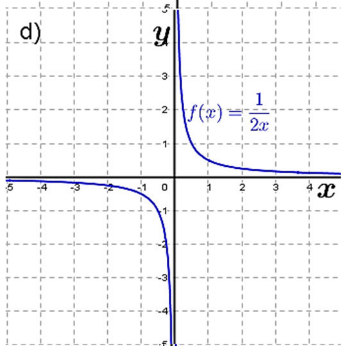
Achsensymmetrisch zur y-Achse.



d) $f(x)=\frac{1}{2x}$

$-f(-x)=-\frac{1}{-2x}=\frac{1}{2x}=f(x)$

Punktsymmetrisch zum Ursprung.

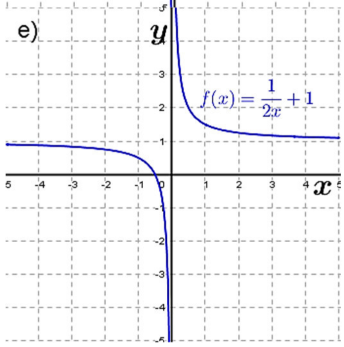


e) $f(x)=\frac{1}{2x}+1$

$f(0+x)-1=\quad\frac{1}{2x}+1-1=\frac{1}{2x}$

$-f(0-x)+1=\quad-\left(\frac{1}{2(-x)}+1\right)+1=\frac{1}{2x}$

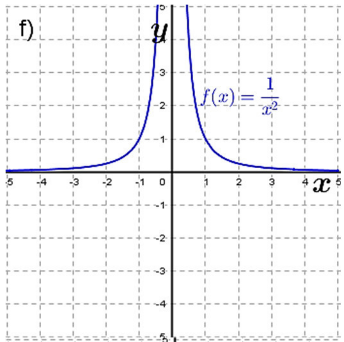
Punktsymmetrie zu $P(0|1)$



f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(-x) = -\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$

Achsensymmetrisch zur y-Achse.

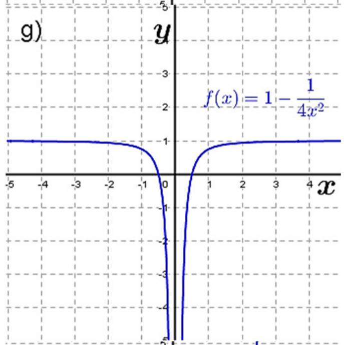


g) $f(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}$

$f(-x) = 1 - \frac{1}{4(-x)^2} = 1 - \frac{1}{4x^2} = f(x)$

$-f(0-x) + 2 =$ $-\frac{1}{3}(0-x) + 2 = \frac{1}{3}x + 2$

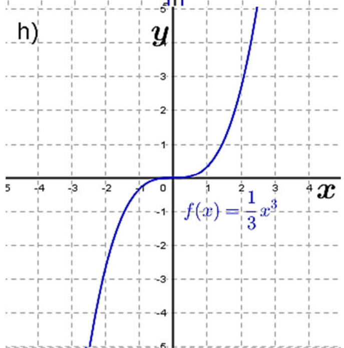
Achsensymmetrisch zur y-Achse.



h) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$

$-f(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^3 = \frac{1}{3}x^3 = f(x)$

Punktsymmetrisch zum Ursprung.

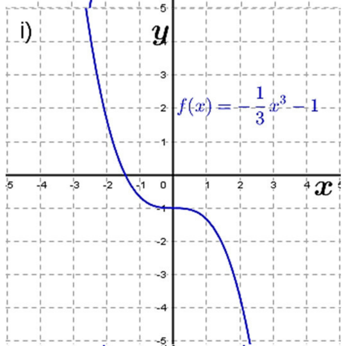


i) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1$

$f(0+x) + 1 =$ $-\frac{1}{3}x^3 - 1 + 1 = -\frac{1}{3}x^3$

$-f(0-x) - 1 =$ $-\left(\frac{1}{3}(-x)^3 - 1\right) - 1 = \frac{1}{3}x^3$

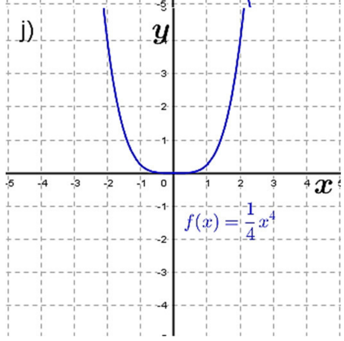
Punktsymmetrie zu $P(0|-1)$



j) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$

$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 = \frac{1}{4}x^4 = f(x)$

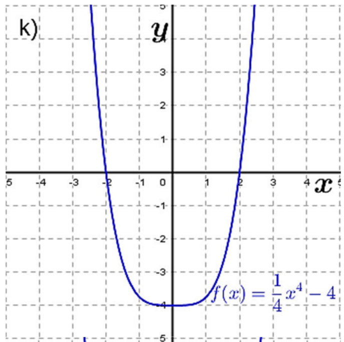
Achsensymmetrisch zur y-Achse.



k) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4$

$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 4 = \frac{1}{4}x^4 - 4 = f(x)$

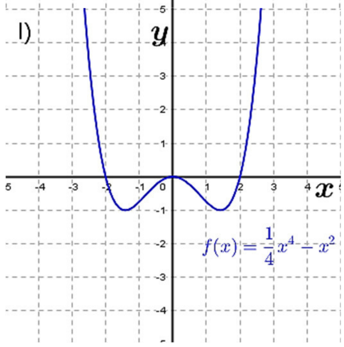
Achsensymmetrisch zur y-Achse.



l) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - (-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - x^2 = f(x)$

Achsensymmetrisch zur y-Achse.



