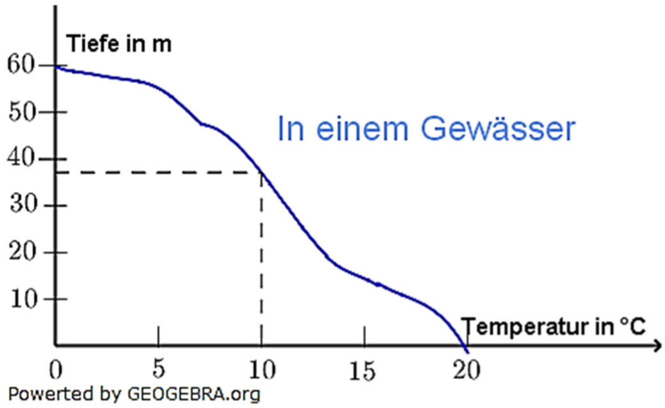
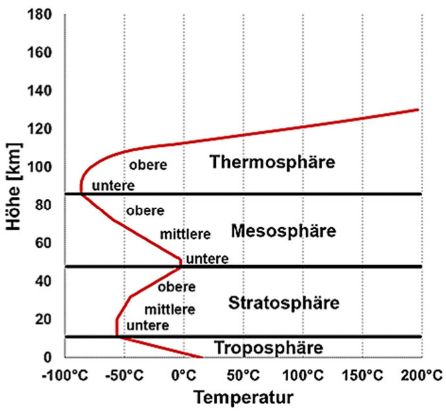
Der Begriff „Funktion"

Um uns klar zu machen, was eine **Funktion** (lateinisch *functio*) ist, betrachten wir uns die Gegenüberstellung nachfolgender Situationen.

Die Temperatur eines Gewässers wird in verschiedenen Tiefen gemessen. Ebenso die Temperatur der Atmosphäre in verschiedenen Höhen. In den nachfolgenden Grafiken sind die diesbezüglichen Messwerte der Temperaturen in Abhängigkeit der Tiefe (Gewässer) bzw. Höhe (Atmosphäre) eingetragen.





Aus der gemessenen Temperatur zwischen $0°\,C$ und $20°\,C$ lässt sich die Tiefe des Gewässers an jeder Stelle eindeutig angeben. So gehört beispielsweise in obiger Grafik zur Temperatur $10°\,C$ die Gewässertiefe etwa $38\,m$.
Die Zuordnung Temperatur $\mapsto$Tiefe (des Gewässers) ist eindeutig und daher eine Funktion.

Aus der Temperatur können wir die zugehörige Höhe in der Atmosphäre nicht ermitteln. Wir entnehmen obiger Grafik, dass z.B. die Temperatur -50 °C in der oberen Troposphäre (etwa 10 km), in der mittlerem Stratosphäre (etwa 30 km), zwischen mittlerer und oberer Mesosphäre (etwa 70 km) und in der oberen Thermosphäre (etwa 110 km) auftritt.
Die Zuordnung Temperatur $\mapsto$ Höhe (in der Atmosphäre) ist nicht eindeutig und daher keine Funktion.

Diese Erkenntnis führt uns zu folgendem

Merksatz Begriff der Funktion

Eine ***Funktion*** $\boldsymbol{f}$ *ordnet jedem* x*-Wert genau einen und* ***nur*** *einen* y*-Wert zu.*

Sie wird meistens angegeben durch einen ***Funktionsterm*** $\boldsymbol{f(x)}$ *und die* ***Definitionsmenge*** $\mathbb{D}$ *für die zulässigen* x*-Werte.*
Die Menge aller möglichen y*-Werte bezeichnen wir mit* ***Wertemenge*** *von* $\boldsymbol{f}$ *und bezeichnen diese mit* $\mathbb{W}$*.*

Darstellungsformen

Nachdem wir nun festgelegt haben, was eine Funktion überhaupt ist, müssen wir uns über die Darstellungsformen unterhalten. Hierzu kennt der Mathematiker vier Arten. Eine dieser Arten haben wir bereits in der Mittelstufe kennengelernt, nämlich die Wertetabelle.

