## Unbestimmtes Integral – Integrationsregeln Basis

Nachfolgend sind die Basisregeln der Integration im einzelnen aufgeführt. Die hier aufgeführten Regeln entsprechen dem Lehrumfang der Gymnasien G8 und G9 in der BRD.

## Die Nullregel

Die Nullregel besagt, dass das Integral von Null eine Konstante ist.

$$\int 0\,dx = C$$

## Die 1-Regel

Die 1-Regel besagt, dass eine $1$ zu $x$ wird.

$$\int 1\,dx = \int dx = x + C$$

## Die Konstantenregel

Die Konstantenregel besagt, dass eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ zum Faktor der Stammfunktion wird.

$$\int a\,dx = a\int dx = ax + C$$

## Die Potenzregel

Die Potenzregel lautet:

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$ mit $n \in \mathbb{Z};\ n \neq -1$ und zusätzlich $x \neq 0$ falls $n < -1$.

An dieser Stelle erkennen wir gut die Umkehrrechenart. Wird bei der **Potenzregel der Ableitung** die Hochzahl als Faktor vor den Term geschrieben und anschließend um den Wert $1$ **vermindert**, so wird bei der **Potenzregel der Integration** die Hochzahl um $1$ **erhöht** und diese neue Hochzahl in den Nenner eines Bruchs geschrieben.

Beispiel 1:

Bilde alle Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4$.

Lösung 1:

| | | |
|---|---|---|
| $\int \frac{1}{8}x^4\,dx = \frac{1}{5} \cdot \int x^4\,dx$ | \| | Anwendung der Faktorregel |
| $F(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4+1} \cdot x^{4+1} + C$ | \| | Die Potenz um $1$ erhöhen. |
| $F(x) = \frac{1}{40}x^5 + C$ | \| | Vereinfachen |

Beispiel 2:

Bilde alle Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = x^5 - x^3$.

Lösung 2:

| | | |
|---|---|---|
| $\int (x^5 - x^3)\,dx = \int x^5\,dx - \int x^3\,dx$ | \| | Anwendung der Differenzregel |
| $F(x) = \frac{1}{5+1} \cdot x^{5+1} - \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C$ | \| | Die Potenzen um $1$ erhöhen. |
| $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + C$ | \| | Vereinfachen |

## Die erweiterte Potenzregel

Für die Potenzfunktion $f(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{R}$; $q \neq -1$ und $x > 0$ gilt:

$$\int x^q\,dx = \frac{1}{q+1} \cdot x^{q+1} + C$$

Die erweiterte Potenzregel entspricht der zuvor beschriebenen Potenzregel 1:1 mit der Erweiterung, dass der Exponent nicht mehr Element der ganzen Zahlen ist, sonder Element der rationalen Zahlen.

Beispiel 3:

Bilde alle Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Lösung 3:

| | | |
|---|---|---|
| $\int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ | \| | Faktorregel, Potenzdarstellung von Wurzeln |
| $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + C$ | \| | Die Potenz um $1$ erhöhen. |
| $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$ | \| | Vereinfachen |
| $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C$ | \| | Weiter vereinfachen |

Beispiel 4:

Bilde alle Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lösung 4:

| | | |
|---|---|---|
| $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ | \| | Potenzdarstellung von Wurzeln |
| $F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} + C$ | \| | Die Potenz um $1$ erhöhen. |
| $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C$ | \| | Vereinfachen |
| $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + C$ | \| | Weiter vereinfachen |
| $F(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + C$ | \| | Potenzdarstellung zurücksetzen. |

## Die Faktorregel

Die Faktorregel besagt, dass Faktoren erhalten bleiben. Es sei $f$ eine in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)dx = k \cdot F(x) + C$$

Dies entspricht der Faktorregel der Ableitungen.

## Die Summen- bzw. Differenzregel

Es seien $f$ und $g$ stetige Funktionen. Dann gilt:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)dx \pm g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$$

Bei zusammengesetzten Funktionen werden die Summanden / Subtrahenden einzeln integriert. Dies entspricht ebenfalls der Summen- bzw. Differenzregel der Ableitungen.