Lösung A8

a) $f(x) = 0{,}5x + 1$

Spiegelung an y-Achse: $f(-x)$

$f(-x) = -0{,}5x + 1$

(siehe grünen Graphen)

Spiegelung an x-Achse: -$f(x)$

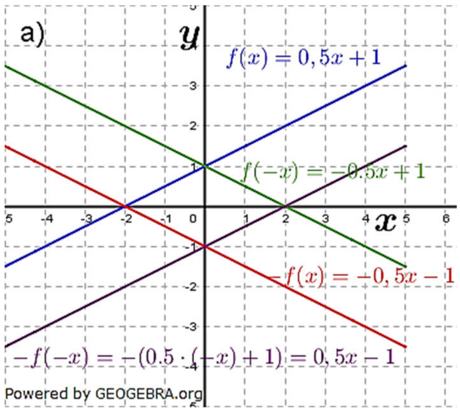
$-f(x) = -0{,}5x - 1$

(siehe roten Graphen)

Spiegelung am Ursprung: -$f(-x)$

$-f(-x) = -(0{,}5(-x) + 1) = 0{,}5x - 1$

(siehe violetten Graphen)



b) $g(x) = x^3$

Spiegelung an y-Achse: $g(-x)$

$g(-x) = (-x)^3 = -x^3$

(siehe grünen Graphen)

Spiegelung an x-Achse: -$g(x)$

$-g(x) = -x^3$

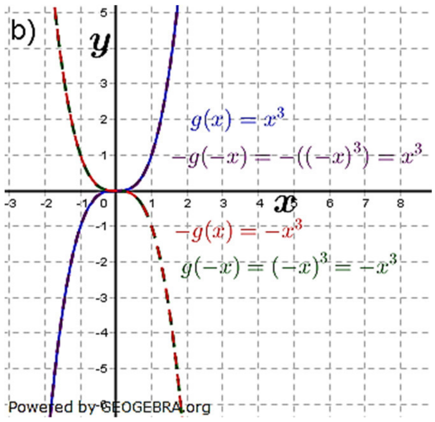
(siehe roten Graphen)

Spiegelung am Ursprung: -$g(-x)$

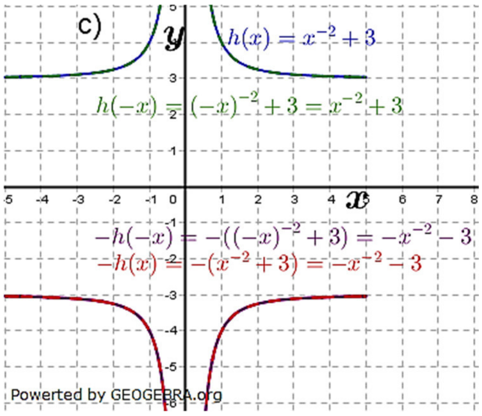
$-g(-x) = -((-x)^3) = x^3$

(siehe violetten Graphen)

Wie erkennbar ist $g(x) = -g(-x)$ und $-g(x) = g(-x)$



c) $h(x) = x^{-2} + 3$
Spiegelung an y-Achse: $h(-x)$
$h(-x) = (-x)^{-2} + 3 = x^{-2} + 3$
(siehe grünen Graphen)
Spiegelung an x-Achse: -$f(x)$
$-f(x) = -x^3$
(siehe roten Graphen)
Spiegelung am Ursprung: -$f(-x)$
$-f(-x) = -((-x)^3) = x^3$
(siehe violetten Graphen)
Wie erkennbar ist $h(x) = h(-x)$ und
$-h(x) = -h(-x)$



Aufgabe A1

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=\frac{1}{x}-2$ und $g(x)=4-\frac{1}{x}$.

a) Zeichne die Graphen von f und g in ein geeignetes, gemeinsames Koordinatensystem.

b) Berechne die Schnittpunkte von f und g mit der x-Achse.

c) Wo schneiden sich f und g? Berechne den Schnittpunkt S.

Aufgabe A2

Der Punkt $P(4|8)$ liegt auf f mit $f(x)=(x+a)^{-3}$. Bestimme a.

Aufgabe A3

Die Punkte $A(7|1)$ und $B(1|-1)$ liegen auf f mit $f(x)=a\cdot(x+b)^{-1}$. Berechne a und b.

Aufgabe A4

Die Punkte $A(3|1)$ und $B(6|16)$ liegen auf f mit $f(x)=a\cdot x^n$. Berechne a und n.

Aufgabe A5

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=x^n+2{,}5$ und $g(x)=x^m-5$.
f und g schneiden sich in $S(2|3)$. Berechne n und m.

Aufgabe A6

Bei der Herstellung von Spielautos ergeben sich Kosten in Euro. Dabei sei K die Kostenfunktion mit $K(x)=0{,}02\cdot(x-10)^3+20$, K in Euro, x in Stück Spielauto.

a) Erstelle eine Wertetabelle mit x-Werten zwischen 0 und 22 und skizziere den Graphen für die Gesamtkosten K in Abhängigkeit der Stückzahl x.

b) Der Artikel wird für € 2,00 / Spielauto verkauft. Wie groß sind die Einnahmen, wenn x Stück verkauft werden? Zeichne den Graphe für die Gesamteinnahmen in das vorhandene Koordinatensystem ein.

c) Lies aus dem Graphen ab und berechne (falls möglich):
- Bei welchen Stückzahlen wird Gewinn erzielt?
- Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am größten?
- Bei welchen Stückzahlen wird Verlust gemacht?