Wertetabelle
Einer Reihe von x-Werten wird in einer Tabelle deren zugehörigen y-Werte zugeordnet, wie nachfolgendes Beispiel zeigt.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	0,9	0,75	0,74	1	2	4	9

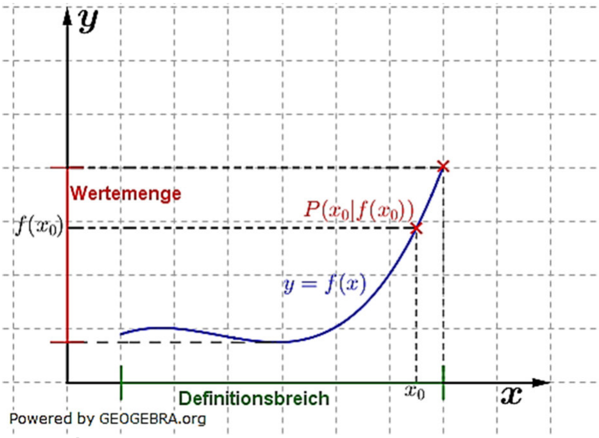
Dann gibt es als nächste Bezeichnungsform die Funktionsvorschrift

Funktionsvorschrift
$f\colon x \;\longmapsto\; 3x^2+5$
(Sprich der Funktionsname f bildet das Element x auf den Funktionsterm $3x^2+5$ ab)

Als weitere Bezeichnungsform ist die Funktionsgleichung zu nennen.

Funktionsgleichung
$f(x) = 3x^2+5$
(Sprich der Funktionswert $f(x)=y$ errechnet sich aus dem Funktionsterm $3x^2+5$)

Und als bekannteste (vierte) und wohl auch einsichtigste Darstellungsform ist der Graph einer Funktion zu nennen.

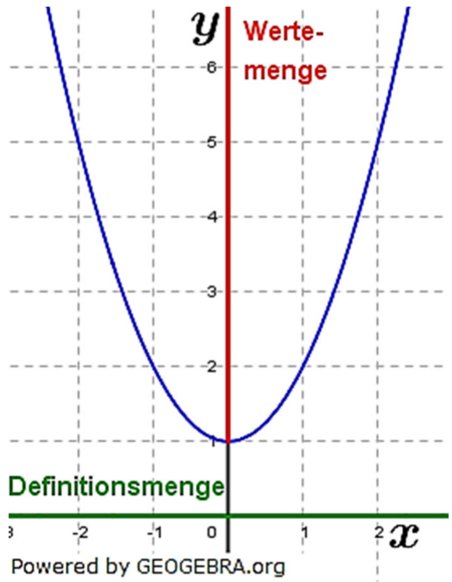


Graph von f
Der ***Graph von f*** besteht aus allen Punkten $P(x|y)$, deren Koordinaten die Gleichung $y=f(x)$ erfüllen (Punktprobe).
Die Menge aller möglichen y-Werte heißt ***Wertemenge*** von f und wird mit $\mathbb{W}$ bezeichnet.
Die Menge aller möglichen x-Werte heißt ***Definitionsmenge*** von f und wird mit $\mathbb{D}$ bezeichnet.

Beispiele

Beispiel 1
Definitionsmenge und Wertemenge
Bestimme die Definitions- und Wertemenge der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$.

Lösung 1
Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, die Definitionsmenge ist also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Wie wir dem Graphen entnehmen können, ist $f(0) = 1$ der kleinste Funktionswert von f und $\mathbb{W} = [y|y \geq 1] = [1;\infty[$ die Wertemenge von f.



Beispiel 2
Bezeichnungen und Symbole
Formuliere mithilfe mathematischer Symbole
in Worten

a) Der Funktionswert von f an der Stelle 5 ist 7.
b) Die Funktion g ordnet einer Zahl das Doppelte zu.
c) Die Definitionsmenge von h besteht aus allen positiven Zahlen.
d) g und h haben an der Stelle -1 verschiedene Werte.
e) An der Stelle a ist der Funktionswert von f kleiner als der Funktionswert von g.

Lösung 2
in mathematischen Symbolen

a) $f(5) = 7$
b) $g\colon x \mapsto 2x$ bzw. $g(x) = 2x$
c) $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}_+^*$ bzw. $\mathbb{D}_h =]0;\infty[$
d) $g(-1) \neq h(-1)$
e) $f(a) < g(a)$

Beispiel 3
Wertetabelle, Graph, Definitionsmenge, Wertemenge
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge von f.
b) Berechne den Funktionswert an der Stelle $x_1 = -0{,}5$.
c) Zeichne den Graphen von f mithilfe einer Wertetabelle im Intervall $[-3;4]$. Runde die x-Werte auf eine Nachkommastelle.
d) Gib die Wertmenge von f an.

