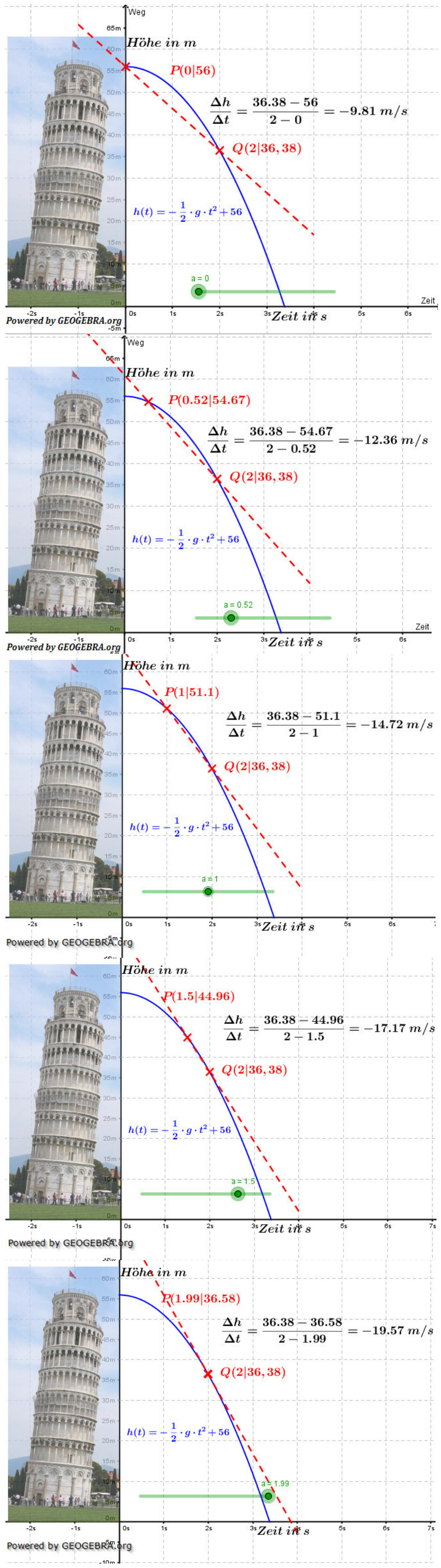
Die momentane (lokale) Änderungsrate

Inhaltsverzeichnis
Momentanen Änderungsrate

Kapitel mit 50 Aufgaben

Haben wir im Kapitel „Mittlere Änderungsrate" kennengelernt, wie wir das Steigungsverhalten von Kurven zwischen zwei bestimmten Kurvenpunkten ermitteln, so ist es auch von Interesse zu wissen, wie die Änderungsrate in einem einzigen bestimmten Punkt der Kurve aussieht.

Um zu verdeutlichen, wie das geschieht, betrachten wir wieder das Beispiel mit dem schiefen Turm zu Pisa aus dem Kapitel „Mittlere Änderungsrate".



In den nebenstehenden Grafiken sehen wir zunächst die Ausgangssituation. Die mittlere Änderungsrate zwischen den Punkten P und Q beträgt $-9{,}81\,\frac{m}{s}$.

Wir möchten wissen, welche Geschwindigkeit denn genau im Punkt Q herrscht. Hierzu lassen wir den Punkt P entlang der Kurve auf den Punkt Q zuwandern indem der grün markierte Schieberegler a in der Bildmitte jeweils um $0{,}5$ Einheiten näher an Q herangeführt wird. (Beachte dabei, wie sich die Koordinaten des Punktes P und auch der Differenzenquotient $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ verändern.)

Fällt letztendlich P mit Q zusammen, zeigt uns der Differenzenquotient dann die genaue Geschwindigkeit im Punkt Q mit $-19{,}57\,m/s$ an.

Letztendlich haben wir somit die ursprüngliche Sekante in eine Tangente an den Graphen von f überführt. Dies führt uns zu folgendem

Merksatz

*Die momentane Änderungsrate einer Funktion f in einem beliebigen Punkt $Q(a|f(a))$ entspricht der **Steigung der Tangente** an den Graphen der Funktion im Punkt Q.*
Mithilfe der momentanen Änderungsrate lässt sich somit die Steigung jeder beliebig geformten Kurve in jedem ihrer Punkte bestimmen.

Hinweis:
Im Online-Portal sind die nebenstehend ab gebildeten Grafiken animierbar. Schaue dort einmal vorbei.

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x;\ x \in \mathbb{R}$.

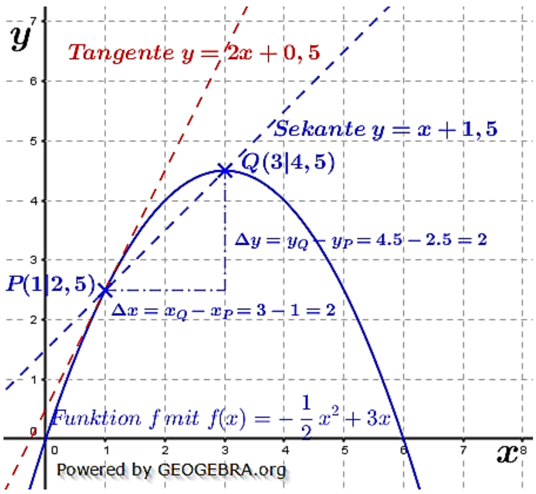
a) Berechne die mittlere Änderungsrate im Intervall $I = [1;3]$.

b) Berechne die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 1$. Interpretiere den Sachverhalt geometrisch.

Lösung

a) Mittlere Änderungsrate in $I = [1;3]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4{,}5-2{,}5}{2} = 1$$



b) Momentane Änderungsrate in $x = 1$:
Hierzu wählen wir den Punkt $P(1|f(1))$ und einen Punkt Q, der etwas weiter rechts von P zu liegen kommt, zum Beispiel den Punkt $Q(1{,}1|f(1{,}1))$.
Mithilfe einer Tabelle berechnen wir nun mehrere Differenzenquotienten, indem wir die x–Koordinate von Q immer näher an die x–Koordinate von P heranrücken. Das sieht dann so aus:

Intervall $[x_P;x_Q]$	$[1;1{,}1]$	$[1;1{,}01]$	$[1;1{,}001]$	$[1;1{,}0001]$
$\Delta x = x_Q - x_P$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{f(x_Q)-f(x_P)}{\Delta x}$	1,95	1,995	1,9995	1,99995

Je näher wir also dem Punkt P kommen, umso näher kommt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Zahl 2.
Wir können also sagen, dass die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $P(1|f(1))$ $m_t = 2$ ist. Mathematisch ausgedrückt:
Die mittlere Änderungsrate auf $I = [1;x_q]$ strebt für $\Delta x \longrightarrow 0$ gegen 2.
Die momentane Änderungsrate in $x = 1$ ist 2.

Geometrische Bedeutung

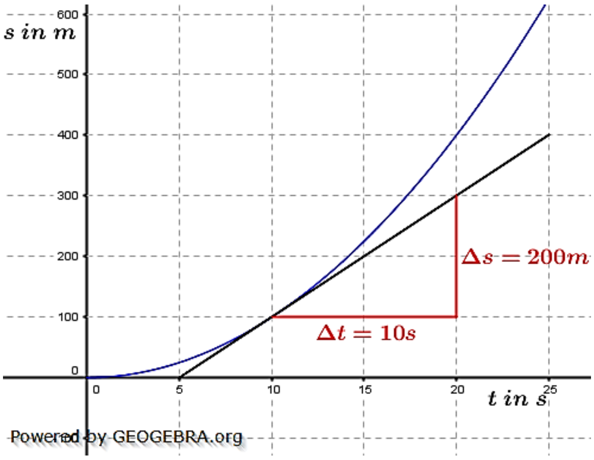
Die ***momentane Änderungsrate*** in $x_P = 1$ ist gleich der Steigung der ***Tangente*** durch den Punkt $P(1|f(1))$. Dies ist gleichzeitig die Steigung des Graphen der Funktion in $x_P = 1$.