Aufgabe A7

Bestimme die Funktionsgleichung einer Potenzfunktion in der Form $f(x)=a\cdot x^q$, deren Graph durch die genannten Punkte verläuft:

a) $A\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$ und $B(1|2)$

b) $A(2|8)$ und $B\left(-3\middle|\frac{81}{2}\right)$

c) $A(2|1)$ und $B\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$

d) $A(4|4)$ und $B(9|6)$

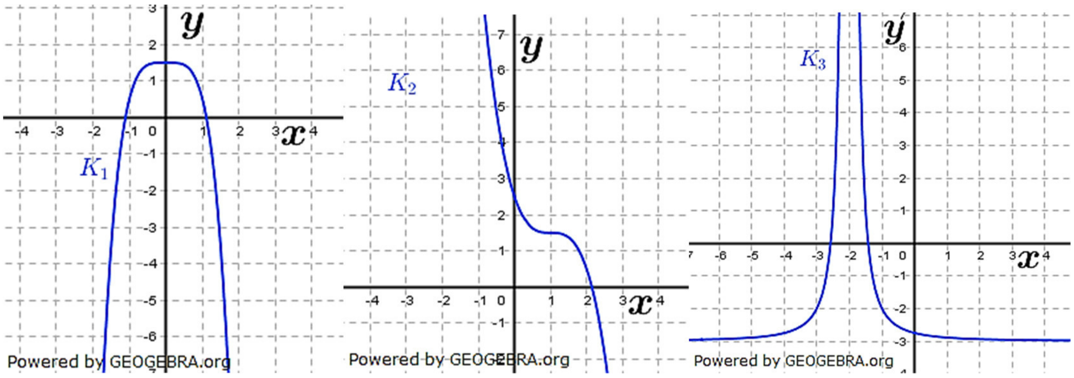
e) $A\left(2\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $B(4|2)$

f) $A(4|1)$ und $B(1|2)$

Aufgabe A8

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = (x+2)^{-2} - 3$, $f_2(x) = -(x-1)^3 + 1{,}5$ sowie $f_3(x) = -x^4 + 1{,}5$. Ihre Schaubilder sind K_1, K_2 und K_3.

a) Ordne den abgebildeten Graphen den Funktionen zu und begründe deine Entscheidung.



b) Berechne die Nullstellen von f_1.

c) Mache eine begründete Aussage zur Anzahl der Lösungen der Gleichung $f_3(x) = a$, wobei a eine beliebige reelle Zahl sein kann. Die Begründung kann grafisch oder rechnerisch erfolgen.

d) Für die Funktion, die zum Grafen K_3 gehört, hat Emilie die Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 4$ berechnet. Was sagst du dazu?

Aufgabe A9

In einer Publikation stand zu lesen: Der Durchmesser d eines Atomkerns hängt im Wesentlichen von der Anzahl A der Nukleonen (Protonen und Neutronen) ab.
Wenn man sich den Atomkern als mehr oder weniger kugelförmigen Haufen aus Protonen und Neutronen vorstellt, kann man die folgende Näherungsformel für d (in m) verwenden: $d = 2{,}4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{A}$
Ein Aluminiumkern hat 13 Protonen und 14 Neutronen.
Wie groß ist sein Durchmesser in Millimeter?

Aufgabe A10

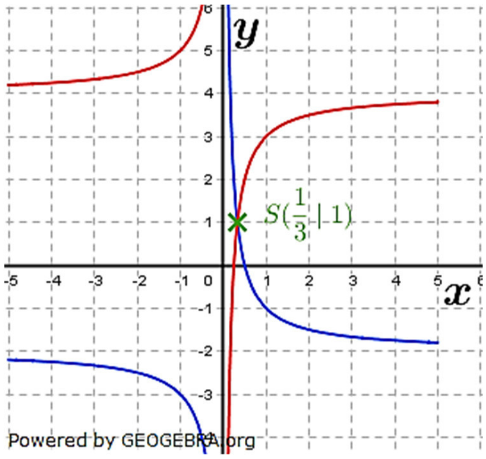
Aus einem Draht der Länge L soll das Gittermodell eines Würfels geformt werden.

a) Gib das Volumen eines Würfels in Abhängigkeit von L an.
Stelle den funktionalen Zusammenhang grafisch dar.

b) Welche Beziehung besteht zwischen L und der Oberfläche des Würfels?

Lösung A1

a) Grafik siehe Abbildung rechts.



b) Schnittpunkte mit der x-Achse sind Nullstellen, Berechnung über $f(x)=0$ bzw. $g(x)=0$.

