

Aufgabe A17

Eine Spareinlage von 7 500 € wird in den ersten vier Jahren mit jährlich 4,5 % verzinst. Zu Beginn des 5. Jahres erhöht sich der Zinssatz auf 5,5 %.



- Auf welchen Betrag ist das Kapital nach Ablauf von 10 Jahren angewachsen?
- Wie lange müsste die Spareinlage stehen bleiben, wenn bei unveränderter Anfangsverzinsung von 4,5 % das gleiche Endkapital erwirtschaftet werden soll?
- Zu welchem Zinssatz müsste die Spareinlage angelegt werden, damit nach 12 Jahren 15 000 € zur Verfügung stehen?

Aufgabe A18

Der Kauf eines Autos soll zu 60 % mit einem tilgungsfreien Darlehen durch eine Bank finanziert werden. Der Kaufpreis des Autos beträgt 26 000 €, das Darlehen soll nach 2 Jahren zurückgezahlt werden. Es liegen folgende Angebote vor:

- Bank A mit 0,9 % Zinsen im Monat
 - Bank B mit 10,8 % Zinsen im Jahr
 - Bank C mit 2,6 % im Vierteljahr.
- Welches Angebot ist am günstigsten?
 - Wie hoch wäre der Zinssatz einer Bank D, die in 2 Jahren insgesamt 4 000 € Zinsen verlangt?

Aufgabe A19

Katja hat zur Confirmation 2 500 € erhalten. Sie will ihr Geld anlegen und hat folgende Möglichkeiten zur Auswahl:

- Sie kann das Geld langfristig bei einer Sparkasse anlegen. Nach wie vielen Jahren hätte sie doppelt so viel Geld auf dem Konto, wenn der Zinssatz $p\% = 6,5\%$ beträgt?
- Sie würde gerne in 5 Jahren 50 % mehr als 2 500 € haben. Zu welchem Zinssatz müsste sie das Geld anlegen?
- Katjas Vater ist sofort bereit, ihre 2 500 € soweit aufzustocken, damit sie nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 5,5 % einschließlich Zinsen 6 000 € zur Verfügung hat. Wie viel muss der Vater seiner Tochter geben?

Aufgabe A20

Zum 10. Geburtstag erhält Olaf ein Sparbuch mit 1 000 €; Zinssatz ist 4,8 % bei jährlicher Verzinsung.

- Wann ist das Guthaben auf das Doppelte angewachsen?
- Wie viel muss Olaf dazuzahlen, wenn er sich zu seinem 18. Geburtstag einen Computer für 2 490 € kaufen will?
- Wie hoch hätte der Zinssatz sein müssen, damit er sich einen gleich teuren Computer an seinem 21. Geburtstag ohne Zuzahlung hätte kaufen können?
- Wie groß hätte das Guthaben zum 10. Geburtstag sein müssen, wenn er beim Zinssatz von 4,8 % ohne Zuzahlung am 21. Geburtstag diesen Computer hätte kaufen wollen?

Aufgabe A21

Ein Handwerker möchte sich selbstständig machen, wobei ihn die Bank mit einem Ratensparvertrag zu 6,5 % unterstützt.

- Welchen Betrag muss er jeweils am Jahresanfang bei der Bank bezahlen, um nach einer zehnjährigen Laufzeit 100 000 € zu erhalten?
- In welchem Jahr übersteigt sein Vermögen 60 000 €?

Aufgabe A22

Ein Kapital wurde vor 5 Jahren zu 5,9 % Zinseszins auf einem Sparkonto festgelegt. Es ist bis zum heutigen Zeitpunkt auf einen Betrag von 19 978,88 € angewachsen.

- Welchen Betrag hatte die ursprüngliche Spareinlage?
- Berechne das Endkapital nach einer Laufzeit von 12 Jahren.
- Nach wie vielen Jahren würde sich das ursprüngliche Kapital verdreifachen?
- Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit sich das Kapital bereits nach 17 Jahren verdreifacht?

Aufgabe A23

Frau Peters möchte ihr Haus verkaufen.

- Welches Kaufangebot ist für sie am günstigsten, wenn man mit 6,25 % Zinseszins rechnet?
A will sofort 389 000 € zahlen
B will 445 000 € nach 5 Jahren zahlen.
C will nach drei Jahren 225 000 € und nach 6 Jahren nochmals 225 000 € zahlen.
- Wie viel Prozent betrug die durchschnittliche Wertsteigerung eines Hauses, das vor 15 Jahren für 235 000 € gekauft wurde und heute für 375 000 € verkauft wird?

