

### Lösung A1

Fläche des Rechteckigen Bauplatzes:

$$A_{\text{Bauplatz}} = \text{Länge} \times \text{Breite.}$$

Die Länge sei  $x$ , die Breite sei  $y$ .

$$A = x \cdot y$$

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Wir müssen also eine Unbekannte durch die andere Unbekannte ausdrücken.

Hierzu gilt nach dem zweiten Strahlensatz:

$$\frac{60-y}{x} = \frac{60}{80}$$

$$60 - y = \frac{3}{4}x$$

$$y = 60 - \frac{3}{4}x$$

Wer sich aber mit dem 2. Strahlensatz nicht mehr auskennt, kann das hier auch trigonometrisch machen, denn es gilt:

$$\tan(\beta) = \frac{60-y}{x} \text{ und}$$

$$\tan(\beta) = \frac{60}{80}$$

Also ist  $\frac{60-y}{x} = \frac{60}{80}$  wie beim zweiten

Strahlensatz.

$$A(x) = x \cdot \left(60 - \frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$$

Die Fläche des Bauplatzes ist also eine quadratische Funktion, deren Maximum im Scheite liegt.

$$A(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x \quad | \quad \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$-\frac{4}{3}A(x) = x^2 - 80x = (x - 40)^2 - 1600 \quad | \quad \text{quadratische Ergänzung}$$

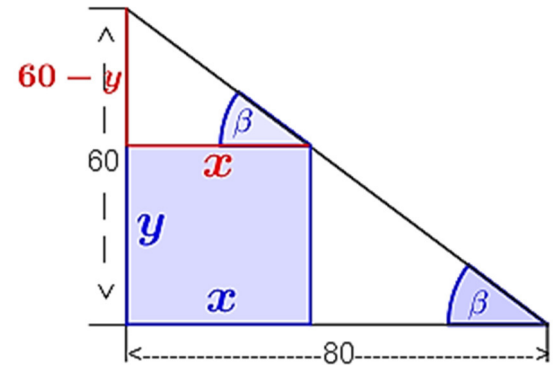
$$-\frac{4}{3}A(x) = (x - 40)^2 - 1600 \quad | \quad \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$A(x) = -\frac{3}{4}(x - 40)^2 + 1200$$

$$S(40|1200)$$

$$y = 60 - \frac{3}{4}40 = 30$$

Bei einem Rechteck mit den Kantenlängen 40 m und 30 m ist das Baugrundstück mit 1200 m<sup>2</sup> maximal.



Powered by GEOGEBRA.org

### Lösung A2

a) Wir legen das Tunnelprofil symmetrisch zur  $y$ -Achse

Dann handelt es sich um eine in  $y$ -Richtung um 8 Einheiten nach oben verschobene Parabel mit den Nullstellen  $N_1(-4|0)$  und  $N_2(4|0)$ .

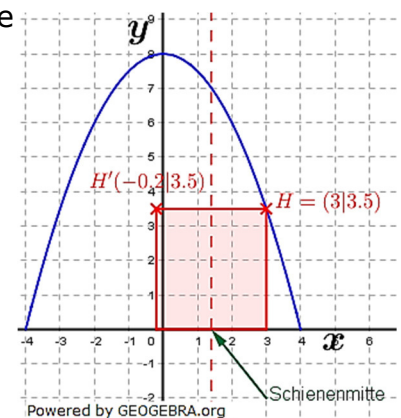
$$f(x) = ax^2 + 8$$

$$0 = 16a + 8$$

$$16a = -8$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$



Powered by GEOGEBRA.org

- b) Siehe Grafik zuvor.  
 c) Die linke obere Ecke des Zuges darf den Parabelbogen nicht berühren. Der Zug ist nach Aufgabenstellung 3,5 m hoch.

$$3,5 = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 4,5$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

Wegen Aufgabenstellung „vom rechten Tunnelrand entfernt“ ist hier  $x_1 = 3$  Anzuwenden.