Beispiel 2

Ein Flugzeug beschleunigt beim Startvorgang bis zum Abheben.
Das $s-t$-Diagramm zeigt den zurückgelegten Weg s in m in Abhängigkeit von der Zeit t in s.
Da die Geschwindigkeit v in den ersten $20\,s$ stetig zunimmt, kann man die Momentangeschwindigkeit v nicht mehr mit $v=\frac{s}{t}$ berechnen.
Bestimme die Geschwindigkeit des Flugzeuges zum Zeitpunkt $t=10s$ aus dem Diagramm heraus.

Lösung

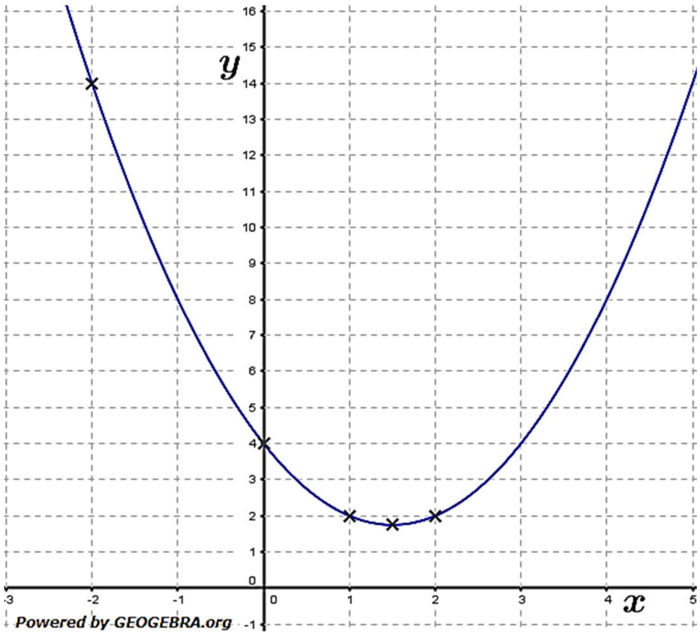
Da wir keine Messdaten zur Verfügung haben, sondern nur den Graphen im $s-t$-Diagramm, legen wir eine Tangente an den Graphen bei $t=10s$.
Wir tragen dann ein geeignetes Steigungsdreieck an die Tangente an und ermitteln daraus den Differenzenquotienten.
Aus der Grafik lesen wir ab:
$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{200}{10}=20\,m/s$
Die Geschwindigkeit des Flugzeuges zum Zeitpunkt $t=10s$ beträgt $20\,m/s$.



Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 + x$ (siehe Grafik).
Zeichne in den Stellen x_0 Tangenten an den Graphen und bestimme mit Hilfe eines Steigungsdreiecks die momentane Änderungsrate an den Stellen x_0.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 1{,}5$
d) $x_0 = 2$
e) $x_0 = -2$

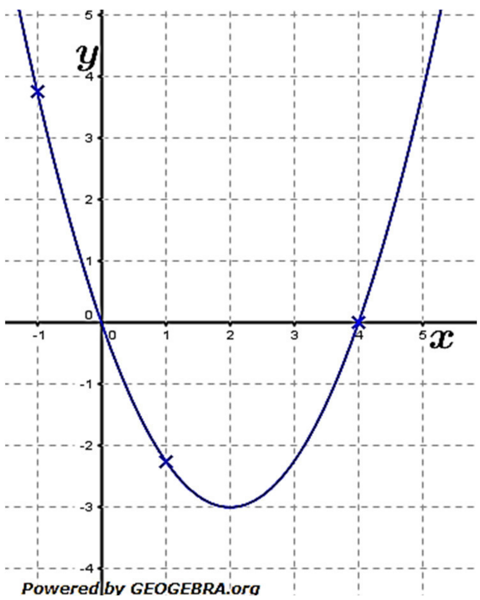


Bestimme auch die Funktionsgleichungen der Tangenten mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Formel.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$.
Zeichne in den Stellen x_0 Tangenten an den Graphen und bestimme mit Hilfe eines Steigungsdreiecks die momentane Änderungsrate an den Stellen x_0.

a) $x_0 = -1$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 4$



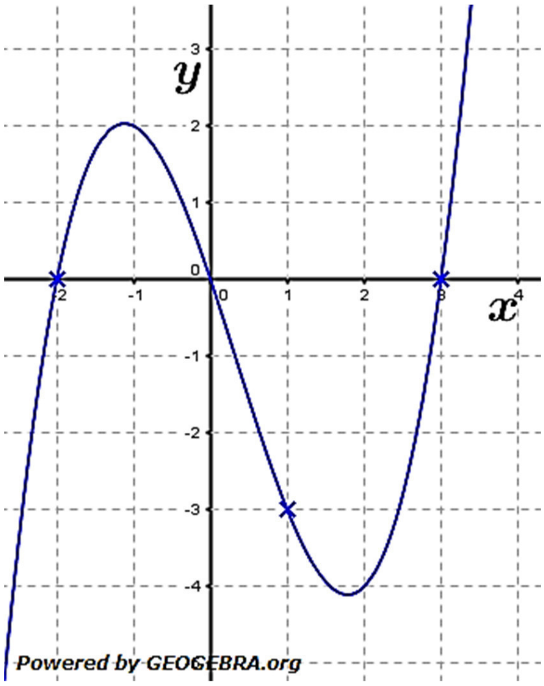
Bestimme auch die Funktionsgleichungen der Tangenten mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Formel.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x$.

Zeichne in den Stellen x_0 Tangenten an den Graphen und bestimme mit Hilfe eines Steigungsdreiecks die momentane Änderungsrate an den Stellen x_0.

a) $x_0=-2$
b) $x_0=1$
c) $x_0=3$

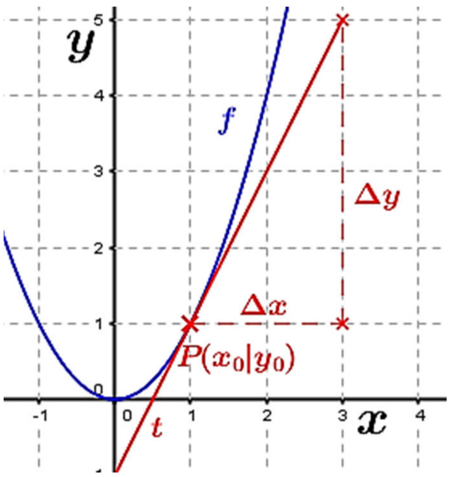


Bestimme auch die Funktionsgleichungen der Tangenten mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Formel.

Lösungshinweis:
Punkt-Steigungsformel:
Ist $P(x_0|y_0)$ Punkt einer Funktion f und t die Tangente an f in P, so gilt:

$$t(x)=m\cdot(x-x_0)+y_0$$

mit $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Steigungsdreieck.



Lösung A1

a) $x_0 = 0$ (rotes Steigungsdreieck)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{2} = -3$

Die Tangente an f im Punkt $P(0|4)$ hat die Steigung $m_t = -3$.