Aufgabe A24

Auf einem Sparkonto werden 76 000 € mit 7 % Zinseszins festgelegt.

- Wie hoch ist das Endkapital nach 6 Jahren?
- In welcher Zeit wächst das Kapital von 76 000 € auf 130 582,15 € an?
- Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit sich das Kapital von 76 000 € in 9 Jahren verdoppelt?

Lösung A17

a) $K_0 = 7500$; $n = 10$; $p \% = 4,5 \%$ anfänglich, ab 6. Jahr $p \% = 5,5 \%$

$$K_{10} = 7500 \cdot 1,045^5 \cdot 1,055^5 = 12215,32$$

Nach 10 Jahren beträgt das Kapital 12 215,32 €.

b) $K_n = K_0 \cdot 1,04^n$

$$12215,32 = 7500 \cdot 1,04^n \quad | \quad : 7500$$

$$1,628709953 = 1,045^n \quad | \quad \log$$

$$\log(1,628709953) = n \cdot \log(1,045) \quad | \quad : \log(1,045)$$

$$n = 11,08$$

Das Anfangskapital muss etwa 11 Jahre liegen bleiben.

Ohne Logarithmus:

$$K_1 = 7500 \cdot 1,045 = 7837,50$$

$$K_2 = K_1 \cdot 1,045 = 8190,19$$

$$K_3 = K_2 \cdot 1,045 = 8558,75$$

$$K_4 = K_3 \cdot 1,045 \dots$$

... weiter bis

$$K_{10} = K_9 \cdot 1,045 = 11647,27$$

$$K_{11} = K_{10} \cdot 1,045 = 12171,40$$

c) $K_0 = 7500$; $K_{12} = 15000$; $n = 12$

$$15000 = 7500 \cdot q^{12} \quad | \quad : 7500$$

$$q^{12} = 2 \quad | \quad \sqrt[12]{}$$

$$q = 1,059$$

$$p \% = (1,059 - 1) \cdot 100 = 5,9 \%$$

Der Zinssatz müsste 5,9 % betragen.

Lösung A18

a) Berechnung des günstigsten Angebotes:

$$K_0 = 26000 \cdot 0,6 = 15600; \text{ gesucht: } K_n \text{ der günstigsten Bank.}$$

Bank A: Abzahlungsdarlehen mit 0,9 % / Monat

$$0,9\% \cdot 24 = 21,6 \%$$

$$K_n = 15600 \cdot 1,216 = 18969,60$$

Bei Bank A betrüge das Endkapital 18 969,60 €

Bank B: Finanzierungsdarlehen mit 10,8 % / Jahr

$$K_n = K_0 \cdot q^2 = 15600 \cdot 1,108^2 = 19151,56$$

Bei Bank B betrüge das Endkapital 19 151,56 €

Bank C: Finanzierungsdarlehen mit vierteljährlicher Zinsbildung mit 2,6 %.

q bei vierteljährlicher Zinsbildung

$$q = \left(1 + \frac{p\%}{100} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1,0065$$

$$K_n = K_0 \cdot q^8 = 15600 \cdot 1,0065^8 = 16429,90$$

Bei Bank C betrüge das Endkapital 16 429,90 €

Bank C ist am günstigsten.

b) $K_0 = 15600$; $K_2 = 19600$; $n = 2$

$$19600 = 15600 \cdot q^2 \quad | \quad : 15600$$

$$q^2 = 1,256410256 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$q = 1,1209$$

$$p \% = (1,1209 - 1) \cdot 100 = 12,09 \%$$

Der Zinssatz von Bank D wäre etwa 12,1 %.

Lösung A19

a) $K_0 = 2500; K_n = 5000; p \% = 6,5 \%$
 $2 = 1,065^n$
 $\log(2) = n \cdot \log(1,065)$
 $n = 11,007$

\log	\log
$:\log(1,065)$	$:\log(1,065)$

Katja hätte nach etwa 11 Jahren 5 000 € auf ihrem Konto.