Bei einer Breite von 3,2 m muss die Schienenmitte bei  $x_M = 3 - \frac{3,2}{2} = 1,4$  m

liegen. Da dann Kollisionsgefahr besteht, nehmen wir einen Sicherheitsabstand von 0,1 m an, was zu einer Schienenmitte von  $x_m = 1,3$  m führt.

Damit muss die Schienenmitte 1,7 m vom rechten Rand entfernt sein.

### Lösung A3

- a) Nebenstehende Grafik zeigt zwei Möglichkeiten der Darstellung in einem Koordinatensystem.  $f(x)$  ist dabei symmetrisch zur y-Achse gelegt, während  $f^*(x)$  eine um 7,2 LE  $\triangleq 36$  m nach rechts verschobene  $f(x)$  ist.

Gleichung für  $f$ :

$$f(x) = ax^2 + 7,2$$

$$0 = 7,2^2 \cdot a + 7,2$$

$$7,2^2 a = -7,2$$

$$a = -\frac{1}{7,2} = -\frac{5}{36}$$

$$f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2$$

Gleichung für  $f^*$ :

$$f^*(x) = -\frac{5}{36}(x - 7,2)^2 + 7,2$$

$$f^*(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 2x$$

- b) Für Aufgabenteil b) verwenden wir die Funktionsgleichung  $f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2$

Gesucht sind die Längen der Böden für die einzelnen Etagen, exemplarisch für das erste Stockwerk in nebenstehender Grafik eingezeichnet.

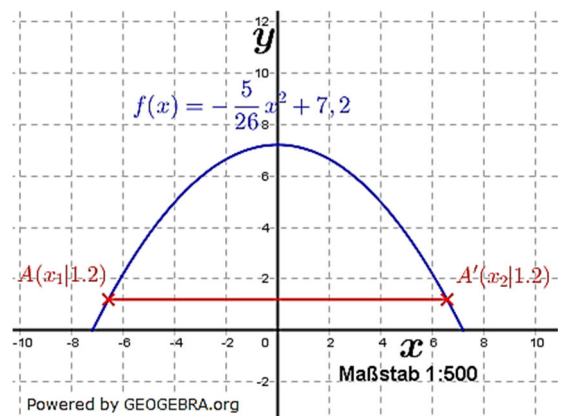
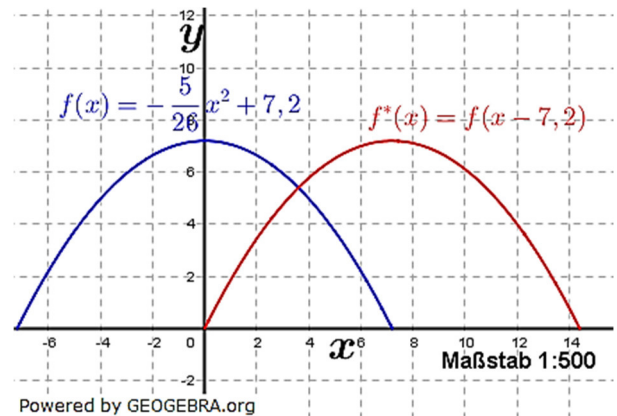
Höhe des Erdgeschosses ist 6 m, bei Maßstab 1:500 ist somit  $y = 1,2$ .

$$1,2 = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2$$

$$-\frac{5}{36}x^2 = -6$$

$$x^2 = \frac{218}{5}$$

$$x_{1,2} = \pm 6,603$$



Die Länge des Bodens zwischen Erdgeschoß und erster Etage beträgt etwa 13,2 LE entsprechend 66 m.

Weitere Stockwerke haben jeweils 4 m entsprechend 0,8 LE.

