Lösung A1

$f_t(x) = x^2 - 0{,}5t^2x + t;\ x,t\ \in \mathbb{R}$

a) Der Graph schneidet die y-Achse in $S_y(0|1)$. Dies deutet auf $t = 1$ hin.
Die Funktionsgleichung wäre dann $f_1(x) = x^2 - 0{,}5x + 1$.
Punktprobe mit ablesbarem Punkt $P(2|4)$:
$4 = 2^2 - 0{,}5 \cdot 2 + 1$
$4 = 4$
Bei Abbildung a) ist $t = 1$.

b) Der Graph schneidet die y-Achse in $S_y(0|2)$. Dies deutet auf $t = 2$ hin. Die Funktionsgleichung wäre dann $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$.
Punktprobe mit ablesbarem Punkt $P(1|1)$:
$1 = 1 - 2 + 2$
$1 = 1$
Bei Abbildung b) ist $t = 2$.

c) Der Graph schneidet die y-Achse in $S_y(0|2)$. Dies deutet auf $t = 2$ hin. Die Funktionsgleichung wäre dann $f_2(x) = x^2 - 2x + 2$.
Punktprobe mit ablesbarem Punkt $P(-1|1)$:
$1 \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 2$
$1 \neq 5$
Abbildung c) ist kein Graph einer Funktion f_t.

Lösung A2

$f_a(x) = \frac{a}{2}x^2 - ax$

a) Eigenschaften für $a = 1$:
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$
Nach oben geöffnete mit Faktor $k = 0{,}5$ gestreckte Parabel, Symmetrieachse bei $x = 1$, Nullstellen $N_1(0|0);\ N_2(2|0)$, Scheitel bei $S(1|-0{,}5)$.
Eigenschaften für $a = -1$:
$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$
Nach unten geöffnete mit Faktor $k = 0{,}5$ gestreckte Parabel, Symmetrieachse bei $x = -1$, Nullstellen $N_1(0|0);\ N_2(-2|0)$, Scheitel bei $S(-1|0{,}5)$.
Eigenschaften für $a = 2$:
$f_2(x) = x^2 - 2x$
Nach unten geöffnete Normalparabel, Symmetrieachse bei $x = 1$, Nullstellen $N_1(0|0);\ N_2(2|0)$, Scheitel bei $S(1|-1)$.

b) Erste Winkelhalbierende $y = x$ als Tangente an K_a:
$f_a(x) \cap x$
$\frac{a}{2}x^2 - ax = x$
$\frac{a}{2}x^2 - x(a+1) = 0 \qquad | \quad \cdot \frac{2}{a}$
$x^2 - \frac{2\cdot(a+1)}{a}x = 0$
$x_{1,2} = \frac{2\cdot(a+1)}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{2\cdot(a+1)}{a}\right)^2} \qquad | \quad p/q$-Formel
Bedingung für Berührpunkt: Die Diskriminante muss null sein.
$\frac{2\cdot(a+1)}{a} = 0$
$2a + 2 = 0\ \ =>\ \ a = -1$
Die erste Winkelhalbierende ist Tangente an K_{-1}.

c) Welches a für $f_a(x)_{max} = 3$:
Ein größter Funktionswert liegt im Scheitel einer nach unten geöffneten Parabel.

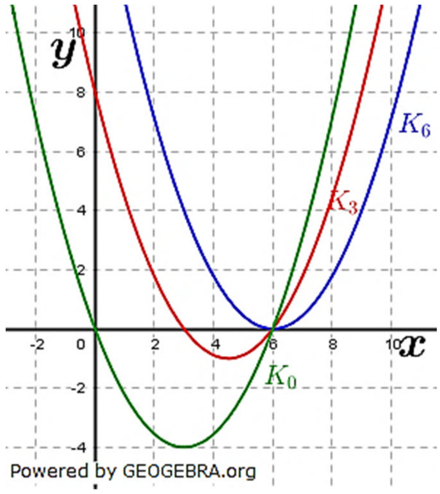
$f_a(x) = \frac{a}{2}x^2 - ax$	|	$\cdot \frac{2}{a}$
$\frac{2}{a} \cdot f_a(x) = x^2 - 2x$	|	bilde im nächsten Schritt die quadratische Ergänzung
$\frac{2}{a} \cdot f_a(x) = (x-1)^2 - 1$	|	$\cdot \frac{a}{2}$
$f_a(x) = \frac{a}{2}(x-1)^2 - \frac{a}{2}$		
		$S_a\left(1 \middle\vert -\frac{a}{2}\right)$
$-\frac{a}{2} = 3$	|	Aufgabenstellung
$a = -6$		

K_{-6} hat den größten Funktionswert $f_{-6}(1) = 3$.