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 2500 \cdot 1,065 = 2662,50$
 $K_2 = K_1 \cdot 1,065 = 2835,56$
 $K_3 = K_2 \cdot 1,065 = 3019,87$
 $K_4 = K_3 \cdot 1,065 \dots$
 ... weiter bis

$K_{10} = K_9 \cdot 1,065 = 4692,84$
 $K_{11} = K_{10} \cdot 1,065 = 4997,88$

b) $K_5 = 3750; K_0 = 2500; n = 5$

$3750 = 2500 \cdot q^5$	$:\ 2500$
$q^5 = 1,5$	$:\ \sqrt[5]{\quad}$

$q = 1,059$
 $p \% = (1,0845 - 1) \cdot 100 = 8,45 \%$

Der Zinssatz müsste 8,45 % betragen.

c) $K_5 = 6000; n = 5; p \% = 5,5 \%$

$6000 = K_0 \cdot 1,055^5$	$:\ 1,055^5$
----------------------------	--------------

$K_0 = 4590,80$

Aufstockung Vater:

$K_{\text{Vater}} = K_0 - 2500 = 4590,80 - 2500 = 2090,80$

Katjas Vater müsste ihre 2 500,00 € um 2 090,80 € aufstocken.

Lösung A20

a) $K_0 = 1000; K_n = 2000; p \% = 6,5 \%$
 $2 = 1,048^n$
 $\log(2) = n \cdot \log(1,048)$
 $n = 14,78$

\log	\log
$:\log(1,048)$	$:\log(1,048)$

Das Kapital ist im 15. Jahr auf das Doppelte angestiegen.

b) $K_{10} = 2490; K_0 = 1000 + Z; p \% = 6,5 \%$

$2490 = (1000 + Z) \cdot 1,065^{10}$	$\cdot 1,065^{10}$
$1326,49 = 1000 + Z$	-1000

$Z = 326,49$

Olaf muss 326,49 € dazu zahlen.

c) $2490 = 1000 \cdot q^{11}$

$q^{11} = 2,49$	$:\ \sqrt[11]{\quad}$
-----------------	-----------------------

$q = 1,0865$
 $p \% = (1,0865 - 1) \cdot 100 = 8,65 \%$

Der Zinssatz müsste 8,65 % betragen.

d) $2490 = K_0 \cdot 1,048^{11}$

$:\ 1,048^{11}$

$K_0 = 1486,71$

Das Anfangskapital hätte 1 486,71 € betragen müssen.

Lösung A21

Aufgabe zum Ratensparvertrag

a) $K_{10} = 100000$; $n = 10$; $p \% = 6,5 \%$
 $K_{10} = R \cdot (1,065^{10} + 1,065^8 + 1,065^7 + 1,065^6 + 1,065^5 + 1,065^4 + \dots + 1,065)$
 $100000 = R \cdot 14,3716 \quad | \quad : 14,3716$
 $R = 6958,19$

Die jährliche Einzahlung muss 6 958,19 € betragen.

b) Verwendung der Rentenformel für vorschüssige Einzahlungen:

$$K_n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$60000 = \frac{6958,19 \cdot 1,065 \cdot (1,065^n - 1)}{0,065} = 114007,27 \cdot (1,065^n - 1)$$

$$\frac{60000}{114007,27} = 1,065^n - 1$$

$$0,526282227 + 1 = 1,065^n \quad | \quad \log$$

$$\log(1,526282227) = n \cdot \log(1,065) \quad | \quad : \log(1,065)$$

$$n = 6,71$$

Im 7. Jahr sind 60 000 € auf dem Konto.

Ohne Logarithmus:

$$K_1 = 6958,19 \cdot 1,065 = 7410,47$$

$$K_2 = 6958,19 \cdot (1,065^2 + 1,065) = 15302,63$$

$$K_3 = 6958,19 \cdot (1,065^3 + 1,065^2 + 1,065) = 23708,79$$

$$K_4 = 6958,19 \cdot (1,065^4 + 1,065^3 + 1,065^2 + 1,065) = 32660,65$$

$$K_5 = 6958,19 \cdot (1,065^5 + 1,065^4 + 1,065^3 + 1,065^2 + 1,065) = 42194,39$$

$$K_6 = 6958,19 \cdot (1,065^6 + 1,065^5 + 1,065^4 + 1,065^3 + 1,065^2 + 1,065) = 52347,82$$

$$K_7 = 6958,19 \cdot (1,065^7 + 1,065^6 + 1,065^5 + 1,065^4 + 1,065^3 + 1,065^2 + 1,065)$$

$$= 63161,22$$

Lösung A22

a) $K_5 = 19978,88$; $n = 5$; $p \% = 5,9 \%$
 $19978,88 = K_0 \cdot 1,059^5 \quad | \quad : 1,059^5$
 $K_0 = 15000,00$