$t_0(x) = -3x + 4$

b) $x_0 = 1$ (grünes Steigungsdreieck)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{2} = -1$

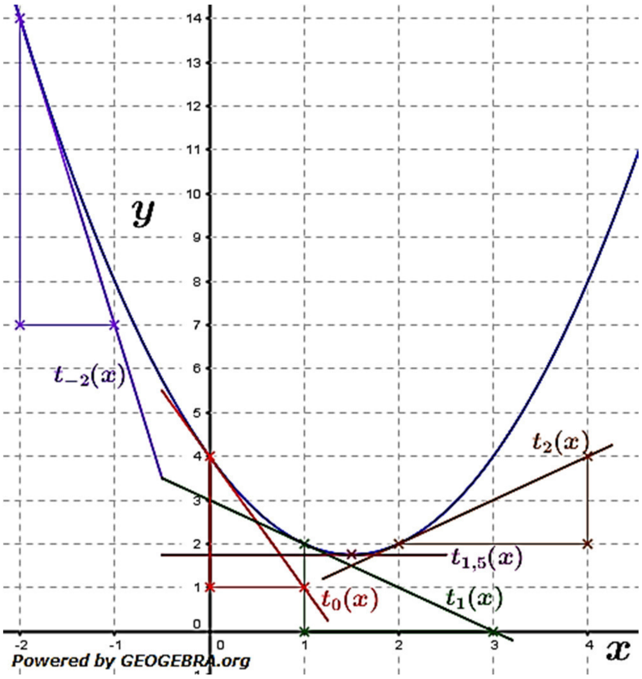
Die Tangente an f im Punkt $P(1|2)$ hat die Steigung $m_t = -1$.

$t_1(x) = -x + 3$

c) $x_0 = 1{,}5$ (lila Linie)

Im Punkt $P(1{,}5|1{,}75)$ kann kein Steigungsdreieck gebildet werden, da die Steigung $m_t = 0$ ist.

$t_{1,5}(x) = 1{,}75$



d) $x_0 = 2$ (braunes Steigungsdreieck)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$

Die Tangente an f im Punkt $P(2|2)$ hat die Steigung $m_t = 1$.

$t_2(x) = x$

e) $x_0 = -2$ (blaues Steigungsdreieck)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7}{1} = -7$

Die Tangente an f im Punkt $P(-2|14)$ hat die Steigung $m_t = -7$.

$t_{-2}(x) = -7x$

Lösung A2

a) $x_0 = -1$ (rotes Steigungsdreieck)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4{,}5}{1} = -4{,}5$

Die Tangente an f im Punkt $P(-1|3{,}75)$ hat die Steigung $m_t = -4{,}5$.

$t_{-1}(x) = -4{,}5x - 0{,}75$

b) $x_0 = 1$ (grünes Steigungsdreieck)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1{,}5}{1} = -1{,}5$

Die Tangente an f im Punkt $P(1|-2{,}25)$ hat die Steigung $m_t = -1{,}5$.

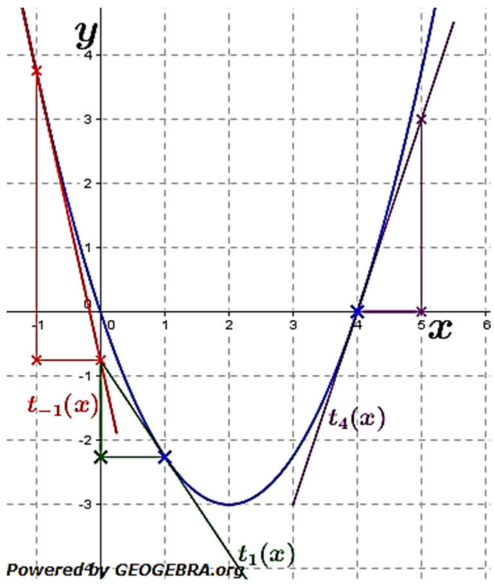
$t_1(x) = -1{,}5x - 0{,}75$

c) $x_0 = 4$ (lila Steigungsdreieck)

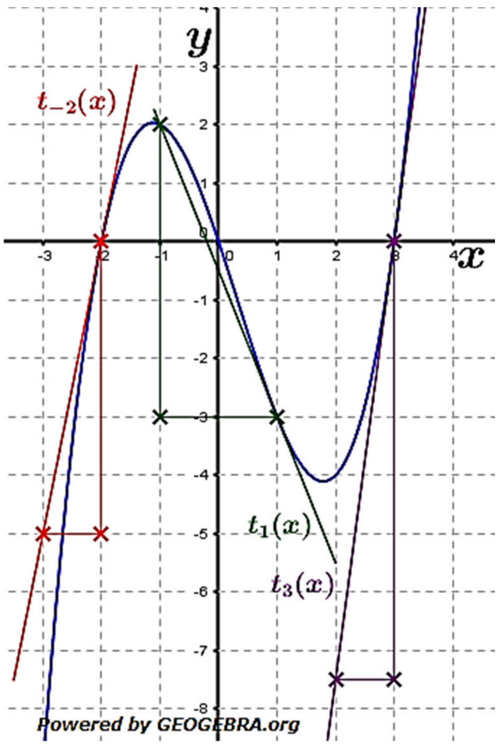
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$

Die Tangente an f im Punkt $P(4|0)$ hat die Steigung $m_t = 3$.

$t_4(x) = 3x - 12$



Lösung A3



a) $x_0 = -2$ (rotes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{1} = 5$
Die Tangente an f im Punkt $P(-2|0)$ hat die Steigung $m_t = 5$.
$t_{-2}(x) = x + 10$

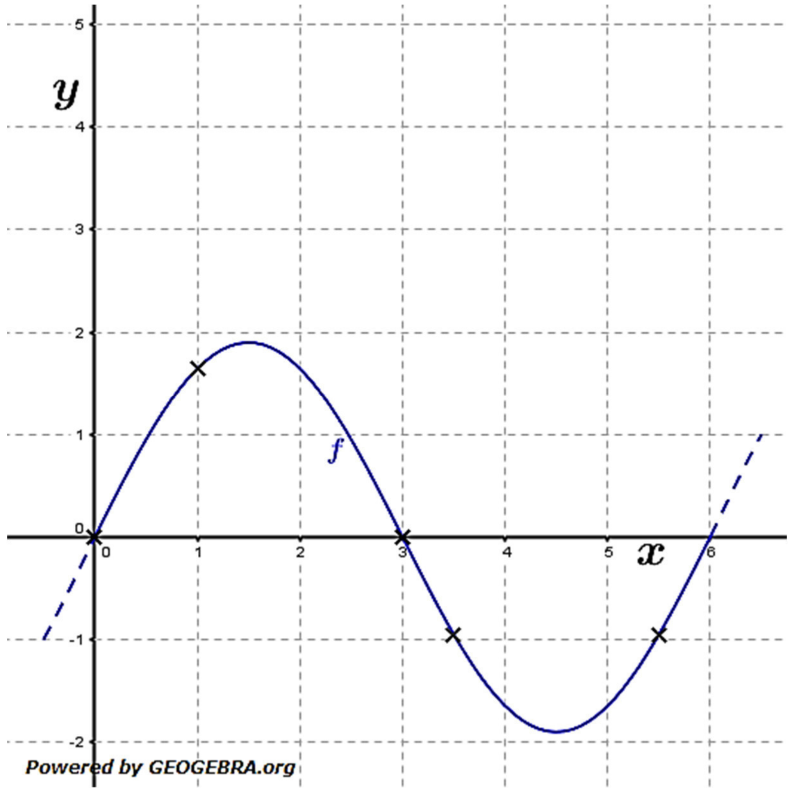
b) $x_0 = 1$ (grünes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$
Die Tangente an f im Punkt $P(1|-3)$ hat die Steigung $m_t = -2{,}5$.
$t_1(x) = -2{,}5x - 0{,}5$

c) $x_0 = 3$ (lila Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7{,}5}{1} = 7{,}5$
Die Tangente an f im Punkt $P(3|0)$ hat die Steigung $m_t = 7{,}5$.
$t_3(x) = 7{,}5x - 22{,}5$