Lösung 3

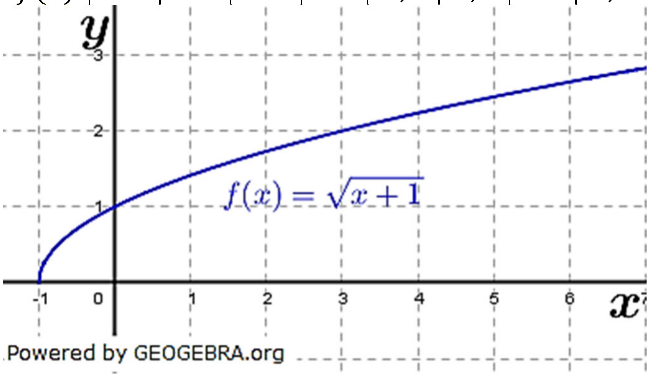
a) Der Wert unter der Wurzel darf nicht kleiner als Null werden, also $\mathbb{D} = [-1; \infty[$

b) $f(-0{,}5) = \sqrt{-0{,}5+1} = \sqrt{0{,}5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

c) Graph siehe nebenstehend.

d) Die Wertemenge besteht aus allen nicht negativen Zahlen. Es ist also $\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–	–	0	1	$1{,}4$	$1{,}7$	2	$2{,}2$



Funktionsklassen im Einzelnen

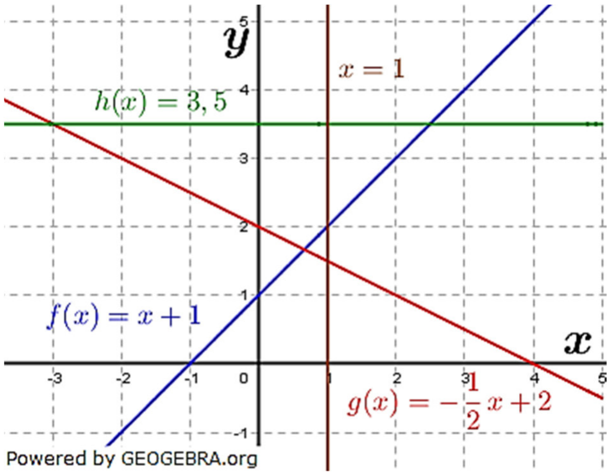
Betrachten wir uns nun die einzelnen Funktionsklassen.

1. Lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind Geraden. Aus früheren Klassenstufen kennen wir schon deren allgemeine Form mit $y = mx + c$. Der Graph linearer Funktionen ist eine Gerade.

In der seitlichen Abbildung erkennen wir Geraden mit positiver Steigung, mit negativer Steigung und mit der Steigung gleich Null. Geraden mit der Steigung Null verlaufen parallel zur x-Achse.

Eine Sonderform nimmt die Gleichung einer parallelen Geraden zur y-Achse ein. Diese lautet $x = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, c gibt dabei den Abstand der Geraden zur y-Achse an.



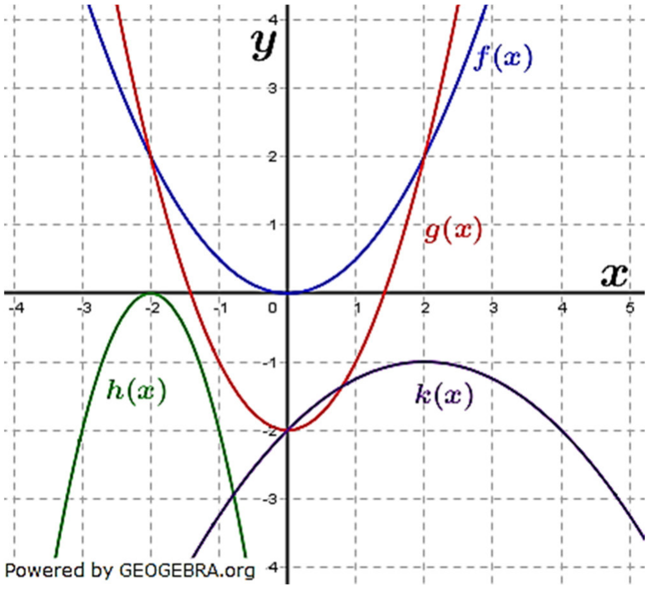
Aus den zuvor aufgeführten Bedingungen ergibt sich für die x-Achse selbst die Funktionsgleichung $y = 0$ und für die y-Achse die Gleichung $x = 0$.