Beispiel 5:

Bilden Sie die Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = 3sin(x) - 2cos(x)$

Lösung 5:

Unter Anwendung der Summen- und Faktorregel erhalten wir:
$\int(3sin(x) - 2cos(x))\,dx = 3\int sin(x)\,dx - 2\int cos(x)\,dx$
$F(x) = -3cos(x) - 2sin(x) + C$

## Lineare Substitution

Es sei $f$ eine verkettete Funktion mit $f(x) = v(u(x))$ und $u(x) = z$ eine lineare Funktion in der Form $z = ax + b$ sowie $F$ eine Stammfunktion der äußeren Funktion $v$, dann gilt:

$$\int f(x)dx = \int v(u(x))dx = \int v(z)\,dx = \int v(z)\,\frac{dz}{z'} = \frac{1}{z'}V(z)\ + C.$$

zugegebener Maßen ein kompliziert zu verstehender Ausdruck.

***Für den mathematisch Interessierten:***

Beweis:
Es sei $f(x) = v(u(x))$. Dann ist die Stammfunktion $F(x) = \int v(u(x))\ dx$.
Wir substitieren $z = u(x)$ dann ist $F(x) = \int v(z)\ dx$. Nun bilden wir $z' = \frac{dz}{dx}$. Diesen Ausdruck stellen wir um nach $dx$: $dx = \frac{dz}{z'}$. Jetzt ersetzen wir $dx$ im Integral durch diesen Ausruck und erhalten $F(x) = \int \frac{v(z)}{z'}\ dz = \frac{1}{z'} \cdot V(z) + C$

Beispiel 6:

Bilden Sie die Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = (2x - 5)^2$.

Lösung 6:

$F(x) = \int(2x - 5)^2\,dx$

| | | |
|---|---|---|
| $z = 2x - 5$ | \| | Substitution |
| $z' = \frac{dz}{dx} = 2$ | \| | 1. Ableitung von *z* |
| $dx = \frac{dz}{2}$ | \| | $z'$ (von zuvor) nach *dx* umgestellt. |
| $F(x) = \int \frac{z^2}{2} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} z^3 + C$ | \| | *dx* (von zuvor) in Integral |

eingesetzt.

| | | |
|---|---|---|
| $F(x) = \frac{1}{6}(2x - 5)^3 + C$ | \| | Resubstitution |

***Für den mathematischen Praktiker:***

Bei der linearen Substition (ein viel zu kompliziertes Wort) wird die Stammfunktion gebildet durch:

Integration der äußeren Funktion **dividiert** durch die **Ableitung** der inneren Funktion.

Beispiel 7:

Bilden eine Stammfunktionen $F$ der Funktion $f(x) = 2cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right)$.

Lösung 7:

$F(x) = \int 2cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) dx$

Die äußere Funktion lautet $cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right)$, die innere Funktion ist $\frac{\pi}{2}(x-2)$.

Die Stammfunktion der äußeren Funktion ist der Sinus mit $sin\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right)$. Die **Ableitung** der inneren Funktion mit $\frac{\pi}{2}(x-2)$ ist $\frac{\pi}{2}$.

Somit gilt:

| | |
|---|---|
| $\int 2cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) dx = 2\int cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) dx$ | Anwendung der Faktorregel |
| $F(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + C$ | Stammfunktion äußere Funktion dividiert durch Ableitung der inneren Funktion |
| $F(x) = \frac{4}{\pi} \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) + C$ | Vereinfachen |

Wir merken uns die Vorgehensweise:

1. Schreibe einen Bruchstrich.
2. Bilde die Stammfunktion der äußeren Funktion und schreibe diese in den Zähler des Bruchs.
3. Bilde die Ableitung der inneren (linearen) Funktion und schreibe diese in den Nenner des Bruchs.
4. Vereinfache so weit wie möglich.