$f(x)=0$:

$\frac{1}{x}-2=0 \qquad | \quad +2; \cdot x$

$1=2x \qquad | \quad :2$

$x=\frac{1}{2}$

$N_f\left(\frac{1}{2}\middle|0\right)$

$g(x)=0$:

$4-\frac{1}{x}=0 \qquad | \quad +\frac{1}{x}; \cdot x$

$4x=1 \qquad | \quad :4$

$x=\frac{1}{4}$

$N_g\left(\frac{1}{4}\middle|0\right)$

c) Schnittpunkte zwischen Funktionen durch Gleichsetzung:

$f(x)\cap g(x)$:

$\frac{1}{x}-2=4-\frac{1}{x} \qquad | \quad +\frac{1}{x};\ +2$

$\frac{2}{x}=6 \qquad | \quad \cdot x;\ :6$

$x=\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}-2=3-2=1$

$S\left(\frac{1}{3}\middle|1\right)$

Lösung A2

$f(x)=(x+a)^{-3};\ P(4|8)$

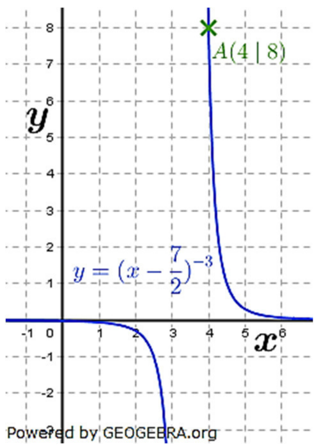
$8=(4+a)^{-3}=\frac{1}{(4+a)^3} \qquad | \quad$ Punktprobe mit P

$(4+a)^3=\frac{1}{8} \qquad | \quad \sqrt[3]{}$

$4+a=\frac{1}{2} \qquad | \quad -4$

$a=-\frac{7}{2}$

Die Funktion f mit $f(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^{-3}$ verläuft durch $P(4|8)$



Lösung A3

$f(x) = a \cdot (x+b)^{-1};\ \ A(7|1);\ \ B(1|-1)$

(1) $1 = a \cdot (7+b)^{-1}$ | Punktprobe mit A

(2) $-1 = a \cdot (1+b)^{-1}$ | Punktprobe mit B

(1):(2) $-1 = \left(\frac{7+b}{1+b}\right)^{-1} = \frac{1+b}{7+b}$ | $\cdot (7+b)$

$-1 \cdot (7+b) = 1+b$

$-7-b = 1+b$ | $+b;\ -1;\ :2$

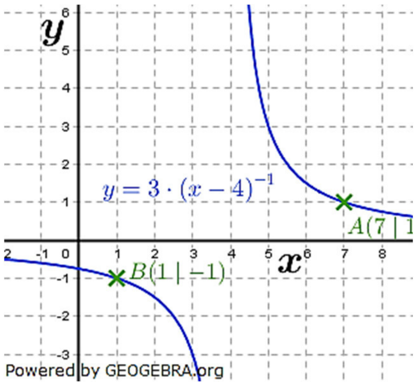
$b = -4$

$b \rightarrow (1)$

$1 = a \cdot (7-4)^{-1} = \frac{1}{3}a$

$a = 3$

Die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot (x-4)^{-1}$ verläuft durch die Punkte $A(7|1)$ und $B(1|-1)$.



Lösung A4

$f(x) = a \cdot x^n;\ \ A(3|1);\ \ B(6|16)$

(1) $1 = a \cdot 3^n$ | Punktprobe mit A

(2) $16 = a \cdot 6^n$ | Punktprobe mit B

(2):(1) $16 = \left(\frac{6}{3}\right)^n = (2)^n$

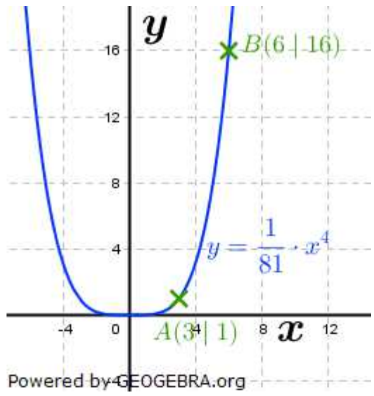
$n = 4$

$n \rightarrow (1)$

$1 = a \cdot 3^4 = 81a$

$a = \frac{1}{81}$

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{81} \cdot x^4$ verläuft durch die Punkte $A(3|1)$ und $B(6|16)$.



Lösung A5

$f(x) = x^n + 2{,}5;\ g(x) = x^m - 5$ Schnittpunkt $S(2|3)$

(1) $3 = 2^n + 2{,}5$ | Punktprobe S in f

(2) $3 = 2^m - 5$ | Punktprobe S in g

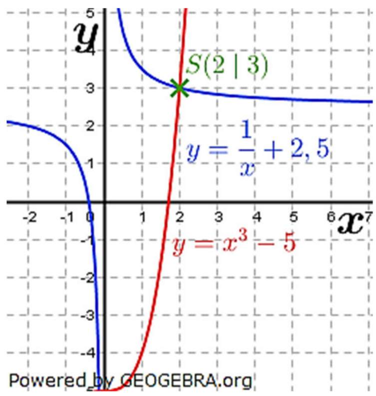
(1) $2^n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

$n = -1$

(2) $2^m = 8$

$m = 3$

Die Funktionen f mit $f(x) = x^{-1} + 2{,}5$ und g mit $g(x) = x^3 - 5$ schneiden sich im Punkt $S(2|3)$.