(Beachte zum zuletzt Gesagten: wir sprechen bei $x = c$ nicht von einer Funktionsgleichung, da $x = c$ keine Funktion ist, denn hier wird ja einem einzelnen Wert $x = c$ eine unendliche Anzahl von y-Werten zugeordnet.)

Nähere Informationen und Aufgaben hierzu findest du im Kapitel „*Lineare Funktionen der Funktionsklassen*“.

2. Quadratische Funktionen (Parabeln)

Quadratische Funktionen sind Kurven. Aus früheren Klassenstufen kennen wir schon deren allgemeine Form mit $y = ax^2 + bx + c$. Der Graph quadratischer Funktionen heißt Parabel.



In der seitlichen Abbildung erkennen wir Parabeln die nach oben geöffnet sind ($f(x)$ und $g(x)$) und solche, die nach unten geöffnet sind ($h(x)$ und $k(x)$). Außerdem erkennen wir schmäler geöffnete ($h(x)$) als auch breiter geöffnete Parabeln ($k(x)$). Dieses Verhalten wird durch den Parameter a von x^2 verursacht.

Wir erkennen in y-Richtung verschobene Parabeln ($g(x)$ und $k(x)$). Dieses Verhalten wird durch den Parameter c verursacht.

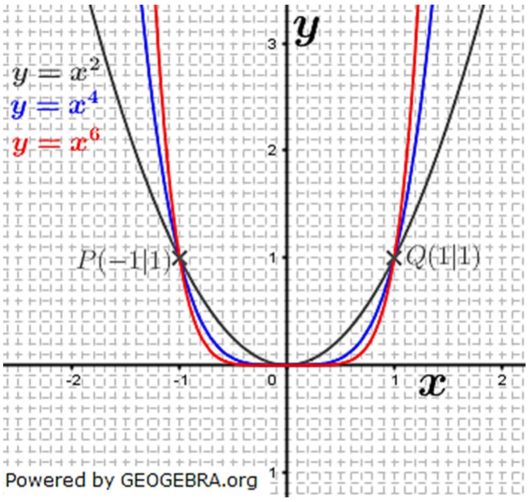
Wir erkennen in x-Richtung verschobene Parabeln ($h(x)$ und $k(x)$). Dieses Verhalten wird durch den Parameter b von x verursacht.

Nähere Informationen und Aufgaben hierzu findest du im Kapitel „*Quadratische Funktionen der Funktionsklassen*“.

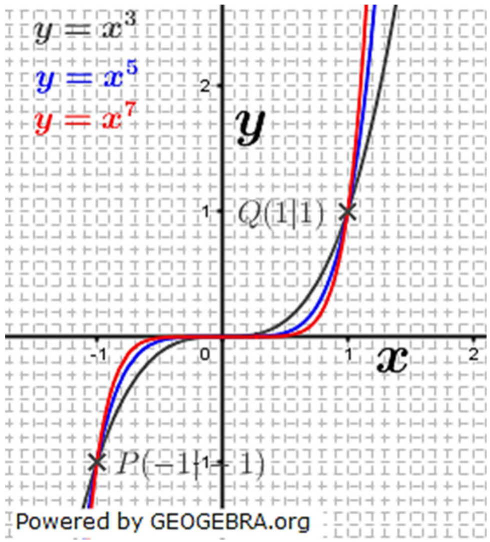
3. Potenzfunktionen

Neben linearen und quadratischen Funktionen gibt es weitere Funktionen, wie zum Beispiel die Potenzfunktionen. Funktionen wie etwa $f(x) = x^3$, $f(x) = 2x^3$ oder $f(x) = -0{,}7x^3$ sind Potenzfunktionen $3.$ Grades. Die Zuordnung „$3.$ Grades" rührt vom Exponenten von x her. Entsprechend gibt es Potenzfunktionen $4.$, $5.$, $6.$ usw. Grades.

Einige der besonderen Eigenschaften von Potenzfunktionen sind nachfolgend zusammengestellt.



1. Die Graphen verlaufen von „links oben" nach „rechts oben" (vom 2. Quadranten in den 1. Quadranten). Sie gehen alle durch die Punkte $P(-1|1)$ und $Q(1|1)$.
2. Die Graphen liegen achsensymmetrisch zur y-Achse.
3. Der kleinste Funktionswert ist $f(0) = 0$. $O(0|0)$ ist somit der tiefste Punkt der Graphen.