Lösung A3

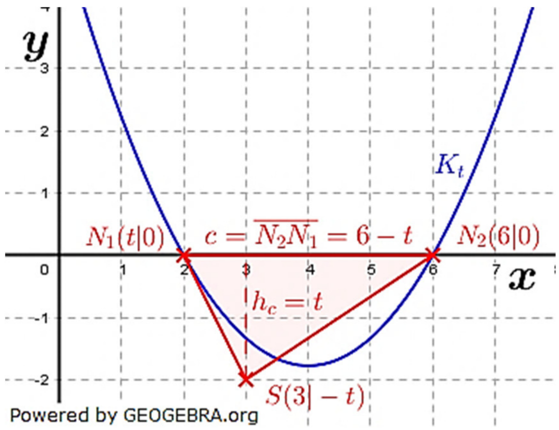
$f_t(x) = \frac{4}{9}(x-6)(x-t)$

a) Zeichnung siehe Grafik rechts.



b) Schnittpunkte Koordinatenachsen:
Nullstellen mit $f_t(x) = 0$.
Die Nullstellenform ist gegeben.
$N_1(6|0);\ \ N_2(t|0)$
Schnittpunkt y-Achse:
$f_t(0) = \frac{4}{9} \cdot (-6) \cdot (-t) = \frac{8}{3}t$
$S_y\left(0 \middle\vert \frac{8}{3}t\right)$
Welches t für nur eine Nullstelle:
Für $t = 6$ hat $f_t(x)$ nur eine Nullstelle (doppelt) bei $N_1(6|0)$. Diese Nulstelle ist gleichzeitig der Scheitel der Parabel.

c) t für Dreiecksfläche $A(t) = 4$:
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.



Die Dreiecksfläche errechnet sich aus
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.
$c = \overline{N_2N_1} = 6 - t$
$h_c = t$
$A(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (6-t) = 3t - \frac{1}{2}t^2$
$A(t) = 4$:

$3t - \frac{1}{2}t^2 = 4$	|	$-4; \cdot 2$
$6t - t^2 - 8 = 0$	|	$\cdot (-1)$
$t^2 - 6t + 8 = 0$		
$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$	|	p/q-Formel
$t_1 = 4;\ \ t_2 = 2$		
$A(2) = 4$ und $A(4) = 4$		

d) Ursprungsgerade als Tangente an K_0:

$f_0(x) = \frac{4}{9}(x-6) \cdot x$

$t(x) = mx$ | Ursprungsgerade mit Steigung m

$f_0(x) \cap t(x)$

$\frac{4}{9}(x-6) \cdot x = mx$

$\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - mx = 0$ | $\cdot \frac{4}{9}$

$x^2 - \frac{32}{27}x - \frac{4}{9}mx = 0$

$x^2 - x\left(\frac{32}{27} + \frac{4}{9}m\right) = 0$

$x_{1,2} = \frac{\frac{32}{27}+\frac{4}{9}m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{32}{27}+\frac{4}{9}m}{2}\right)^2}$

Bedingung für Tangente: Ausdruck unter der Wurzel muss null sein.

$\frac{\frac{32}{27}+\frac{4}{9}m}{2} = 0$

$\frac{32}{27} + \frac{4}{9}m = 0$

$\frac{4}{9}m = -\frac{32}{27}$ | $\cdot \frac{9}{4}$

$m = -\frac{8}{3}$

Die Ursprungsgerade $t(x) = -\frac{8}{3}x$ ist Tangente an K_0.

