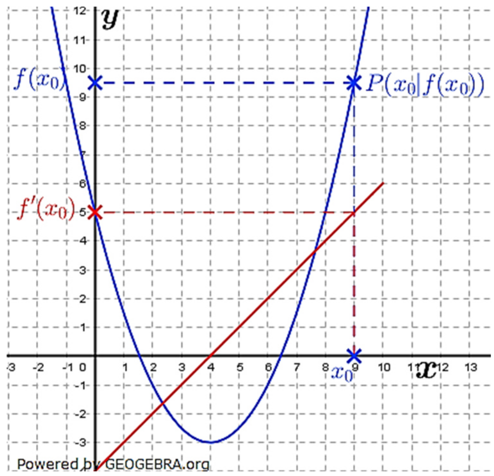
Einführung

Unter dem unbestimmten Integral verstehen wir die Menge aller Stammfunktionen $F(x)$, die sich aus einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch Integration ergeben.
Vom Prinzip ist diese Definition nichts anderes als die Definition der Integralrechnung als Umkehrrechenart der Differentialrechnung. Wir schreiben hierfür:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Es gilt nun, zu verstehen, was das Zeichen dx und die Variable C bedeuten. Hierzu gehen wir zum besseren Verständnis einmal den umgekehrten Weg und haben zum Beispiel einer quadratische Funktion mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ und bilden deren Ableitung $f'(x) = 2x - 4$. Nebenstehende Grafik zeigt den Verlauf der Graphen von f und f'.



Aus dem Gebiet Differenzialrechnung heraus wissen wir, dass $f'(x)$ die Steigung von $f(x)$ an jeder beliebigen Stelle x_0 liefert. Diese Steigung ist aber nichts anderes als die momentane Änderungsrate im Punkt $P\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$, was gleichzeitig die Steigung der Tangente an f in diesem Punkt mit der Gleichung $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ ist.

Die momentane Änderungsrate einer Kurve bzw. die Steigung ist aber definiert über den Differenzialquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auch mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bezeichnet. Somit ist der Ausdruck $f'(x)$ nichts anderes als eine Abkürzung für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Somit können wir auch schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

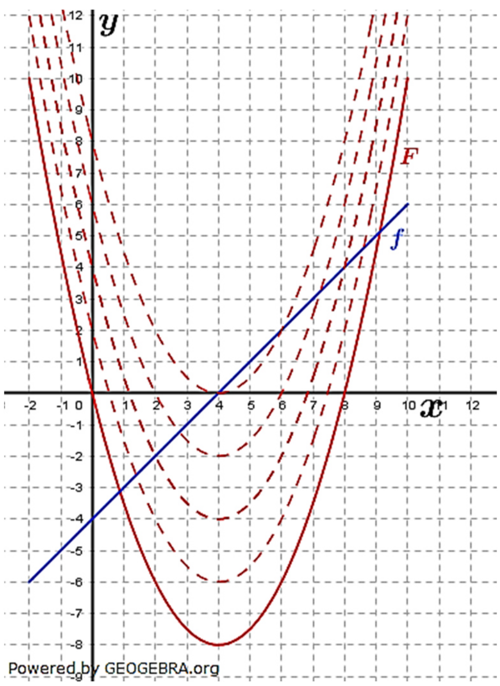
Diese Gleichung wandeln wir nach den Regeln der Äquivalenzumformung um:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f'(x) & &\mid \quad \cdot\, dx \\
dy &= f'(x)dx & &\mid \quad \int \\
\int dy &= \int f'(x)dx
\end{aligned}$$

und da die Integralrechnung die Umkehrrechenart der Differentialrechnung ist, erhalten wir wieder

$$y = f(x)$$

also $f(x)$, was uns ja die y–Koordinate einer Funktion an jeder beliebigen Stelle x_0 liefert.



Zur Erklärung der Variablen C sehen wir uns nun die Ermittlung einer Ursprungsgleichung aus einer gegebenen Ableitungsgleichung heraus an.
Wir bleiben bei obigem Beispiel. Gegeben ist die Ableitungsfunktion f mit $f(x) = x - 4$ einer Stammfunktion F. Zu bestimmen ist die Ursprungsgleichung. Wir wenden die Umkehrregel zur Differentialrechnung an und schreiben

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x-4)\,dx$$

Wir wissen, dass das x aus $\frac{1}{2}x^2$ und die -4 aus $-4x$ entstanden ist. Das führt uns zur Funktionsgleichung $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$.
Doch, wo ist denn die 5 aus unserem obigen Beispiel geblieben?
Da durch eine Ableitung die Information über das absolute Glied der Stammfunktion verloren geht, denn die Ableitung einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist gleich 0, erhalten wir durch Integration einer Funktion f keinerlei Information mehr über den ursprünglichen Wert des absoluten Gliedes der Stammfunktion. Aus diesem Grund müssen wir jeder durch Integration ermittelten Stammfunktion die Variable $+C$ hinzufügen. Die Stammfunktion ist somit keine einzelne Funktion mehr, sondern vielmehr eine unendliche Menge von Stammfunktionen, die wegen $C \in \mathbb{R}$ alle in y–Richtung nach oben oder unten verschoben sind.

Merksatz

Das unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktionen $F(x)$, die sich aus einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch Integration ergeben. Wir schreiben:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Die Integration einer Funktion f ist nicht mehr in der Lage, eine Aussage darüber zu treffen, wie viel und in welcher Richtung die Stammfunktion in y–Richtung verschoben ist. Aussagen über den Wertebereich $\mathbb{W}$ einer Stammfunktion können nicht mehr getroffen werden, sind also unentscheidbar.

Integrationsregeln

Ähnlich den unterschiedlichen Regeln der Differentialrechnung, wie z. B. Konstanten- Potenz- Summen-, Produkt-, Quotienten-, Ketten- und Umkehrregel gibt es auch entsprechende Integrationsregeln. Dabei ist anzumerken, dass zwar jede beliebige Funktion abgeleitet werden kann, dass es jedoch viele Ableitungsfunktionen gibt, die nicht mehr integriert werden können. Man könnte sagen:

Ableiten ist Handwerk. Integration ist Kunst.