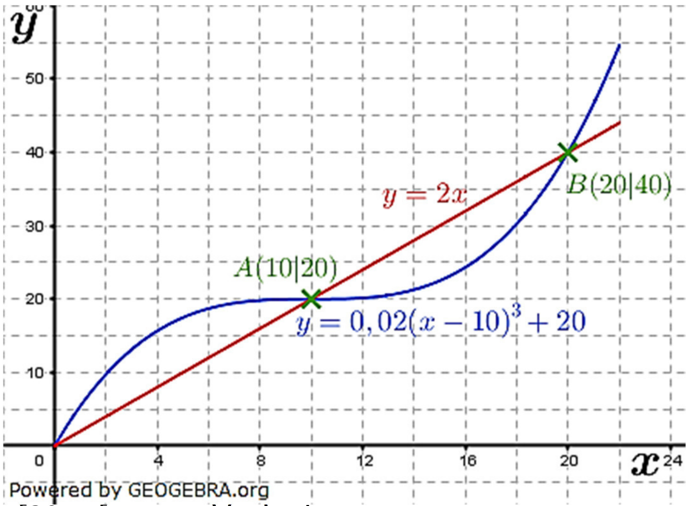
Lösung A6

$K(x) = 0{,}02 \cdot (x-10)^3 + 20$

a) Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	5,4	9,8	13,1	15,7	17,5	18,7	19,5	19,8	20	20	20
x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
y	20,2	20,5	21,3	22,5	24,3	26,9	30,2	34,6	40	40,6	54,6	

b) Erlösfunktion:
$E(x) = 2x$
Grafik zu a) und b) siehe rechts.



c) Gewinnfunktion
$G(x) = E(x) - K(x)$
Verlustzone im Intervall
$I_1 = [0;10[$ bzw. $I_2 = [20;\infty[$.
Gewinnzone im Intervall
$I_3 =]10;20[$
Diese Werte sind abgelesen.
Rechnerisch:
$G(x) = 0$
$2x - (0{,}02 \cdot (x-10)^3 + 20) = 0$
$x_1 \overset{\text{WTR}}{=} 10; \quad x_2 \overset{\text{WTR}}{=} 20$
$K(x) > E(x)$ in $I_1 = [0;10[$ bzw. $I_2 = [20;\infty[$ => Verlustzonen
$K(x) < E(x)$ in $I_3 =]10;20[$ => Gewinnzone
Zwischen 0 und 10 verkauften Autos bzw. mehr als 20 verkauften Autos macht das Unternehmen Verlust.
Im Bereich zwischen 10 und 20 verkauften Autos macht das Unternehmen Gewinn.
Stelle des maximalen Gewinns:
$x_{max} \overset{\text{WTR}}{=} 15{,}77$
Bei etwa 16 verkauften Spielautos ist der Gewinn maximal.

*) Rechnerische Ermittlung des maximalen Gewinns:
Hierzu wird die erste Ableitung $G'(x)$ der Gewinnfunktion benötigt.
$G(x) = 2x - 0{,}02 \cdot (x-10)^3 - 0{,}4$
$G'(x) = 2 - 0{,}06 \cdot (x-10)^2 = 2 - 0{,}06x^2 + 1{,}2x - 6 = -0{,}06x^2 + 1{,}2x - 4$
$G'(x) = 0$
$-0{,}06x^2 + 1{,}2x - 4 = 0 \qquad | \quad :(-0{,}06)$
$x^2 - 20x + \frac{200}{3} = 0$
$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - \frac{200}{3}} = 10 \pm \sqrt{\frac{100}{3}}$
$x_1 = 15{,}77; \quad x_2 = 4{,}23$
$G''(x) = -0{,}12x + 1{,}2$
$G''(15{,}77) = -0{,}12 \cdot 15{,}77 + 1{,}2 < 0$ => Hochpunkt
$G''(4{,}12) = -0{,}12 \cdot 4{,}12 + 1{,}2 > 0$ => Tiefpunkt

Lösung A7

$f(x) = a \cdot x^q$

a) $A\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$ und $B(1|2)$
$\frac{1}{4} = a \cdot 4^q \qquad |$ Punktprobe mit A
$2 = a \cdot 1^q \qquad |$ Punktprobe mit B
$a = 2 \qquad |$ Jede Potenz von 1 ist immer 1
$\frac{1}{4} = 2 \cdot 4^q \qquad | \quad :2$
$\frac{1}{8} = 4^q$ => $q = -\frac{3}{2}$
$f(x) = 2 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$

b) $A(2|8)$ und $B\left(-3\middle|\frac{81}{2}\right)$

(1) $8 = a \cdot 2^q$ | Punktprobe mit A

(2) $\frac{81}{2} = a \cdot (-3)^q$ | Punktprobe mit B

(2):(1) $\frac{81}{16} = \left(-\frac{3}{2}\right)^q$

$q = 4$

$q \to (1)$

$8 = a \cdot 2^4 = 16a$

$a = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4$

c) $A(2|1)$ und $B\left(4\middle|\frac{1}{4}\right)$

(1) $1 = a \cdot 2^q$ | Punktprobe mit A

(2) $\frac{1}{4} = a \cdot 4^q$ | Punktprobe mit B

(2):(1) $\frac{1}{4} = 2^q$

$q = -2$

$q \to (1)$

$1 = a \cdot 2^{-2} = \frac{1}{4}a$

$a = 4$

$f(x) = 4 \cdot x^{-2}$

d) $A(4|4)$ und $B(9|6)$

(1) $4 = a \cdot 4^q$ | Punktprobe mit A

(2) $6 = a \cdot 9^q$ | Punktprobe mit B

(2):(1) $\frac{3}{2} = \left(\frac{9}{4}\right)^q$

$q = \frac{1}{2}$

$q \to (1)$

$4 = a \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 2a$

$a = 2$

$f(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

e) $A\left(2\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $B(4|2)$

(1) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = a \cdot 2^q$ | Punktprobe mit A