Lösung A4

a) $f_t(x) = t \cdot (x-1)^2$ und $g(x) = 1$

$f_t(x) \cap g(x)$

$t \cdot (x-1)^2 = 1$

$tx^2 - 2tx + t - 1 = 0$ | $:t$

$x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{t} = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1 + \frac{1}{t}}$

$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1}{t}};\quad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{t}}$

Schnittpunkte: $S_1\left(1 + \sqrt{\frac{1}{t}}\middle|1\right);\ S_2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{t}}\middle|1\right)$

b) $f_t(x) = x^2 + 4t - 2t^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x$

$f_t(x) \cap g(x)$

$x^2 + 4t - 2t^2 = -x^2 + 4x$

$2x^2 - 4x + 4t - 2t^2 = 0$ | $:2$

$x^2 - 2x + 2t - t^2 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2t + t^2}$ | p/q-Formel

$x_{1,2} = 1 \pm (1-t)$

$x_1 = t;\quad x_2 = 2 - t$

$g(t) = -t^2 + 4t;\quad g(2-t) = -(2-t)^2 + 4(2-t) = -4 + 4t - t^2 + 8 - 4t = -t^2 + 4$

Schnittpunkte: $S_1(t|4t - t^2);\ S_2(2 - t|4 - t^2)$

Lösung A5

a) Achsenschnittpunkte von f mit $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$:

Schnittpunkt mit der y-Achse $f(0)$:

$f(0)=\frac{1}{2}(0+1)^2-2=-\frac{3}{2}$

$S_y\left(0\middle|-\frac{3}{2}\right)$

Nullstellen mit $f(x)=0$

$\frac{1}{2}(x+1)^2-2=0$

$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}=0 \quad | \quad \cdot 2$

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1=1;\quad x_2=-3$

$N_1(1|0);\quad N_2(-3|0)$.

b) Achsenschnittpunkte von g_t mit $g_t(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+t$:

Schnittpunkt mit der y-Achse $g_t(0)$:

$g_t(0)=-\frac{1}{2}(0-3)^2+t=-\frac{9}{2}+t$

$S_y\left(0\middle|-\frac{3}{2}\right)$

Nullstellen mit $g_t(x)=0$

$-\frac{1}{2}(x-3)^2+t=0$

$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}+t=0 \quad | \quad \cdot(-2)$

$x^2-6x+9-2t=0$

$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-9+2t} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1=3+\sqrt{2t};\quad x_2=3-\sqrt{2t}$

$N_1(3+\sqrt{2t}|0);\quad N_2(3-\sqrt{2t}|0)$

c) Schnittpunkte von f und g_t:

$f(x)\cap g_t(x)$

$\frac{1}{2}(x+1)^2-2=-\frac{1}{2}(x-3)^2+t \quad | \quad \cdot 2$

$(x+1)^2-4=-(x-3)^2+2t$

$x^2+2x+1-4=-x^2+6x-9+2t$

$2x^2-4x+6-2t=0 \quad | \quad :2$

$x^2-2x+3-t=0$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-3+t}$

Zwei Schnittpunkte:

$-2+t>0$

$t>2$

ein Schnittpunkt:

$-2+t=0$

$t=2$

kein Schnittpunkt:

$-2+t<0$

$t<2$

Lösung A6

Berührpunkt von $f_t(x) = tx^2 + (t+1)x$ mit $g(x) = -1$:
$g(x) = -1$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand $y = -1$. f_t kann diese Gerade nur im Scheitel berühren. Aus diesem Zusammenhang heraus ergibt sich über:

$f_t(x) = tx^2 + (t+1)x \quad | \quad :t$

$\frac{f_t(x)}{t} = x^2 + \frac{t+1}{t}x$

$\frac{f_t(x)}{t} = \left(x + \frac{t+1}{2t}\right)^2 - \left(\frac{t+1}{2t}\right)^2 \quad | \quad$ Quadratische Ergänzung

$f_t(x) = t \cdot \left(x + \frac{t+1}{2t}\right)^2 - t \cdot \left(\frac{t+1}{2t}\right)^2$

$S_t\left(-\frac{t+1}{2t} \middle| -\frac{t\cdot(t+1)^2}{4t^2}\right)$

$S_t\left(-\frac{t+1}{2t} \middle| -\frac{(t+1)^2}{4t}\right)$

$-\frac{(t+1)^2}{4t} = -1$

$(t+1)^2 = 4t$

$t^2 + 2t + 1 - 4t = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$

Für $t = 1$ berührt f_1 die Gerade g mit $g(x) = -1$.
Berührpunkt $S_1(-1|-1)$

Lösung A7

t für Berührung von f_t mit $f_t(x) = x^2 - tx + 72$ und p mit $p(x) = -x^2$:

$f_t(x) \cap p(x)$

$x^2 - tx + 72 = -x^2 \quad | \quad +x^2$

$2x^2 - tx + 72 = 0 \quad | \quad :2$

$x^2 - \frac{t}{2}x + 36 = 0$

$x_{1,2} = \frac{t}{4} \pm \sqrt{\frac{t^2}{16} - 36}$

Berühren bedeutet, dass der Ausdruck unter der Wurzel null sein muss.

$\frac{t^2}{16} - 36 = 0$

$t^2 = 16 \cdot 36$

$t_{1,2} = \pm 4 \cdot 6 = \pm 24$

f_4 bzw. f_{-4} berührt p.
Berührpunkte:

$x_1 = \frac{24}{4} = 6;\quad x_2 = -\frac{24}{4} = -6$

$p(6) = -36;\quad p(-6) = -36$

$B_1(6|-36);\quad B_2(-6|-36)$

Lösung A8

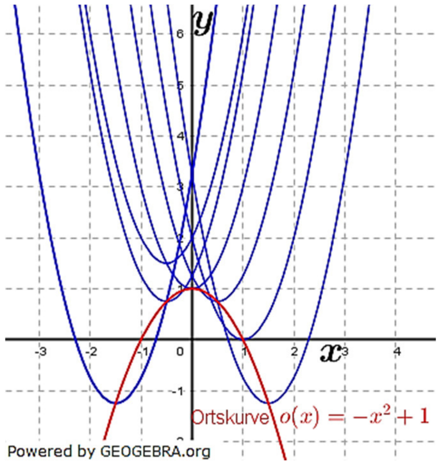
Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitel der Parabel in Abhängigkeit von t.
Stelle dann die erhaltene x-Koordinate nach t um. Setze dieses t in die y-Koordinate des Scheitels ein.
Die dadurch erhaltene Funktionsgleichung ist die Gleichung der gesuchten Ortskurve.

Level 3 – Expert – Blatt 5

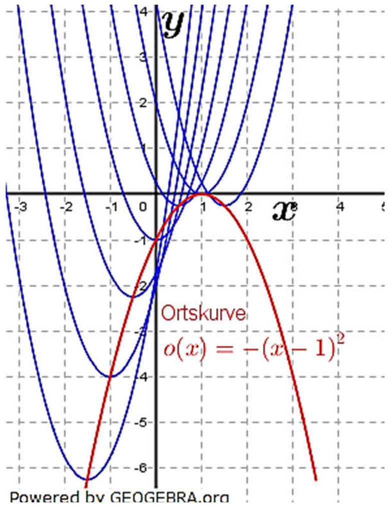
a)

$$f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + 1 \qquad | \quad :2$$
$$\frac{f_t(x)}{2} = x^2 - tx + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2} \qquad | \quad \cdot 2$$
$$f_t(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} + 1$$
$$f_t(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + 1$$
$$S_t\left(\frac{t}{2}\middle| -\frac{t^2}{4} + 1\right)$$
$$x_{S_t} = \frac{t}{2} \quad => \quad t = 2x$$
$$t \rightarrow \; -\frac{t^2}{4} + 1$$
$$o(x) = -\frac{4x^2}{4} + 1 = -x^2 + 1$$



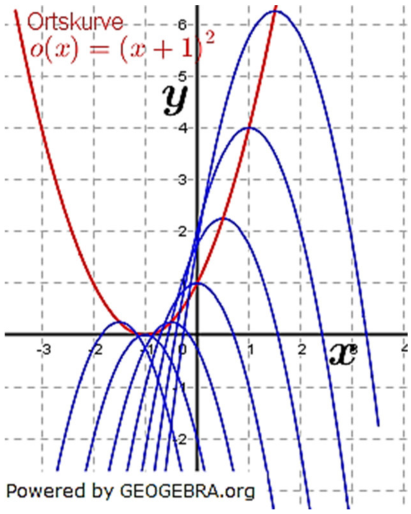
b)