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}9\,sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ (siehe Grafik). Zeichne in den Stellen x_0 Tangenten an den Graphen und bestimme mithilfe eines Steigungsdreiecks die momentane Änderungsrate an den Stellen x_0.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 3$
d) $x_0 = 3{,}5$
e) $x_0 = 5{,}5$

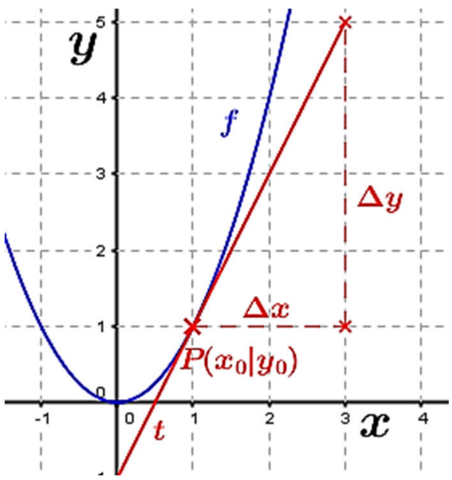


Bestimme auch die Funktionsgleichungen der Tangenten mithilfe der Punkt-Steigungs-Formel.

Lösungshinweis:
Punkt-Steigungsformel:
Ist $P(x_0|y_0)$ Punkt einer Funktion f und t die Tangente an f in P, so gilt:

$$t(x) = m \cdot (x - x_0) + y_0$$

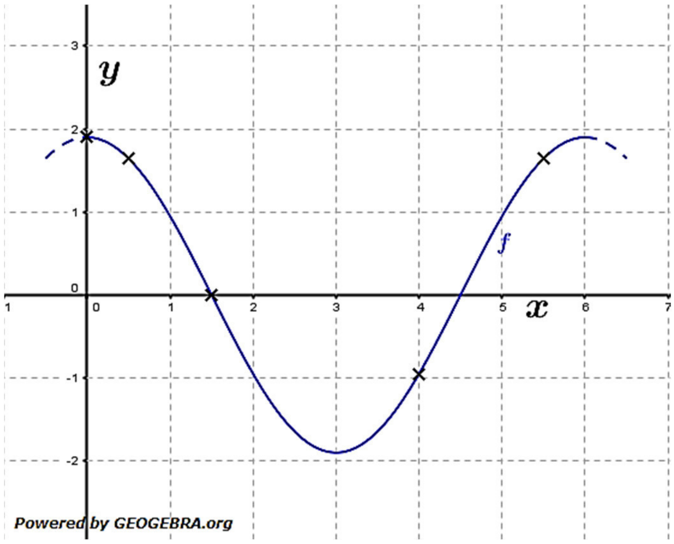
mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Steigungsdreieck.



Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}9\,cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ (siehe Grafik). Zeichne in den Stellen x_0 Tangenten an den Graphen und bestimme mithilfe eines Steigungsdreiecks die momentane Änderungsrate an den Stellen x_0.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 0{,}5$
c) $x_0 = 1{,}5$
d) $x_0 = 4$
e) $x_0 = 5{,}5$

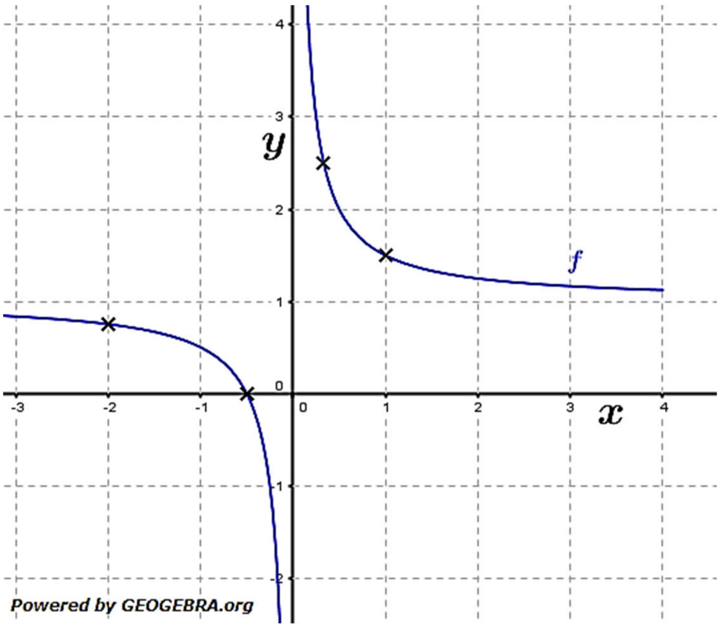


Bestimme auch die Funktionsgleichungen der Tangenten mithilfe der Punkt-Steigungs-Formel.

Aufgabe A3

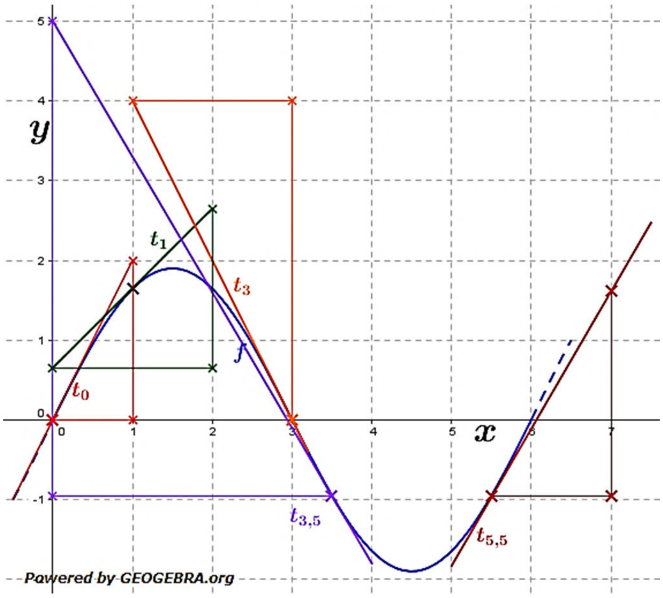
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2x} + 1$ (siehe Grafik). Zeichne in den Stellen x_0 Tangenten an den Graphen und bestimme mithilfe eines Steigungsdreiecks die momentane Änderungsrate an den Stellen x_0.

a) $x_0 = -2$
b) $x_0 = -0{,}5$
c) $x_0 = \frac{1}{3}$
d) $x_0 = 1$



Bestimme auch die Funktionsgleichungen der Tangenten mithilfe der Punkt-Steigungs-Formel.

Lösung A1



a) $x_0 = 0$ (rotes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$
Die Tangente an f im Punkt $P(0|0)$ hat die Steigung $m_t = 1$.
$t_0(x) = 2x$

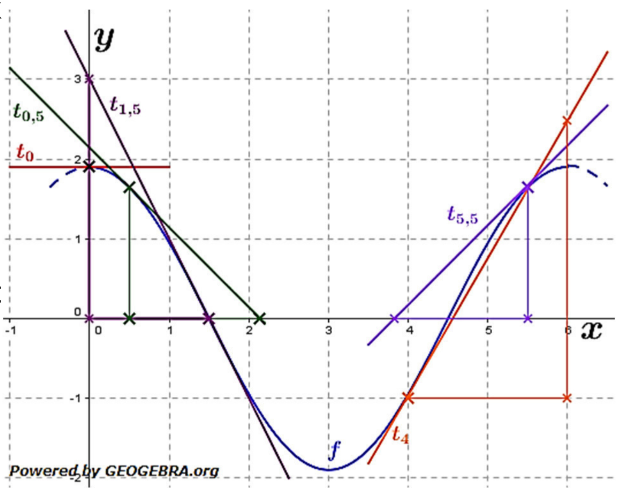
b) $x_0 = 1$ (grünes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$
Die Tangente an f im Punkt $P(1|1.65)$ hat die Steigung $m_t = 1$.
$t_1(x) = x + 0{,}65$

c) $x_0 = 3$ (oranges Steigungsdreieck
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$
Die Tangente an f im Punkt $P(3|0)$ hat die Steigung $m_t = -2$.
$t_3(x) = -2x + 6$

d) $x_0 = 3{,}5$ (lila Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5{,}95}{3{,}5} = -1{,}7$
Die Tangente an f im Punkt $P(3{,}5|-0{,}95)$ hat die Steigung $m_t = -1{,}7$.
$t_{3,5}(x) = -1{,}7x + 5$

e) $x_0 = 5{,}5$ (braunes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}55}{1{,}5} = 1{,}7$
Die Tangente an f im Punkt $P(5{,}5|-0{,}95)$ hat die Steigung $m_t = 1{,}7$.
$t_{5,5}(x) = 1{,}7x - 10{,}4$

