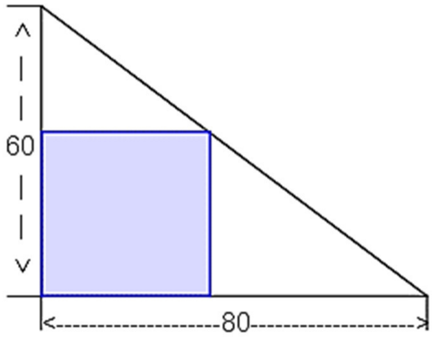
Level 3 – Expert – Blatt 2
Dokument mit 9 Aufgaben

Aufgabe A1

Auf einem dreieckigen Grundstück mit den Kantenlängen 60 m und 80 m soll ein möglichst großer rechteckiger Bauplatz abgesteckt werden. Berechne dessen Seitenlängen a und b.



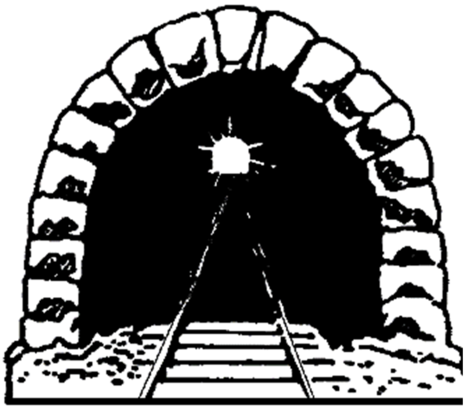
Aufgabe A2

Ein Eisenbahntunnel hat die Form einer Parabel mit einer Breite von $8\,m$ und einer Höhe von $6\,m$.

a) Bestimme eine quadratische Funktion f, deren Graph die Tunneleinfahrt beschreibt.

b) Zeichne die Tunneleinfahrt im Maßstab 1:100.

c) Es soll ein neues Zugmodell entwickelt werden, welches den Tunnel durchfahren kann. Dessen Waggons sind $3{,}20\,m$ breit und $3{,}50\,m$ hoch.
Wie weit muss die Schienenmitte vom rechten Tunnelrand für diesen Zug mindestens entfernt sein?



Aufgabe A3

Der Berliner Bogen in Hamburg ist ein Kongress- und Bürozentrum. Die Frontansicht ist parabelförmig mit einer Höhe von $36\,m$ und einer Breite von ca. $72\,m$.

a) Fertige im Maßstab 1:500 eine Planskizze an. Gib zwei Koordinatensysteme zur Beschreibung der Parabel an und bestimme jeweils den zugehörigen Funktionsterm.

b) Das Erdgeschoss mit einer Höhe von $6\,m$ ist gefolgt von 6 Stockwerken mit je $4\,m$ Höhe. Berechne die Gesamtbreite der Böden für die einzelnen Stockwerke.

Aufgabe A4

Ein Freizeitpark hat bei einem Eintrittspreis von $28\,€$ im Durchschnitt täglich 1600 Besucher. Ein Marktforschungsinstitut ermittelt:
Wenn man die Eintrittspreise um $0{,}50\,€$, $1{,}00\,€$, $1{,}50\,€$ und $2{,}00\,€$ usw. senken würde, so stiege die tägliche Besucherzahl um 40, 80, 120, 160 usw. an.

a) Stelle die täglichen Einnahmen E (in €) in Abhängigkeit von der Preissenkung x (in €) durch eine Funktionsgleichung dar.

b) Wie hoch sind die täglichen Einnahmen, wenn der Eintrittspreis $22\,€$ beträgt?

c) Welchen Eintrittspreis müsste der Freizeitpark verlangen, damit die Einnahmen möglichst hoch sind?
Wie hoch sind die Einnahmen dann?

Lösung A1

Fläche des Rechteckigen Bauplatzes:

$A_{Bauplatz} = Länge\ x\ Breite.$

Die Länge sei x, die Breite sei y.