(2) $2 = a \cdot 4^q$ | Punktprobe mit B

(1):(2) $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^q$

$\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^q$

$q = \frac{3}{2}$

$q \to (1)$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = a \cdot 2^{\frac{3}{2}} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

$a = 1$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

f) $A(4|1)$ und $B(1|2)$

$1 = a \cdot 4^q$ | Punktprobe mit A

$2 = a \cdot 1^q$ | Punktprobe mit B

$a = 2$ | Jede Potenz von 1 ist immer 1

$1 = 2 \cdot 4^q$

$\frac{1}{2} = 4^q$

$q = -\frac{1}{2}$

$f(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

Lösung A8

a) K_3 ist das Schaubild von f_1 mit $f_1(x) = (x+2)^{-2} - 3$
K_3.ist Achsensymmetrisch zur Achse $x = -2$ und hat die waagrechte Asymptote $y = -3$.
K_2 ist das Schaubild von f_2 mit $f_2(x) = -(x-1)^3 + 1{,}5$
K_2.ist dritten Grades und punktsymmetrisch zum Wendepunkt $WP(1|1{,}5)$.
K_1 ist das Schaubild von f_3 mit $f_3(x) = -x^4 + 1{,}5$
K_1.ist vierten Grades und hat den Scheitelpunkt $S(0|1{,}5)$.

b) Nullstellen von $f_1(x) = (x+2)^{-2} - 3$

$(x+2)^{-2} - 3 = 0$

$\frac{1}{(x+2)^2} - 3 = 0$ | $\cdot (x+2)^2$

$1 - 3(x+2)^2 = 0$

$-3x^2 - 12x - 11 = 0$ | | $:(-3)$

$x^2 + 4x + \frac{11}{3} = 0$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{11}{3}} = -2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

$N_1\left(-2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\middle|0\right)$; $N_1\left(-2 - \sqrt{\frac{1}{3}}\middle|0\right)$

c) $f_3(x) = a$

$-x^4 + 1{,}5 = a$

$x^4 = 1{,}5 - a$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{1{,}5 - a}$

Für $a > 1{,}5$ hat die Gleichung $f_3(x) = a$ keine Lösung.
Für $a = 1{,}5$ hat die Gleichung $f_3(x) = a$ eine Lösung.
Für $a < 1{,}5$ hat die Gleichung $f_3(x) = a$ zwei Lösungen.

d) Emilie hat falsche gerechnet. Keiner der gegebenen Graphen hat diese Nullstellen.

Lösung A9

$A = 13 + 14 = 27$ | 13 Protonen und 14 Neutronen

$d = 2{,}4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{27}\, m$

$d = 2{,}4 \cdot 10^{-15} \cdot 3\, m = 7{,}2 \cdot 10^{-15}\, m$

$1\, m \triangleq 1000\, mm$

$d = 7{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot 10^3\, mm = 7{,}2 \cdot 10^{-12} mm$

Der Durchmesser des Aluminiumkerns hat etwa $7{,}2 \cdot 10^{-12} mm$.

Lösung A10

Das Gittermodell eines Würfels besteht aus 12 Kanten der Kantenlänge a.

$L = 12 \cdot a \quad => \quad a = \frac{L}{12}$

a) Das Volumen eines Würfels berechnet sich aus $V = a^3$.
Damit ist $V(L) = \left(\frac{L}{12}\right)^3$.

b) Die Oberfläche eines Würfels berechnet sich aus $O = 6 \cdot a^2$
Damit ist $O(L) = 6 \cdot \left(\frac{L}{12}\right)^2$.

Aufgabe A1

Der Graph der Funktion f mit $f(x)=0{,}8x^3$ wird jeweils
a) um 3 Einheiten in x-Richtung verschoben,
b) um -2 Einheiten in y-Richtung verschoben, an der x-Achse gespiegelt und um 2 Einheiten in x-Richtung verschoben,
c) mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse gestreckt und um 3 Einheiten in y-Richtung verschoben,
d) um 1 Einheit in x-Richtung und um -4 Einheiten in y-Richtung verschoben.
Gib jeweils den neuen Funktionsterm an.

Aufgabe A2

Eine Verkehrsstudie zum Schwerlastverkehr ergab, dass das Gewicht eines LKW mit der vierten Potenz in das Maß der Straßenschädigung eingeht.
a) Wie erhöht sich die Schädigung der Straße für den Fall, dass das Gewicht des LKW verdoppelt wird?
b) Vor ein paar Jahren war noch in Deutschland bei einem LKW eine Achslast von $100\,000\,N$ (N: Newton) erlaubt. Heute beträgt der zulässige Wert $115000\,N$.
Um wie viel Prozent stiegen die Schädigungen durch die vorgenommene Erhöhung der Achslast?
c) Welche Erhöhung der Achslast darf man höchstens vornehmen, wenn man die Schädigung auf das Doppelte des ursprünglichen Wertes begrenzen will?

Aufgabe A3

Beurteile, ob die folgenden Aussage „immer", „nie" oder „unter bestimmten Bedingungen" zutrifft. Gib gegebenenfalls die Bedingung an.
a) Der Graph der Funktion f mit $f(x)=ax^n$ geht durch den Punkt $P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}a\right)$.
b) Der Graph der Funktion f mit $f(x)=ax^n$ verläuft von „links oben" nach „rechts unten".
c) Der Graph der Funktion f mit $f(x)=ax^2$ geht durch den Punkt $P(2|1)$.
d) Der Graph der Funktion f mit $f(x)=-4x^n$ für gerades n verläuft von „links unten" nach „rechts unten".
e) Die Graphen von $f(x)=ax^2$ und $g(x)=ax^4$ schneiden sich in zwei Punkten.