Lösung A2



a) $x_0 = 0$ (kein Steigungsdreieck möglich), $m = 0$
Die Tangente an f im $P(2|2)$ hat die Steigung $m_t = 0$.
$t_0(x) = 2$

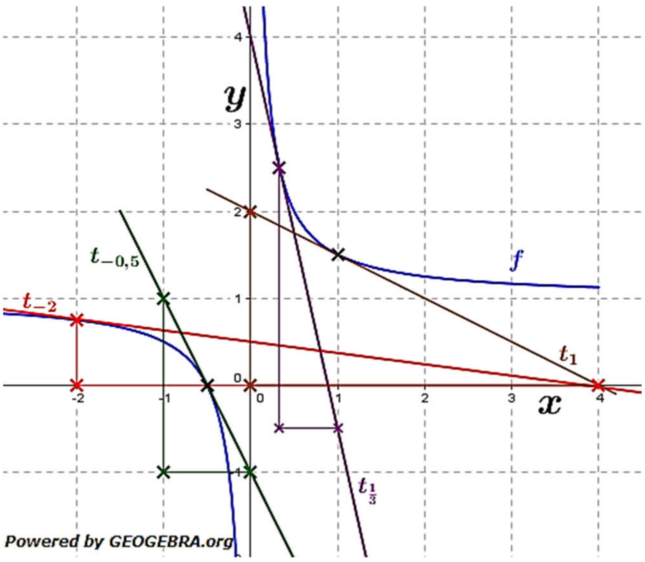
b) $x_0 = 0{,}5$ (grünes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2{,}2}{2{,}2} = -1$
Die Tangente an f im Punkt $P(0{,}5|1{,}65)$ hat die Steigung $m_t = -1$.
$t_{0,5}(x) = -x + 2{,}2$

c) $x_0 = 1{,}5$ (lila Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1{,}5} = -2$
Die Tangente an f im Punkt $P(1{,}5|0)$ hat die Steigung $m_t = -2$.
$t_4(x) = -2x + 3$

d) $x_0 = 4$ (oranges Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75$
Die Tangente an f im Punkt $P(4|-1)$ hat die Steigung $m_t = 1{,}75$.
$t_4(x) = 1{,}75x - 7{,}9$

e) $x_0 = 5{,}5$ (hell lila Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}7}{1{,}7} = 1$
Die Tangente an f im Punkt $P(5{,}5|1{,}7)$ hat die Steigung $m_t = 1$.
$t_{5,5}(x) = x - 3{,}8$

Lösung A3



a) $x_0 = -2$ (rotes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0{,}75}{6} = -0{,}13$
Die Tangente an f im Punkt $P(-2|0{,}75)$ hat die Steigung $m_t = -0{,}13$.
$t_{-2}(x) = -0{,}13x + 0{,}5$

b) $x_0 = -0{,}5$ (grünes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$
Die Tangente an f im Punkt $P(0{,}5|0)$ hat die Steigung $m_t = -2$.
$t_{-0,5}(x) = -2x - 1$

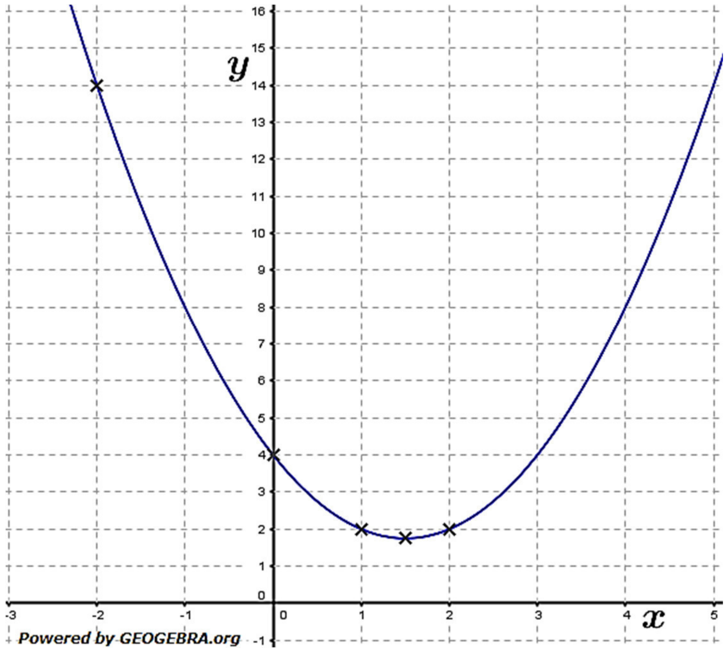
c) $x_0 = \frac{1}{3}$ (lila Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{\frac{2}{3}} = -4{,}5$
Die Tangente an f im Punkt $P(\frac{1}{3}|2{,}5)$ hat die Steigung $m_t = -4{,}5$.
$t_{\frac{1}{3}}(x) = -4{,}5x + 4$

d) $x_0 = 1$ (braunes Steigungsdreieck)
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$
Die Tangente an f im Punkt $P(1|1{,}5)$ hat die Steigung $m_t = -0{,}5$.
$t_1(x) = -0{,}5x + 2$

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 + x$ (siehe Grafik). Bestimme tabellarisch die momentane Änderungsrate in den Stellen x_0 sowie die Gleichung der Tangente in $P\big(x_0|f(x_0)\big)$. Zeichne dann die Tangenten in die Grafik ein.

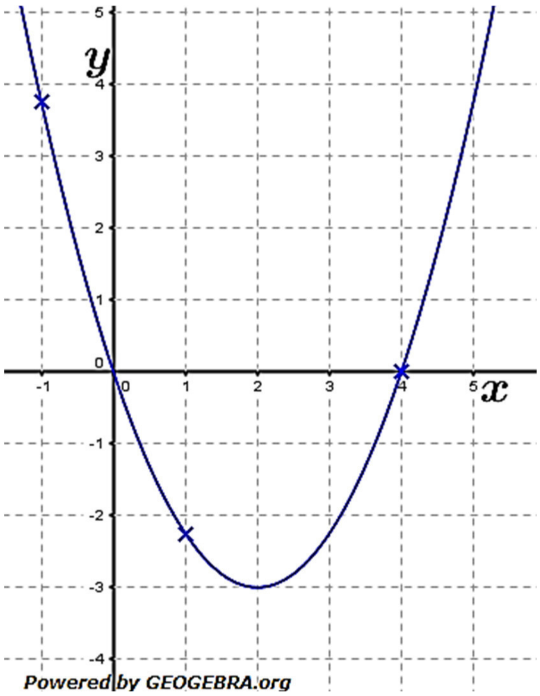
a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 1{,}5$
d) $x_0 = 2$
e) $x_0 = -2$



Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ (siehe Grafik).
Bestimme tabellarisch die momentane Änderungsrate in den Stellen x_0 sowie die Gleichung der Tangente in $P\big(x_0|f(x_0)\big)$. Zeichne dann die Tangenten in die Grafik ein.