$A = x \cdot y$

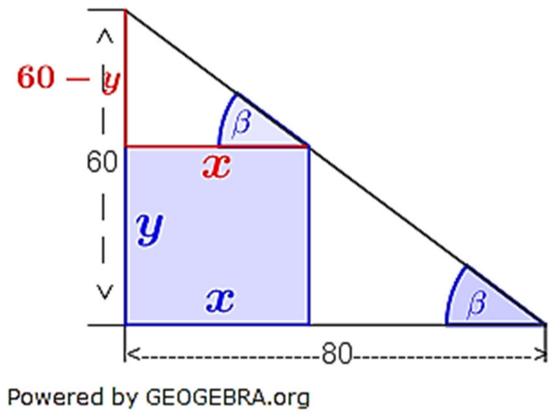
Eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Wir müssen also eine Unbekannte durch die andere Unbekannte ausdrücken.

Hierzu gilt nach dem zweiten Strahlensatz:

$\frac{60-y}{x} = \frac{60}{80}$

$60 - y = \frac{3}{4}x$

$y = 60 - \frac{3}{4}x$



Wer sich aber mit dem 2. Strahlensatz nicht mehr auskennt, kann das hier auch trigonometrisch machen, denn es gilt:

$\tan(\beta) = \frac{60-y}{x}$ und

$\tan(\beta) = \frac{60}{80}$

Also ist $\frac{60-y}{x} = \frac{60}{80}$ wie beim zweiten Strahlensatz.

$A(x) = x \cdot \left(60 - \frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$

Die Fläche des Bauplatzes ist also eine quadratische Funktion, deren Maximum im Scheite liegt.

$A(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x \qquad | \quad \cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$

$-\frac{4}{3}A(x) = x^2 - 80x = (x-40)^2 - 1600 \qquad |$ quadratische Ergänzung

$-\frac{4}{3}A(x) = (x-40)^2 - 1600 \qquad | \quad \cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

$A(x) = -\frac{3}{4}(x-40)^2 + 1200$

$S(40|1200)$

$y = 60 - \frac{3}{4}40 = 30$

Bei einem Rechteck mit den Kantenlängen $40\ m$ und $30\ m$ ist das Baugrundstück mit $1200\ m^2$ maximal.

Lösung A2

a) Wir legen das Tunnelprofil symmetrisch zur y-Achse Dann handelt es sich um eine in y-Richtung um 8 Einheiten nach oben verschobene Parabel mit den Nullstellen $N_1(-4|0)$ und $N_2(4|0)$.

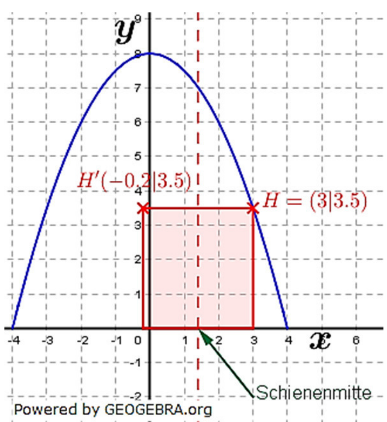
$f(x) = ax^2 + 8$

$0 = 16a + 8$

$16a = -8$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$



b) Siehe Grafik zuvor.

c) Die linke obere Ecke des Zuges darf den Parabelbogen nicht berühren. Der Zug ist nach Aufgabenstellung $3{,}5\ m$ hoch.

$3{,}5 = -\frac{1}{2}x^2 + 8$

$\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 3$

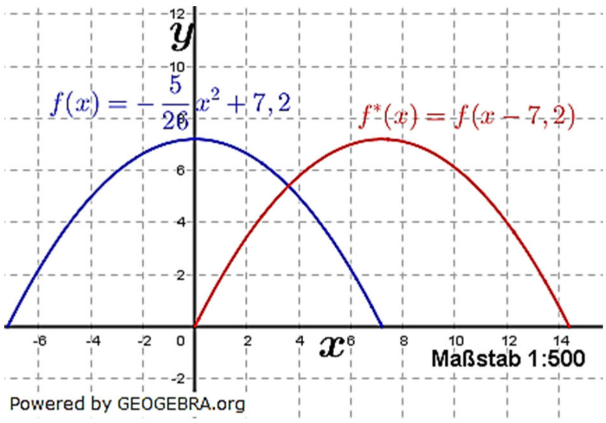
Wegen Aufgabenstellung „vom rechten Tunnelrand entfernt" ist hier $x_1 = 3$ Anzuwenden.