Aufgabe A4

Die Funktionen f, g und h haben die Funktionsgleichungen $f(x)=4x^3$, $g(x)=x^5$ und $h(x)=0{,}1x^4$. Bestimme die x-Werte, für die gilt:
a) Die Funktionswerte von g und h sind gleich groß.
b) Die Funktionswerte von h sind kleiner als die von f.
c) Die Funktionswerte von f sind größer als die von g.

Aufgabe A5

Gib die Funktionsgleichung einer Potenzfunktion an, die zu der Aussage passt.

a) Der zugehörige Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Der zugehörige Graph geht durch den Punkt $P(3|1)$.

c) Die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ sind ≥ 0.

d) Verdoppelt man den x-Wert, so verachtfacht sich der zugehörige y-Wert.

Aufgabe A6

Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r beträgt $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, der Oberflächeninhalt beträgt $A = 4\pi r^2$.

a) Ermittle den Term der Funktion, mit der man zu gegebenem Volumen V einer Kugel den Inhalt A ihrer Oberfläche berechnen kann.

b) Begründe: Wird das Volumen verfünffacht, so wird der Inhalt der Kugeloberfläche ungefähr verdreifacht.

Aufgabe A7

Bei einem Windrad lässt sich die Leistung P (in Watt) mit der Windgeschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) mit der Formel $P = 1000 \cdot v^3$ berechnen.

a) Stelle den Graphen der Funktion P in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

b) Lies am Graphen ab, bei welcher Windgeschwindigkeit die Leistung P den Wert $5 \cdot 10^5 W$ hat.

c) Überlege mithilfe des Graphen und der Funktionsgleichung drei Aufgaben. Lass dein Ergebnis von einem Mitschüler kontrollieren.

d) Wo liegen aus deiner Sicht Vor- und Nachteile der Windenergie gegenüber anderen Energie-Trägern?

Lösung A1

$f(x) = 0{,}8x^3$

a) 3 Einheiten in x-Richtung verschieben:
$h(x) = f(x-3) = 0{,}8 \cdot (x-3)^3$

b) um -2 Einheiten in y-Richtung verschieben, an der x-Achse spiegeln und um 2 Einheiten in x-Richtung verschieben:
$h(x) = -f(x-2) - 2 = -0{,}8 \cdot (x-2)^3 - 2$

c) mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse strecken und um 3 Einheiten in y-Richtung verschieben:
$h(x) = 2 \cdot f(x) + 3 = 1{,}6 \cdot x^3 + 3$

d) um 1 Einheit in x-Richtung und um -4 Einheiten in y-Richtung verschieben
$h(x) = f(x-1) - 4 = 0{,}8(x-1)^3 - 4$

Lösung A2

Sei x das Gewicht des LKWs und s ein Maß für die Straßenschädigung, so gilt:
$s(x) = x^4$

a) Auswirkung bei Verdoppelung von x:
$s(2x) = (2x)^4 = 16x^4$
Bei Verdoppelung des Gewichtes versechzehnfacht sich die Straßenschädigung.

b) $s(100000) = 100000^4; \quad s(115000) = 115000^4$
$\frac{s(115000)}{s(100000)} = \frac{115000^4}{100000^4} = \left(\frac{115000}{100000}\right)^4 = 1{,}15^4 = 1{,}75$
Durch die vorgenommene Achslasterhöhung stiegen die Straßenschädigungen etwa um $75\,\%$ an.

c) $2 = x^4 \quad | \sqrt[4]{\ }$
$x \approx 1{,}189$
Will man die Straßenschädigungen auf das doppelte des ursprünglichen Wertes begrenzen, so darf eine Achslasterhöhung maximal etwa $19\,\%$ betragen.

Lösung A3

a) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = ax^n$ geht durch den Punkt $P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}a\right)$
Dies gilt nur für $n = 1$.

b) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = ax^n$ verläuft von „links oben“ nach „rechts unten“.
Dies gilt nur für $a < 0$ und $n = 2k + 1;\ \ k \in \mathbb{Z}$

c) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = ax^2$ geht durch den Punkt $P(2|1)$
Dies gilt nur für $a = \frac{1}{4}$

d) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -4x^n$ für gerades n verläuft von „links unten“ nach „rechts unten“.
Dies gilt nur für $n = 2k;\ \ k \in \mathbb{Z}$

e) Die Graphen von $f(x) = ax^2$ und $g(x) = ax^4$ schneiden sich in zwei Punkten.
Dies gilt nie (die beiden Graphen haben nur den Ursprung als gemeinsamen Punkt).

Lösung A4

$f(x) = 4x^3$, $g(x) = x^5$ und $h(x) = 0{,}1x^4$

a) Die Funktionswerte von g und h sind gleich groß:

$g(x) \cap h(x)$
$x^5 = 0{,}1x^4$
$x^5 - 0{,}1x^4 = 0$
$x^4(x - 0{,}1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0;\quad x_2 = 0{,}1$

In den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0{,}1$ sind die Funktionswerte von g und h gleich groß.

b) Die Funktionswerte von h sind kleiner als die von f.