$$f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + t - 1 \qquad | \quad :2$$
$$\frac{f_t(x)}{2} = x^2 - tx + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{-t^2+4t-4}{8} \qquad | \quad \cdot 2$$
$$f_t(x) = 2\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2-4t+4}{4}$$
$$S_t\left(\frac{t}{2}\middle| -\frac{(t-2)^2}{4}\right)$$
$$x_{S_t} = \frac{t}{2} \quad => \quad t = 2x$$
$$t \rightarrow \; -\frac{(t-2)^2}{4}$$
$$o(x) = -\frac{(2x-2)^2}{4} = -(x-1)^2$$



c)

$$-2x^2 + 2tx - \frac{t^2}{4} + t + 1 \qquad | \quad :(-2)$$
$$-\frac{f_t(x)}{2} = x^2 - tx + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$
$$-\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$
$$-\frac{f_t(x)}{2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{-t^2-4t-4}{8} \qquad | \quad \cdot(-2)$$
$$f_t(x) = -2\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2+4t+4}{4}$$
$$S_t\left(\frac{t}{2}\middle| \frac{(t+2)^2}{4}\right)$$
$$x_{S_t} = \frac{t}{2} \quad => \quad t = 2x$$
$$t \rightarrow \; \frac{(t+2)^2}{4}$$
$$o(x) = -\frac{(2x+2)^2}{4} = (x+1)^2$$



d) $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 4t - 1 \quad | \quad \cdot 2$

$2f_t(x) = x^2 - 4tx + 8t - 2$

$2f_t(x) = (x - 2t)^2 - 4t^2 + 8t - 2 \quad | \quad :2$

$f_t(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2t)^2 - 2t^2 + 4t - 1$

$f_t(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2t)^2 - \frac{1}{2}(4t^2 - 8t) - 1$

$f_t(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2t)^2 - \frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 2 - 1$

$f_t(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2t)^2 - \frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 2 - 1$

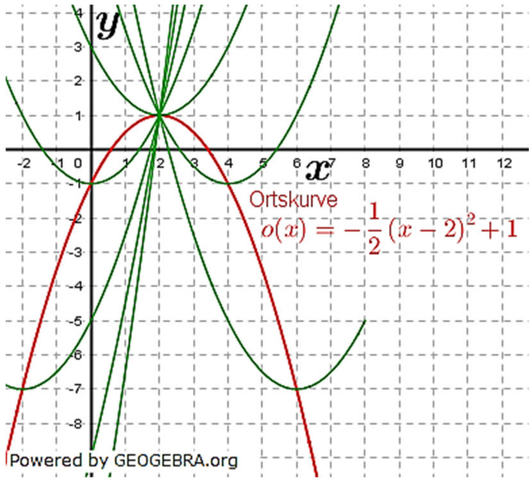
$f_t(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2t)^2 - \frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 1$

$S_t\left(2t \middle| -\frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 1\right)$

$x_{S_t} = 2t \quad => \quad t = \frac{x}{2}$

$t \to -\frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 1$

$o(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$



Lösung A9

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitel der Parabel in Abhängigkeit von t.
Stelle dann die erhaltene x-Koordinate nach t um. Setze dieses t in die y-Koordinate des Scheitels ein.
Die dadurch erhaltene Funktionsgleichung ist die Gleichung der gesuchten Ortskurve.

$f_t(x) = -\frac{t}{2}x^2 + t^2x - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + 2 \quad | \quad \cdot\left(-\frac{2}{t}\right)$

$-\frac{2}{t} \cdot f_t(x) = x^2 - 2tx + t^2 - t - \frac{4}{t}$

$-\frac{2}{t} \cdot f_t(x) = (x - t)^2 - t^2 + t^2 - t - \frac{4}{t} \quad | \quad$ quadratische Ergänzung

$-\frac{2}{t} \cdot f_t(x) = (x - t)^2 - t - \frac{4}{t} \quad | \quad \cdot\left(-\frac{t}{2}\right)$

$f_t(x) = -\frac{t}{2} \cdot (x - t)^2 + \frac{t^2}{2} + 2$

$S_t\left(t \middle| \frac{t^2}{2} + 2\right)$

$x_{S_t} = t \quad => \quad t = x$

$t \to \frac{t^2}{2} + 2$

$o(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$