Aufgabe A1

Eine Parabel hat ihren Scheitel in S und geht durch P. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm in der Scheitelform und in der Hauptform.

a) $S(2|2);\ P(1|1)$ b) $S(-3|6);\ P(0|1)$ c) $S(4|-7);\ P(3|-6)$

Aufgabe A2

Gegeben sind Hauptformen quadratischer Gleichungen. Darunter sind Karten mit der Nullstellenform von Funktionsgleichungen abgebildet.
Finde zu den Gleichungen a) bis f) die passende Lösungskarte und bilde aus den Buchstaben ein Lösungswort.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ b) $f(x) = 2x^2 - 5x - 42$ c) $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$
d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ f) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

I $f(x) = 3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

T $f(x) = 3(x-2)^2$

G $f(x) = 2(x-2)(x+3)$

E $f(x) = -(x+5)(x-3)$

N $f(x) = 3(x-1)^2$

A $f(x) = 2(x-6)(x-3)$

W $f(x) = -(x-2)(x-3)$

N $f(x) = 2(x-6)(x+3{,}5)$

Aufgabe A3

Schreibe den Funktionsterm in der Produktform und lies die Nullstellen ab, ohne zu rechnen.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 2x$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x$
d) $f(x) = x^2 - 36$ e) $f(x) = 2x^2 - 50$ f) $f(x) = -0{,}5x^2 + 8$
g) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ h) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5$

Aufgabe A4

Gegeben ist die quadratische Funktion f. In welchen Bereichen sind die Funktionswerte positiv?

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$ b) $f(x) = -2(x+3)(x-5)$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ e) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$

Aufgabe A5

Berechne die Nullstellen der Funktion f exakt.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2$ c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 12{,}5$

Aufgabe A6

Schreibe den Funktionsterm in Produktform, gib die Nullstellen ohne Rechnung an und bestimme den Scheitelpunkt.

a) $f(x) = -x^2 + 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4{,}5$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

Aufgabe A7

Skizziere den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$. Bestimme den Bereich, in denen der Graph positive Funktionswerte hat.

Aufgabe A8

Der Graph einer quadratischen Funktion f schneidet die x-Achse in x_1 und x_2 und geht durch P. Bestimme den Funktionsterm.

a) $x_1 = 1;\ x_2 = 4$ und $P(3|1)$ b) $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ und $P(2|8)$

c) $x_1 = -1;\ x_2 = 4$ und $P(1|6)$

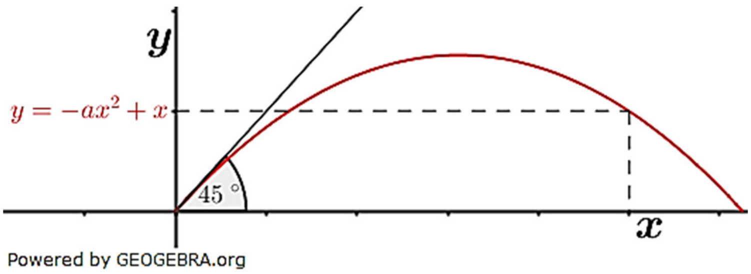
Aufgabe A9

Für welche Werte von t hat die Funktion f genau eine Nullstelle? Wie muss t gewählt werden, damit es zwei (keine) Nullstellen gibt?

a) $f(x) = x^2 - 8x + t$ b) $f(x) = -x^2 - 6x + t$ c) $f(x) = -2x^2 - 4x + t$

Aufgabe A10

In einem Fußballspiel wird der Fußball mit $25\frac{m}{s}$ unter einem Winkel von $45\,°$ schräg nach oben geschossen. Die parabelförmige Flugbahn kann mit der quadratischen Funktion f mit
$f(x) = -0{,}016x^2 + x$
beschrieben werden.



Wo erreicht der Ball den höchsten Punkt, wo kommt er wieder auf dem Boden auf?

Lösung A1

Lösungshilfe:

Stelle die Scheitelform auf mit $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ und mache damit eine Punktprobe mit P zur Bestimmung von a.

Detaillierte Lösung für

a) $S(2|2);\quad P(1|1)$

$f(x) = a(x-2)^2 + 2$	|	Scheitelform
$1 = a(1-2)^2 + 2$	|	Punktprobe mit P
$1 = a + 2$	|	-2
$a = -1$		
$f(x) = -(x-2)^2 + 2$	|	Scheitelform

b) $S(-3|6);\quad P(0|1)$

$f(x) = -\frac{5}{9}(x+3)^2 + 6$

c) $S(4|-7);\quad P(3|-6)$

$f(x) = (x-4)^2 - 7$

Lösung A2

Lösungshilfe:

Versuche den Lösungsansatz durch Feststellung, welche der gegebenen Produktformen zu welchem absoluten Glied c der Hauptform führen.