$h(x) \cap f(x)$
$0{,}1x^4 = 4x^3$
$0{,}1x^4 - 4x^3 = 0$
$x^3(0{,}1x - 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0;\quad x_2 = 40$

Wegen $0{,}1x^4$ stets > 0 für alle $x \in \mathbb{R}$ ist somit $h(x) < f(x)$ für $0 < x < 40$.

c) Die Funktionswerte von f sind größer als die von g.

$f(x) \cap g(x)$
$4x^3 = x^5$
$x^5 - 4x^3 = 0$
$x^3(x^2 - 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = 2$
$f(-1) = -4;\quad g(-1) = -1$
$f(1) = 4;\quad g(1) = 1$
$f(x) > g(x)$ für $0 < x < 2$

Lösung A5

Potenzfunktion, die

a) achsensymmetrisch zur y-Achse ist:
$f(x) = x^4;\quad g(x) = \frac{1}{x^2}$

b) durch den Punkt $P(3|1)$ geht:
$f(x) = \frac{1}{9}x^2;\quad g(x) = \frac{9}{x^2}$

c) Funktionswerte $f(x) \geq 0$ hat:
$f(x) = x^6;\quad g(x) = 5x^2$

d) verachtfachten y-Wert zum verdoppelten x-Wert aufweist:
$f(x) = x^3$.

Lösung A6

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3;\quad A = 4\pi r^2$

a) Aus $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ folgt $r^3 = \frac{3V}{4\pi} \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

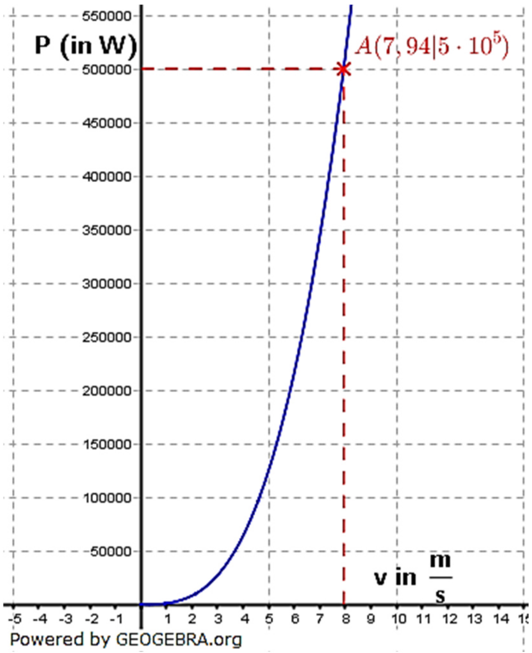
$r \rightarrow A$

$$A(V) = 4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = (64\pi^3)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{9V^2}{16\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4\pi \cdot 9V^2} = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

b) $A(5V) = \sqrt[3]{36\pi(5V)^2} = \sqrt[3]{36\pi 25V^2} = \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{36\pi V^2} = 2{,}924 \cdot \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 3 \cdot A(V)$

Lösung A7

a) Grafik siehe rechts.



b) Bei Windgeschwindigkeit etwa $8\frac{m}{s}$ bringt die Windkraftanlage eine Leistung von $5\cdot 10^5\ W$.

c) Wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt, um das wieviel Fache vergrößert sich dann die Leistung?
(Lösung: verachtfacht sich)
Wenn sich die Windgeschwindigkeit halbiert, um das wieviel Fache verkleinert sich dann die Leistung?
(Lösung: ist nur noch $\frac{1}{8}$ der vorigen Leistung)
Welche Leistung bringt die Windkraftanlage bei Windstärke 12?
Lösung: Keine Leistung mehr, denn bei dieser Windstärke muss die Anlage aus Sicherheitsgründen abgeschaltet werden).

d) Vorteile:
Kostenlos, dauerhaft und reichlich zu haben, im Gegensatz zur Sonnenergie auch nachts.
Geringster Platzbedarf gegenüber allen anderen Stromerzeugungsverfahren.
Platz noch reichlich vorhanden, insbesondere im Offshore-Bereich.
Kein Ausstoß von Schadstoffen wie etwa Kohlendioxid, Stickoxid und Schwefeldioxid. Geringe CO2-Bilanz bei Herstellung, Aufbau und Wartung.
Die Weiterentwicklung von Windkraftanlagen schafft neue Arbeitsplätze.
Windparkbau auf gemeindeeigenen Flächen lässt Pachtgelder der Stromkonzerne in den Haushalt fließen, was wiederum den Steuerzahlern zu Gute kommt.
Nachteile:
Keine zuverlässige Energiequelle, nicht immer zu jeder Zeit am richtigen Ort verfügbar. Regelmäßig nur an Küsten und auf Bergen, dortselbst aber schwierig, Industrien anzusiedeln. Damit hohe Kosten für Stromtrassenführungen.
Da Wind nicht speicherbar ist, muss er sofort dort in transportfähigen Strom umgewandelt werden.
Selbst die gewaltigsten Windkraftanlagen sind nicht in der Lage, z. B. eine Großstadt vollständig mit Strom zu versorgen. Man bräuchte tausend dieser Anlagen, um ein modernes Kraftwerk zu ersetzen.
Aufgrund lästiger Geräusche sind Grenzwerte zu beachten und Mindestabstände zu Wohnanlagen einzuhalten.
Kritisch auch der Einfluss der Windkraftanlagen auf die Tierwelt, insbesondere die Vogelwelt. Nicht selten fliegen ganze Schwärme in die Rotorblätter und kommen dabei zu Tode.