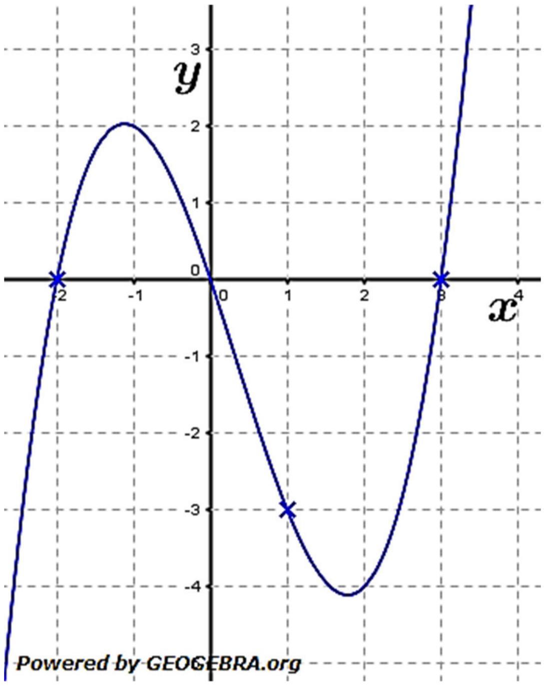
a) $x_0 = -1$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 4$



Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$ (siehe Grafik).
Bestimme tabellarisch die momentane Änderungsrate in den Stellen x_0 sowie die Gleichung der Tangente in $P(x_0|f(x_0))$.

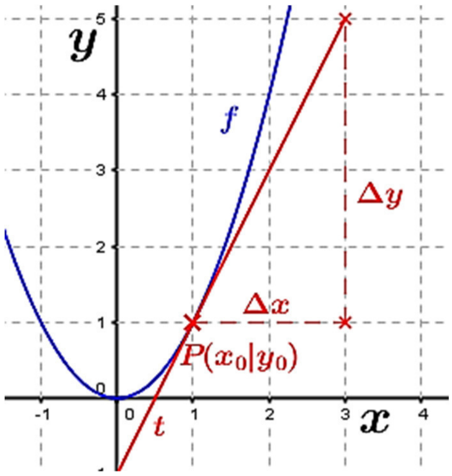
a) $x_0 = -2$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 3$



Lösungshinweis:
Punkt-Steigungsformel:
Ist $P(x_0|f(x_0))$ Punkt einer Funktion f und t die Tangente an f in P, so gilt:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

mit $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



Lösung A1

a) Detaillierte Lösung

$I = [x_0; x_0 + h]$	$[0; 0{,}1]$	$[0; 0{,}01]$	$[0; 0{,}001]$	$[0; 0{,}0001]$
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$	$-0{,}29$	$-0{,}0299$	$-0{,}002999$	$-0{,}00029999$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-2{,}9$	$-2{,}99$	$-2{,}999$	$-2{,}9999$

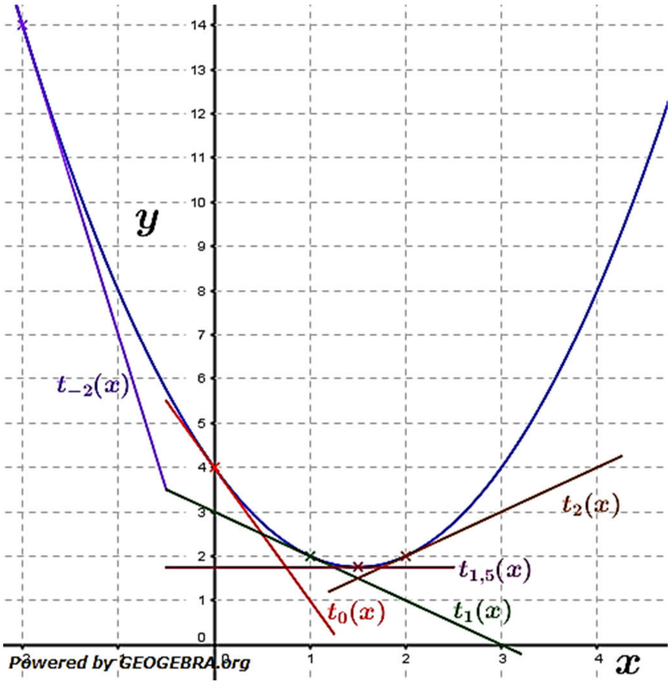
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -3 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(0|4)$ die Steigung $m_t = -3$.
$t_0(x) = -3(x - 0) + 4 = -3x + 4$

b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|2)$ die Steigung $m_t = -1$.
$t_1(x) = -1(x - 1) + 2 = -x + 3$

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(1{,}5|1{,}75)$ die Steigung $m_t = 0$.
$t_{1,5}(x) = 1{,}75$

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(2|2)$ die Steigung $m_t = 1$.
$t_2(x) = x$

e) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -7 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(-2|14)$ die Steigung $m_t = -7$.
$t_{-2}(x) = -7(x + 2) + 14 = -7x$



Lösung A2

a) Detaillierte Lösung

$I=[x_0;x_0+h]$	$[-1;-0{,}9]$	$[-1;-0{,}99]$	$[-1;-0{,}999]$	$[-1;-0{,}9999$
$\Delta x=(x_0+h)-x_0$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$	$-0{,}4425$	$-0{,}04425$	$-4{,}5\cdot10^{-3}$	$-4{,}5\cdot10^{-4}$
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$-4{,}425$	$-4{,}4425$	$-4{,}5$	$-4{,}5$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-4{,}5\Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(-1|3{,}75)$ ist -4.

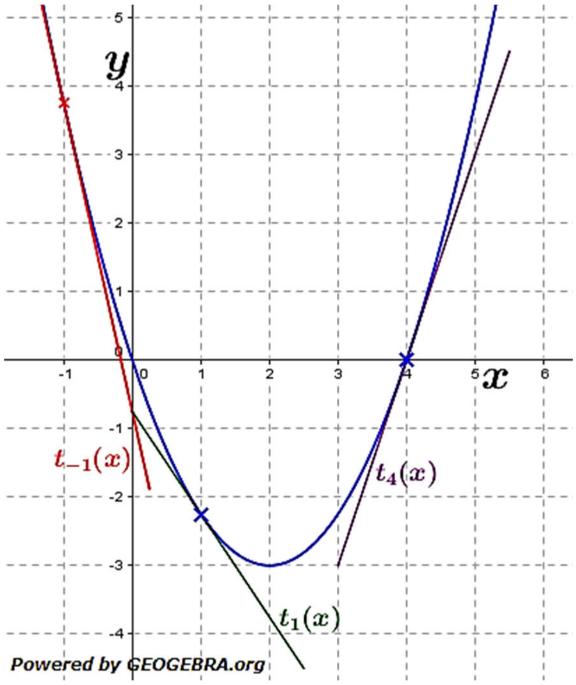
$t_{-1}(x)=-4{,}5(x+1)+3{,}75=-4{,}5x-0{,}75$

b) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1{,}5\Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(1|-2{,}25)$ ist $-1{,}5$.

$t_1(x)=-1{,}5(x-1)-2{,}25$
$\quad\;\;=-1{,}5x-0{,}75$

c) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3\Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(4|0)$ ist 3.

$t_4(x)=3(x-4)=3x-12$



Lösung A3

a) Detaillierte Lösung

$I=[x_0;x_0+h]$	$[-2;-1{,}9]$	$[-2;-1{,}99]$	$[-2;-1{,}999]$	$[-2;-1{,}9999$
$\Delta x=(x_0+h)-x_0$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$	$0{,}4655$	$0{,}04965$	$0{,}004996$	$4{,}99\cdot10^{-4}$
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$4{,}655$	$4{,}965$	$4{,}996$	$4{,}99$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=5\Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(-2|0)$ ist 5.