1. Die Graphen verlaufen von „links unten" nach „rechts oben" (vom 3. Quadranten in den 1. Quadranten). Sie gehen alle durch die Punkte $P(-1|-1)$ und $Q(1|1)$.
2. Die Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
3. Es gibt keinen kleinsten bzw. größten Funktionswert.

Bei den zuvor abgebildeten Potenzfunktionen ist der Exponent von x stets eine ganze, positive Zahl. Andere Potenzfunktionen haben negative Hochzahlen – z. B. $f(x) = x^{-2}$ – wiederum andere gar Brüche als Exponenten – z. B. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

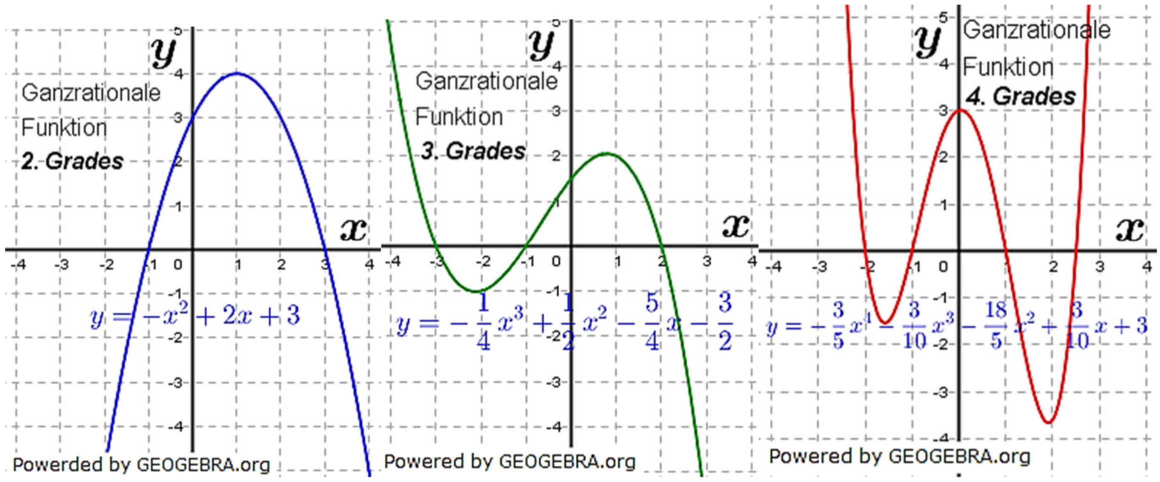
Weitere Informationen und Aufgaben zu allen Ausprägungen von Potenzfunktionen findest du im Kapitel „*Potenzfunktionen der Funktionsklassen*".

4. Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen sind zusammengesetzte Funktionen, deren einzelne Glieder wiederum aus Potenzfunktionen mit ganzzahlig positivem Exponenten bestehen.
Die allgemeinen Form einer Ganzrationalen Funktion lautet:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n ist höchste Potenz, $n-1$ ist die um 1 verminderte höchste Potenz, $n-2$ die um 2 verminderte höchste Potenz usw. bis zur Potenz 1 bei $a_1 x$. Am Ende der Funktionsgleichung steht dann das absolute Glied a_0.
Die a-Werte in der Gleichung werden als Koeffizienten bezeichnet. Alle a sind Element von $\mathbb{R}$. Die Indices von a_n, a_{n-1}, a_{n-2} usw. verweisen auf die Teilfunktion mit dem entsprechenden n als Exponenten.



Entsprechend der höchsten Potenz n von x wird den ganzrationalen Funktionen ein Grad zugesprochen. Ist $n = 3$, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Ist $n = 4$, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Ist $n = 5$, so handelt es sich …
Ganzrationale Funktionen werden auch Polynome oder (seltener für Funktionen mit einem Grad größer $n = 2$) Parabeln genannt.
Auch die bereits behandelten lineare Funktionen g mit $g(x) = mx + c$ und die quadratischen Funktionen p mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ zählen zu den ganzrationalen Funktionen. Erstere ist vom Grad 1, letztere vom Grad 2.

Weitere Informationen und Aufgaben zu allen Ausprägungen von Ganzrationalen Funktionen findest du im Kapitel „*Ganzrationale Funktionen der Funktionsklassen*“.