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = -x^2 + 2x + 15$

$c = 15$

$3 \cdot 5 = 15; (-3) \cdot (-5) = 15$

Nur das Ausmultiplizieren der Karte **E** führt zu $c = 15$.

Wir gehören zusammen:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$	**E** $f(x) = -(x+5)(x-3)$
b) $f(x) = 2x^2 - 5x - 42$	**N** $f(x) = 2(x-6)(x+3{,}5)$
c) $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$	**I** $f(x) = 3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$
d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$	**W** $f(x) = -(x-2)(x-3)$
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$	**G** $f(x) = 2(x-2)(x+3)$
f) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$	**N** $f(x) = 3(x-1)^2$

Das Lösungswort lautet „**GEWINN**“.

Lösung A3

Lösungshilfe:

Stelle die Produktformel durch Ausklammern auf und ermittle daraus die Nullstellen.

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = x^2 - 4x = x(x-4)$

$x(x-4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0;\quad x_2 = 4$

$N_1(0|0);\quad N_2(4|0)$

b) $f(x) = -x^2 + 2x = x(-x+2)$
$N_1(0|0);\quad N_2(2|0)$

c) $f(x) = -2x^2 + 6x = -2x(x-6)$
$N_1(0|0);\quad N_2(6|0)$

d) $f(x) = x^2 - 36$
$N_1(-6|0);\quad N_2(6|0)$

e) $f(x) = 2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25)$
$N_1(-5|0);\quad N_2(5|0)$

f) $f(x) = -0{,}5x^2 + 8 = -0{,}5(x^2 - 16)$
$N_1(-4|0);\quad N_2(4|0)$

g) $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$
$N_1(4|0)$ doppelte Nullstelle.

h) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$
$N_1(1|0)$ doppelte Nullstelle.

i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = -0{,}5(x-5)^2$
$N_1(5|0)$ doppelte Nullstelle.

Lösung A4

Lösungshilfe:

Bestimme die Nullstellen von und ermittle daraus den/die Bereich(e), in denen $f(x) > 0$ ist.
Ist die Parabel nach oben geöffnet, sind die y-Werte im Intervall von $-\infty$ bis zur linken Nullstelle, bzw. von der rechten Nullstelle bis $+\infty$ positiv.
Ist die Parabel nach unten geöffnet, sind die y-Werte im Intervall von der linken Nullstelle bis zur rechten Nullstelle positiv.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$
$N_1(1|0);\ N_2(3|0)$
Parabel ist nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \le x < 1\ \vee 3 < x \le \infty$

b) $f(x) = -2(x+3)(x-5);\quad N_1(-3|0);\quad N_2(5|0)$
Parabel nach unten geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-3 < x < 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8;\quad N_1(-4|0);\quad N_2(4|0)$
Parabel nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \le x < -4\ \vee 4 < x \le \infty$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x;\ N_1(0|0);\ N_2(6|0)$
Parabel ist nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \le x < 0\ \vee 6 < x \le \infty$

e) $f(x) = -x^2 - 3x + 4\quad N_1(-4|0);\quad N_2(1|0)$
Parabel nach unten geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-4 < x < 1$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5\quad N_1(1|0);\quad N_2(5|0)$
Parabel nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \le x < 1\ \vee 5 < x \le \infty$

Lösung A5

Lösungshilfe:
Nullstellen berechnest du mithilfe der sogenannten Mitternachtsformel. Du kannst hierfür sowohl die p/q-Formel als auch die abc-Formel verwenden. In diesem Portal wird ausschließlich die p/q-Formel verwendet.
Bei Verwendung der p/q-Formel musst du darauf achten, dass der Koeffizient von x^2 unbedingt 1 ist. Hierfür kannst du jederzeit durch Division der Gleichung mit dem eventuell vorhandenen Koeffizienten von x^2 sorgen.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$
$x^2 - 2x - 4 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+4}$
$x_1 = 1 + \sqrt{5};\quad x_2 = 1 - \sqrt{5}$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2$
$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad | \quad \cdot -(4)$
$x^2 - 8x + 8 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-8}$
$x_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{2};\quad x_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{2}$

c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 12{,}5$
$0{,}5x^2 - 5x + 12{,}5 = 0 \qquad | \quad \cdot 2$
$x^2 - 10x + 25 = 0$
$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-25}$
$x_1 = 5$