Bei einer Breite von $3{,}2\ m$ muss die Schienenmitte bei $x_M = 3 - \frac{3{,}2}{2} = 1{,}4\ m$ liegen. Da dann Kollisionsgefahr besteht, nehmen wir einen Sicherheitsabstand von $0{,}1\ m$ an, was zu einer Schienenmitte von $x_m = 1{,}3\ m$ führt.

Damit muss die Schienenmitte $1{,}7\ m$ vom rechten Rand entfernt sein.

Lösung A3

a) Nebenstehende Grafik zeigt zwei Möglichkeiten der Darstellung in einem Koordinatensystem.



$f(x)$ ist dabei symmetrisch zur y-Achse gelegt, während $f^*(x)$ eine um $7{,}2\ LE\ \triangleq 36\ m$ nach rechts verschobene $f(x)$ ist.

Gleichung für f:

$f(x) = ax^2 + 7{,}2$

$0 = 7{,}2^2 \cdot a + 7{,}2$

$7{,}2^2 a = -7{,}2$

$a = -\frac{1}{7{,}2} = -\frac{5}{36}$

$f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2$

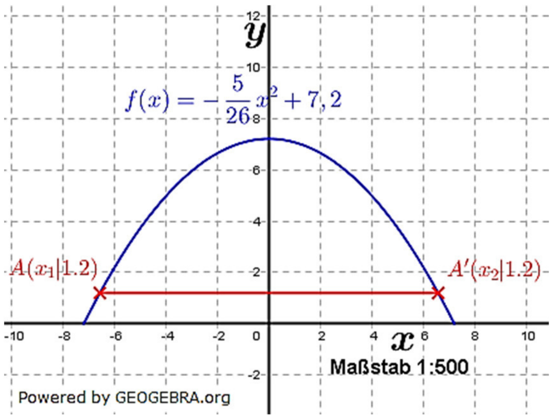
Gleichung für f^*:

$f^*(x) = -\frac{5}{36}(x - 7{,}2)^2 + 7{,}2$

$f^*(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 2x$

b) Für Aufgabenteil b) verwenden wir die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2$

Gesucht sind die Längen der Böden für die einzelnen Etagen, exemplarisch für das erste Stockwerk in nebenstehender Grafik eingezeichnet.



Höhe des Erdgeschosses ist $6\ m$, bei Maßstab $1:500$ ist somit $y = 1{,}2$.

$1{,}2 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2$

$-\frac{5}{36}x^2 = -6$

$x^2 = \frac{218}{5}$

$x_{1,2} = \pm 6{,}603$

Die Länge des Bodens zwischen Erdgeschoß und erster Etage beträgt etwa $13{,}2\ LE$ *entsprechend* $66\ m$.

Weitere Stockwerke haben jeweils $4\ m$ entsprechend $0{,}8\ LE$.
Gesucht sind somit die Bodenlängen in den Höhen:

1./2. Etage: $y = 2{,}0$
2./3. Etage: $y = 2{,}4$
3./4. Etage: $y = 2{,}8$
4./5. Etage: $y = 3{,}2$
5./6. Etage: $y = 3{,}6$

1./2. Etage:
$2{,}0 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \;=>\; \frac{5}{36}x^2 = 5{,}2;\;\; x_{1,2} = \pm 6{,}12$
Länge des Bodens: $12{,}24\ LE \;\hat{=}\; 61{,}2\ m$