Gesucht sind somit die Bodenlängen in den Höhen:

1./2. Etage:  $y = 2,0$

2./3. Etage:  $y = 2,4$

3./4. Etage:  $y = 2,8$

4./5. Etage:  $y = 3,2$

5./6. Etage:  $y = 3,6$

1./2. Etage:

$$2,0 = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 5,2; x_{1,2} = \pm 6,12$$

Länge des Bodens: 12,24 LE  $\triangleq$  61,2 m

2./3. Etage:

$$2,4 = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 4,8; x_{1,2} = \pm 5,88$$

Länge des Bodens: 11,76 LE  $\triangleq$  58,8 m

3./4. Etage:

$$2,8 = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 4,4; x_{1,2} = \pm 5,63$$

Länge des Bodens: 11,26 LE  $\triangleq$  56,3 m

4./5. Etage:

$$3,2 = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 4; x_{1,2} = \pm 5,37$$

Länge des Bodens: 10,74 LE  $\triangleq$  53,7 m

5./6. Etage:

$$3,6 = -\frac{5}{36}x^2 + 7,2 \Rightarrow \frac{5}{36}x^2 = 3,6; x_{1,2} = \pm 5,09$$

Länge des Bodens: 10,18 LE  $\triangleq$  50,9 m

## Lösung A4

### Lösungshilfe

Wir müssen die Erlösfunktion in Abhängigkeit der Preissenkungen aufstellen.

Bei einem Preis von 28 € kommen täglich 1600 Besucher. Ohne Preissenkung wäre die Erlösfunktion  $E(x) = 28 \cdot 1600$ .

Wird der Preis auf 27,50 € gesenkt kämen Besucher mehr. Die Erlösfunktion wäre:  
 $E(x) = (28 - 0,5) \cdot 1600 + (28 - 0,5) \cdot 40 = (28 - 0,5) \cdot (1600 + 40)$

Nun sollen wir das aber aufstellen für Preissenkungen und nicht nur für eine Preissenkung. Damit erhalten wir  $E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 40x)$ .

a) Einnahmen ohne Preissenkung:  $E(x) = 28 \cdot 1600$ .

Einnahmen bei einer Preissenkung:  $E(x) = (28 - 0,5) \cdot 1600 + (28 - 0,5) \cdot 40$

$$E(x) = (28 - 0,5) \cdot (1600 + 40)$$

Einnahmen bei zwei Preissenkung:

$$E(x) = (28 - 2 \cdot 0,5) \cdot 1600 + (28 - 2 \cdot 0,5) \cdot 2 \cdot 40$$

$$= (28 - 2 \cdot 0,5) \cdot (1600 + 2 \cdot 40)$$

Einnahmen bei  $x$  Preissenkungen,  $x \in \mathbb{Z}^+$ :

$$E(x) = (28 - 0,5x) \cdot 1600 + (28 - 0,5x) \cdot 40x$$

$$E(x) = (28 - 0,5x) \cdot (1600 + 40x)$$

Alternativ bei  $x$  Preissenkung in €:

$$E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x)$$

- b) Bei Eintrittspreis 20 € ist  $x = 8$  in €:

$$E(8) = (28 - 8) \cdot (1600 + 80 \cdot 8) = 44800$$

Bei einem Eintrittspreis von 20 € belaufen sich die Tageseinnahmen auf 44800 €.

- c) Eintrittspreis für maximale Tageseinnahmen:

Die Funktionsgleichung  $E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x)$  ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Maximaleinnahmen liegen somit im Scheitelpunkt  $S$ .

$$E(x) = (28 - x) \cdot (1600 + 80x) = 44800 + 2240x - 1600x - 80x^2$$

$$E(x) = -80x^2 + 640x + 44800 \quad | \quad :(-80)$$

$$-\frac{E(x)}{80} = x^2 - 8x - 560$$

$$-\frac{E(x)}{80} = (x - 4)^2 - 16 - 560 \quad | \quad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$-\frac{E(x)}{80} = (x - 4)^2 - 576 \quad | \quad \cdot (-80)$$

$$E(x) = -80(x - 4)^2 + 46080 \quad | \quad \text{Scheitelform}$$

$$S(4|46080)$$

Die Tageseinnahmen sind am höchsten, wenn der Eintrittspreis um 4 € gesenkt wird.

Bei einem Eintrittspreis von 24 € sind die Tageseinnahmen mit 46.800 € am größten.