Lösung A6

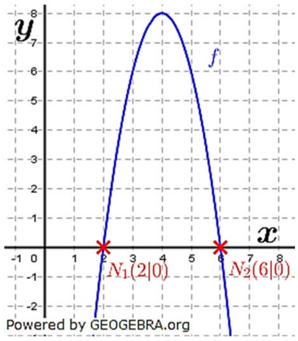
a) $f(x) = -x^2 + 3x = -x(x-3)$
$N_1(0|0);\; N_2(3|0) \;=>\; x_S = 1{,}5$
$f(1{,}5) = -1{,}5^2 + 3 \cdot 1{,}5 = -2{,}25 + 4{,}5 = 2{,}25$
$S(1{,}5|2{,}25)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4{,}5 = \frac{1}{2}(x+3)^2$
$N_1(-3|0)$, doppelte Nullstelle => $N_1 = S$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$
$-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0$
$N_1(-4|0);\; N_2(4|0) \;=>\; x_S = 0$
$f(0) = 4$
$S(0|4)$

Lösung A7

$f(x) = -2x^2 + 16x - 24.$
$-2x^2 + 16x - 24 = 0 \qquad | \quad :(-2)$
$x^2 - 8x + 12 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$
$x_1 = 6;\quad x_2 = 2$
Parabel nach oben geöffnet:
$f(x) > 0$ für $-\infty \leq x < 2 \vee 6 < x \leq \infty$



Lösung A8

Lösungshilfe:

Stelle die Nullstellenformel $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit x_1 und x_2 als Abszissenwerte der Nullstellen auf und mache dann eine Punktprobe mit P zur Berechnung von a.

a) $x_1 = 1;\ x_2 = 4$ und $P(3|1)$

$f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x-4)$ | Punktprobe mit $P(3|1)$

$1 = a \cdot (3-1) \cdot (3-4) = a \cdot 2 \cdot (-1) = -2a$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1) \cdot (x-4)$

b) $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ und $P(2|8)$

$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-1)$ | Punktprobe mit $P(2|8)$

$8 = a \cdot (2+2) \cdot (2-1) = a \cdot 4 \cdot 1 = 4a$

$a = 2$

$f(x) = 2(x+2) \cdot (x-1)$

c) $x_1 = -1;\ x_2 = 4$ und $P(1|6)$

$f(x) = a \cdot (x+1) \cdot (x-4)$ | Punktprobe mit $P(1|6)$

$6 = a \cdot (1+1) \cdot (1-4) = a \cdot 2 \cdot (-3) = -6a$

$a = -1$

$f(x) = -(x+1) \cdot (x-4)$

Lösung A9

Lösungshilfe:

Berechne die Nullstellen der Funktion mit der p/q-Formel (alternativ abc-Formel) in Abhängigkeit von t. Prüfe dann die Diskriminante. Führen Werte von t zu einer positiven Diskriminante, so hat der Graph der Funktion zwei Nullstellen. Führen Werte von t zu einer Diskriminante gleich Null, so hat der Graph der Funktion eine Nullstelle. Führen Werte von t zu einer negativen Diskriminante, so hat der Graph der Funktion keine Nullstelle.

a) $f(x) = x^2 - 8x + t$

$x^2 - 8x + t = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - t}$ | p/q-Formel

$t = 16$ => eine Nullstelle

$t < 16$ => zwei Nullstellen

$t > 16$ => keine Nullstellen

b) $f(x) = -x^2 - 6x + t$

$-x^2 - 6x + t$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + t}$ | p/q-Formel

$t = -9$ => eine Nullstelle

$t < -9$ => keine Nullstellen

$t > -9$ => zwei Nullstellen

c) $f(x) = -2x^2 - 4x + t$

$-2x^2 - 4x + t = 0$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + \frac{t}{2}}$ | p/q-Formel

$t = -8$ => eine Nullstelle

$t < -8$ => zwei Nullstellen

$t > -8$ => keine Nullstellen

Lösung A10

Lösungshilfe:
Der höchste Punkt des Balls liegt im Scheitel des Graphen der Funktion.
Der Ball trifft in der rechten Nullstelle wieder auf dem Boden auf.

$f(x) = -0{,}016x^2 + x = x(-0{,}016x + 1)$

$x_1 = 0; \quad x_2 = \dfrac{1}{0{,}016} = 62{,}5$

$x_S = \dfrac{x_2 - x_1}{2} = \dfrac{62{,}5 - 0}{2} = 31{,}25$

$y_S = f(31{,}25) = -0{,}016 \cdot 31{,}25^2 + 31{,}25 = 15{,}625$

Der Fußball erreicht eine Höhe von ca. $15{,}6\,m$ und trifft $62{,}5\,m$ weiter wirder auf dem Boden auf.