$t_{-2}(x)=5(x+2)=5x+10$

b) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2{,}5\Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(1|-3)$ ist $-2{,}5$.

$t_1(x)=-2{,}5(x-1)-3=-2{,}5x-0{,}5$

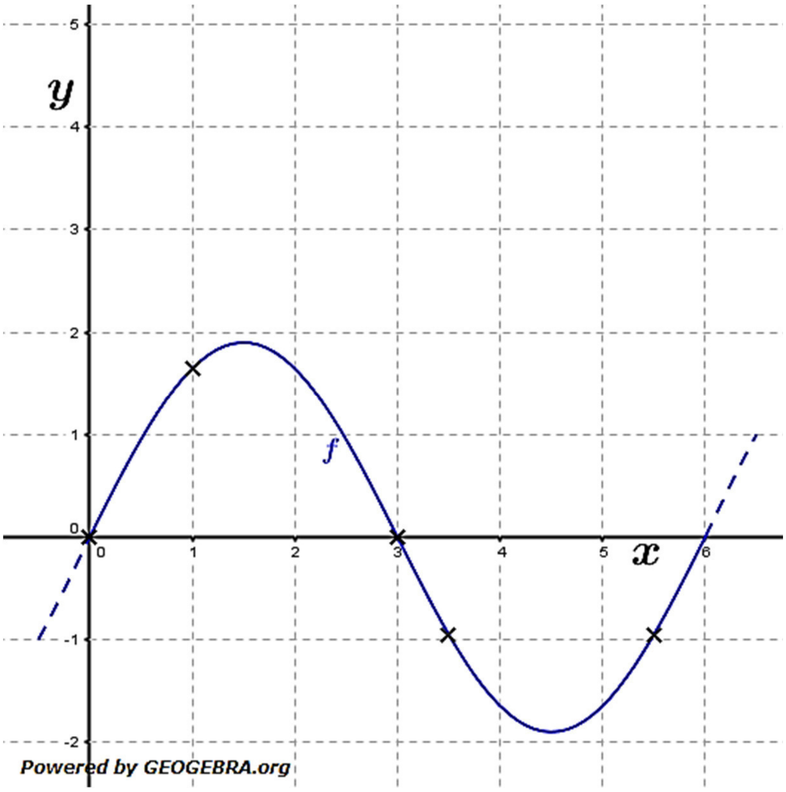
c) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=7{,}5\Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(3|0)$ ist $7{,}5$.

$t_3(x)=7{,}5(x-3)=7{,}5x-22{,}5$

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}9\,sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ (siehe Grafik). Bestimme tabellarisch die momentane Änderungsrate in den Stellen x_0 sowie die Gleichung der Tangente in $P(x_0|f(x_0))$. Zeichne dann die Tangenten in die Grafik ein.

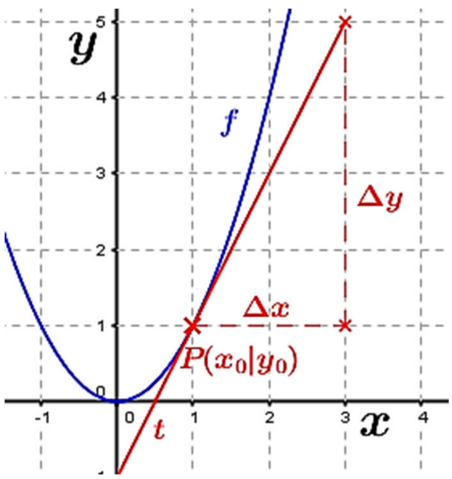
a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 3$
d) $x_0 = 3{,}5$
e) $x_0 = 5{,}5$



Lösungshinweis:
Punkt-Steigungsformel:
Ist $P(x_0|f(x_0))$ Punkt einer Funktion f und t die Tangente an f in P, so gilt:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

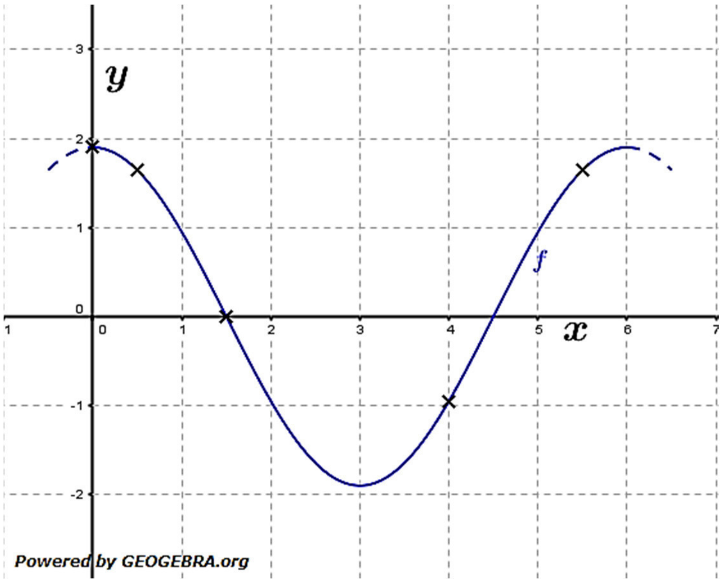
mit $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}9\,cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ (siehe Grafik). Bestimme tabellarisch die momentane Änderungsrate in den Stellen x_0 sowie die Gleichung der Tangente in $P(x_0|f(x_0))$. Zeichne dann die Tangenten in die Grafik ein.

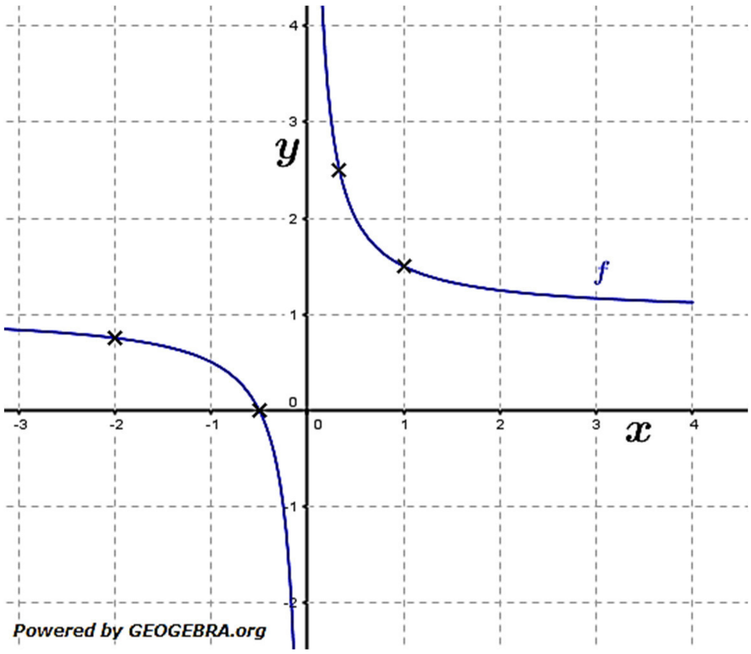
a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 0{,}5$
c) $x_0 = 1{,}5$
d) $x_0 = 4$
e) $x_0 = 5{,}5$



Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2x} + 1$ (siehe Grafik). Bestimme tabellarisch die momentane Änderungsrate in den Stellen x_0 sowie die Gleichung der Tangente in $P(x_0|f(x_0))$. Zeichne dann die Tangenten in die Grafik ein.