Das Anfangskapital betrug 15 000 €.

b) $K_{12} = K_0 \cdot q^{12} = 15000 \cdot 1,059^{12} = 29843,02$
Das Endkapital nach 12 Jahre neträgt 29 843,02 €.

c) $3 = 1,059^n \quad | \quad \log$
 $\log(3) = n \cdot \log(1,059) \quad | \quad : \log(1,059)$
 $n = 19,16$

Das Anfangskapital verdreifacht sich im 20. Jahr.

Ohne Logarithmus:

$$K_1 = 15000 \cdot 1,059 = 15885,00$$

$$K_2 = K_1 \cdot 1,059 = 16822,22$$

$$K_3 = K_2 \cdot 1,059 = 17814,73$$

$$K_4 = K_3 \cdot 1,059 \dots$$

... weiter bis

$$K_{19} = K_{15} \cdot 1,059 = 44577,38$$

$$K_{20} = K_{19} \cdot 1,059 = 47207,44$$

d) $q^{17} = 3 \quad | \quad \sqrt[17]{}$
 $q = 1,0666$

$$p \% = (1,0666 - 1) \cdot 100 = 6,66 \%$$

Der Zinssatz müsste 6,66 % betragen.

Lösung A23

a) Gesucht ist jeweils das Anfangskapital.

Anfangskapital A:

$$K_{0A} = 389000,00$$

Anfangskapital B:

$$K_5 = 445000,00; n = 5; p\% = 6,25 \%$$

$$445000 = K_0 \cdot 1,0625^5 \quad | \quad :1,0625^5$$

$$K_{0B} = 328636,14$$

Anfangskapital C:

$$K_3 = 225000,00; n = 3; p\% = 6,25 \%; K_6 = 225000,00; n = 6; p\% = 6,25 \%$$

$$225000 = K_{0_1} \cdot 1,0625^3 \quad | \quad :1,0625^3$$

$$K_{0_1} = 187583,96$$

$$225000 = K_{0_2} \cdot 1,0625^6 \quad | \quad :1,0625^6$$

$$K_{0_2} = 156389,97$$

$$K_{0C} = K_{0_1} + K_{0_2} = 187583,96 + 156389,97 = 343973,93$$

Das Angebot von A ist für die Verkäuferin am günstigsten.

b) $375000 = 235000 \cdot q^{15} \quad | \quad :235000$

$$q^{15} = 1,595744681 \quad | \quad \sqrt[15]{}$$

$$q = 1,03164$$

$$p\% = (1,03164 - 1) \cdot 100 = 3,16 \%$$

Die durchschnittliche Wertsteigerung betrug 3,16 % pro Jahr.

Lösung A24

$$K_0 = 76000; n = 6; p\% = 7 \%$$

a) $K_6 = K_0 \cdot q^6 = 76000 \cdot 1,07^6 = 114055,51$

Das Kapital beträgt nach 6 Jahre 114 055,51 €.

b) $130582,15 = 76000 \cdot 1,07^n \quad | \quad :76000$

$$1,718186184 = 1,07^n \quad | \quad \log$$

$$\log(1,718186184) = n \cdot \log(1,07) \quad | \quad : \log(1,07)$$

$$n = 8$$

Das Anfangskapital wächst in 8 Jahren auf 130 582,15 an.

Ohne Logarithmus:

$$K_1 = 76000 \cdot 1,07 = 81320,00$$

$$K_2 = K_1 \cdot 1,07 = 87012,40$$

$$K_3 = K_2 \cdot 1,07 = 93103,27$$

$$K_4 = K_3 \cdot 1,07 \dots$$

... weiter bis

$$K_7 = K_6 \cdot 1,07 = 122039,39$$

$$K_8 = K_7 \cdot 1,07 = 130582,15$$

c) $2 = q^9 \quad | \quad \sqrt[9]{}$

$$q = 1,08$$

$$p\% = (1,08 - 1) \cdot 100 = 8,0 \%$$

Der Zinssatz müsste 8 % betragen.