2./3. Etage:
$2{,}4 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \;=>\; \frac{5}{36}x^2 = 4{,}8;\;\; x_{1,2} = \pm 5{,}88$
Länge des Bodens: $11{,}76\ LE \;\hat{=}\; 58{,}8\ m$

3./4. Etage:
$2{,}8 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \;=>\; \frac{5}{36}x^2 = 4{,}4;\;\; x_{1,2} = \pm 5{,}63$
Länge des Bodens: $11{,}26\ LE \;\hat{=}\; 56{,}3\ m$

4./5. Etage:
$3{,}2 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \;=>\; \frac{5}{36}x^2 = 4;\;\; x_{1,2} = \pm 5{,}37$
Länge des Bodens: $10{,}74\ LE \;\hat{=}\; 53{,}7\ m$

5./6. Etage:
$3{,}6 = -\frac{5}{36}x^2 + 7{,}2 \;=>\; \frac{5}{36}x^2 = 3{,}6;\;\; x_{1,2} = \pm 5{,}09$
Länge des Bodens: $10{,}18\ LE \;\hat{=}\; 50{,}9\ m$

Lösung A4

Lösungshilfe

Wir müssen die Erlösfunktion in Abhängigkeit der Preissenkungen aufstellen.
Bei einem Preis von $28\,€$ kommen täglich 1600 Besucher. Ohne Preissenkung wäre die Erlösfunktion $E(x) = 28 \cdot 1600$.
Wird der Preis auf $27{,}50\,€$ gesenkt kämen Besucher mehr. Die Erlösfunktion wäre:
$E(x) = (28 - 0{,}5) \cdot 1600 + (28 - 0{,}5) \cdot 40 = (28 - 0{,}5) \cdot (1600 + 40)$
Nun sollen wir das aber aufstellen für Preissenkungen und nicht nur für eine Preissenkung. Damit erhalten wir $E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 40x)$.

a) Einnahmen ohne Preissenkung: $E(x) = 28 \cdot 1600$.
Einnahmen bei einer Preissenkung: $E(x) = (28 - 0{,}5) \cdot 1600 + (28 - 0{,}5) \cdot 40$
$E(x) = (28 - 0{,}5) \cdot (1600 + 40)$
Einnahmen bei zwei Preissenkung:
$E(x) = (28 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot 1600 + (28 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot 2 \cdot 40$
$\quad = (28 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot (1600 + 2 \cdot 40)$
Einnahmen bei x Preissenkungen, $x \in \mathbb{Z}^+$:
$E(x) = (28 - 0{,}5x) \cdot 1600 + (28 - 0{,}5x) \cdot 40x$
$E(x) = (28 - 0{,}5x) \cdot (1600 + 40x)$
Alternativ bei x Preissenkung in €:
$E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x)$

b) Bei Eintrittspreis $20\,€$ ist $x = 8$ in €:
$E(8) = (28 - 8) \cdot (1600 + 80 \cdot 8) = 44800$
Bei einem Eintrittspreis von $20\,€$ *belaufen sich die Tageseinnahmen auf* $44800\,€$*.*

c) Eintrittspreis für maximale Tageseinnahmen:
Die Funktionsgleichung $E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Maximaleinnahmen liegen somit im Scheitelpunkt S.
$E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x) = 44800 + 2240x - 1600x - 80x^2$
$E(x) = -80x^2 + 640x + 44800 \quad | \quad : (-80)$
$-\frac{E(x)}{80} = x^2 - 8x - 560$
$-\frac{E(x)}{80} = (x - 4)^2 - 16 - 560 \quad |$ quadratische Ergänzung
$-\frac{E(x)}{80} = (x - 4)^2 - 576 \quad | \quad \cdot (-80)$
$E(x) = -80(x - 4)^2 + 46080 \quad |$ Scheitelform
$S(4|46080)$
Die Tageseinnahmen sind am höchsten, wenn der Eintrittspreis um $4\,€$ gesenkt wird.
Bei einem Eintrittspreis von $24\,€$ sind die Tageseinnahmen mit $46.800\,€$ am größten.