a) $x_0 = -2$
b) $x_0 = -0{,}5$
c) $x_0 = \frac{1}{3}$
d) $x_0 = 1$



Lösung A1

a) Detaillierte Lösung

$I = [x_0; x_0 + h]$	$[0; 0{,}1]$	$[0; 0{,}01]$	$[0; 0{,}001]$	$[0; 0{,}0001]$
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$	0,1986	0,0199	0,00199	0,000199
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1,986	1,99	1,99	1,99

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(0|0)$ die Steigung $m_t = 2$.
$t_0(x) = 2x$

b) Detaillierte Lösung

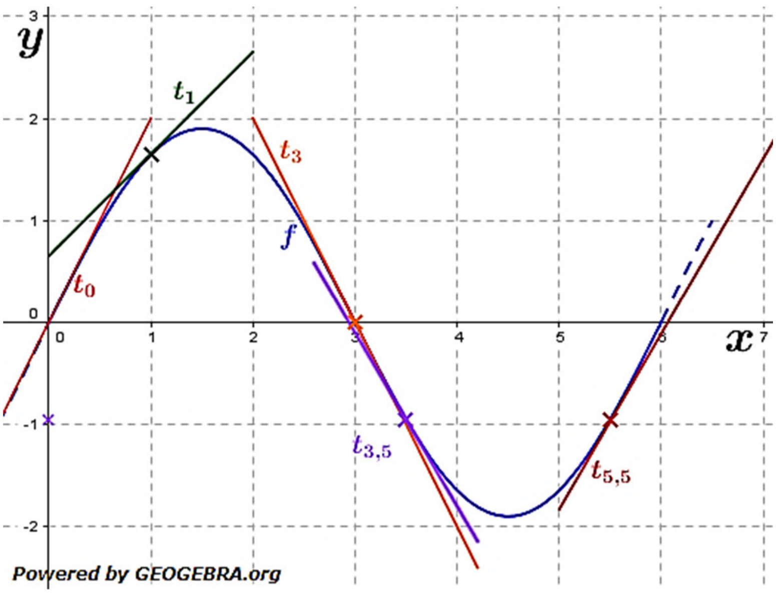
$I = [x_0; x_0 + h]$	$[1; 1{,}1]$	$[1; 1{,}01]$	$[1; 1{,}001]$	$[1; 1{,}0001]$
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$	0,09029	0,00986	0,00094	0,000099
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	0,9029	0,986	0,94	0,99

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|1{,}65)$ die Steigung $m_t = 1$.
$t_1(x) = (x - 1) + 1{,}65 = x + 0{,}65$

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(3|0)$ die Steigung $m_t = -2$.
$t_3(x) = -2(x - 3) + 0 = -2x + 6$

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1{,}7 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(3{,}5|-0{,}95)$ die Steigung $m_t = -1{,}7$.
$t_{3,5}(x) = -1{,}7(x - 3{,}5) - 0{,}95 = -1{,}7x + 5$

e) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1{,}7 \Rightarrow$ Die Tangente an f hat im Punkt $P(5{,}5|-0{,}95)$ die Steigung $m_t = 1{,}7$.
$t_{5,5}(x) = 1{,}7(x - 5{,}5) - 0{,}95 = 1{,}7x - 10{,}3$



Lösung A2

a) Detaillierte Lösung

$I = [x_0; x_0 + h]$	$[0; 0{,}1]$	$[0; 0{,}01]$	$[0; 0{,}001]$	$[0; 0{,}0001]$
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$	$-0{,}0104$	$-0{,}0001$	$-0{,}000001$	$-1{,}0 \cdot 10^{-8}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-0{,}104$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}00000001$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Longrightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(0|1{,}9)$ ist 0.
$t_0(x) = 1{,}9$

b) Detaillierte Lösung

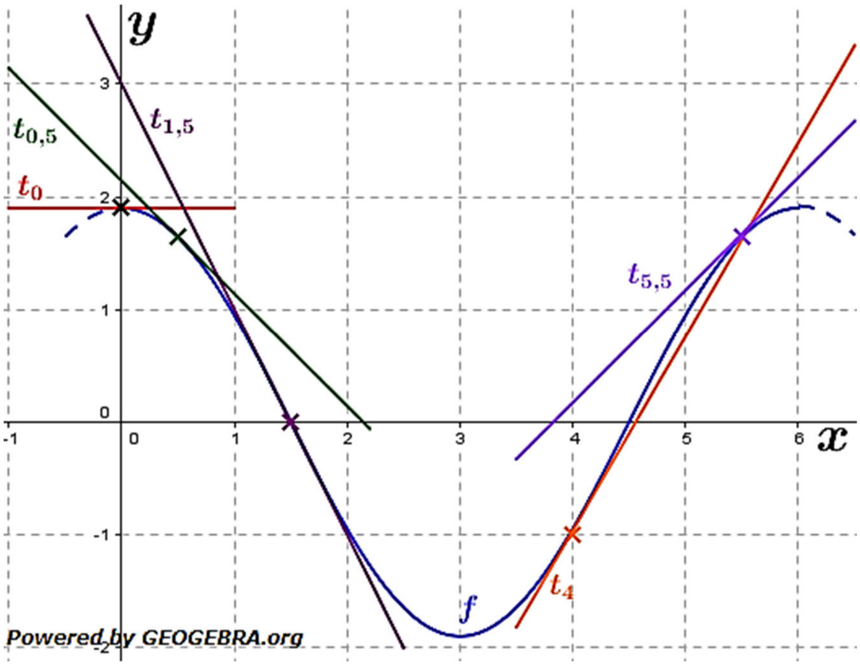
$I = [x_0; x_0 + h]$	$[0{,}5; 0{,}6]$	$[0{,}5; 0{,}51]$	$[0{,}5; 0{,}051]$	$[05; 0{,}0051]$
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$	$-0{,}1083$	$-0{,}0100$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-1{,}08$	-1	-1	-1

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \Longrightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(0{,}5|1{,}65)$ ist -1.
$t_{0,5}(x) = 1(x - 0{,}5) + 1{,}65 = -x + 2{,}15$

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \Longrightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(1{,}5|0)$ ist -2.
$t_{1,5}(x) = -2(x - 1{,}5) = -2x + 3$

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1{,}72 \Longrightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(4|-0{,}95)$ ist $1{,}72$.
$t_4(x) = 1{,}72(x - 4) - 0{,}95 = 1{,}72x - 7{,}83$

e) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Longrightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(5{,}5|1{,}65)$ ist 1.
$t_{5,5}(x) = (x - 5{,}5) + 1{,}65 = x - 3{,}85$



Lösung A3

a) Detaillierte Lösung

$I = [x_0; x_0 + h]$	$[-2; -1{,}9]$	$[-2; -1{,}99]$	$[-2; -1{,}999]$	$[-2; -1{,}9999]$
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0$	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$	$-0{,}01316$	$-0{,}001256$	$-0{,}000125$	$-0{,}0000125$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-0{,}1316$	$-0{,}1256$	$-0{,}125$	$-0{,}125$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{8} \Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(-2|0{,}75)$ ist $-\frac{1}{8}$.

$t_{-2}(x) = -\frac{1}{8}(x+2) + 0{,}75 = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(-0{,}5|0)$ ist -2.

$t_{-0{,}5}(x) = -2(x + 0{,}5) = -2x - 1$

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -4{,}5 \Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P\left(\frac{1}{3}\middle|2{,}5\right)$ ist $-4{,}5$.

$t_{\frac{1}{3}}(x) = -4{,}5\left(x - \frac{1}{3}\right) + 2{,}5 = -4{,}5x + 4$

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -0{,}5 \Rightarrow$ Die momentane Änderungsrate im Punkt $P(1|1{,}5)$ ist $-0{,}5$.

$t_{\frac{1}{3}}(x) = -0{,}5(x-1) + 1{,}5 = -0{,}5x + 2$