Lösung A17

a) $K_0 = 7500;\ n = 10;\ p\,\% = 4{,}5\,\%$ anfänglich, ab 6. Jahr $p\,\% = 5{,}5\,\%$

$K_{10} = 7500 \cdot 1{,}045^5 \cdot 1{,}055^5 = 12215{,}32$

Nach 10 *Jahren beträgt das Kapital* $12\,215{,}32$ €.

b) $K_n = K_0 \cdot 1{,}04^n$

$12215{,}32 = 7500 \cdot 1{,}04^n \quad | \quad : 7500$

$1{,}628709953 = 1{,}045^n \quad | \quad log$

$log(1{,}628709953) = n \cdot log(1{,}045) \quad | \quad : log(1{,}045)$

$n = 11{,}08$

Das Anfangskapital muss etwa 11 *Jahre liegen bleiben.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 7500 \cdot 1{,}045 = 7837{,}50$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}045 = 8190{,}19$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}045 = 8558{,}75$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}045 \ldots$

… weiter bis

$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}045 = 11647{,}27$

$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}045 = 12171{,}40$

c) $K_0 = 7500;\ K_{12} = 15000;\ n = 12$

$15000 = 7500 \cdot q^{12} \quad | \quad : 7500$

$q^{12} = 2 \quad | \quad \sqrt[12]{\ }$

$q = 1{,}059$

$p\,\% = (1{,}059 - 1) \cdot 100 = 5{,}9\,\%$

Der Zinssatz müsste $5{,}9\,\%$ *betragen.*

Lösung A18

a) Berechnung des günstigsten Angebotes:

$K_0 = 26000 \cdot 0{,}6 = 15600$; gesucht: K_n der günstigsten Bank.

Bank A: Abzahlungsdarlehen mit $0{,}9\,\%$ /Monat

$0{,}9\% \cdot 24 = 21{,}6\,\%$

$K_n = 15600 \cdot 1{,}216 = 18969{,}60$

Bei Bank A betrüge das Endkapital $18\,969{,}60$ €

Bank B: Finanzierungsdarlehen mit $10{,}8\,\%$ / Jahr

$K_n = K_0 \cdot q^2 = 15600 \cdot 1{,}108^2 = 19151{,}56$

Bei Bank B betrüge das Endkapital $19\,151{,}56$ €

Bank C: Finanzierungsdarlehen mit vierteljährlicher Zinsbildung mit $2{,}6\,\%$.

q bei vierteljährtlicher Zinsbildung

$q = \left(1 + \frac{p\,\%}{100} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1{,}0065$

$K_n = K_0 \cdot q^8 = 15600 \cdot 1{,}0065^8 = 16429{,}90$

Bei Bank C betrüge das Endkapital $16\,429{,}90$ €

Bank C ist am günstigsten.

b) $K_0 = 15600;\ K_2 = 19600;\ n = 2$

$19600 = 15600 \cdot q^2 \quad | \quad : 15600$

$q^2 = 1{,}256410256 \quad | \quad \sqrt[2]{\ }$

$q = 1{,}1209$

$p\,\% = (1{,}1209 - 1) \cdot 100 = 12{,}09\,\%$

Der Zinssatz von Bank D wäre etwa $12{,}1\,\%$.

Lösung A19

a) $K_0 = 2500;\ K_n = 5000;\ p\,\% = 6{,}5\,\%$
$2 = 1{,}065^n \quad | \quad log$
$log(2) = n \cdot log(1{,}065) \quad | \quad : log(1{,}065)$
$n = 11{,}007$
Katja hätte nach etwa 11 *Jahren* $5\,000\,€$ *auf ihrem Konto.*

Ohne Logarithmus:
$K_1 = 2500 \cdot 1{,}065 = 2662{,}50$
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}065 = 2835{,}56$
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}065 = 3019{,}87$
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}065 \ldots$
… weiter bis
$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}065 = 4692{,}84$
$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}065 = 4997{,}88$

b) $K_5 = 3750;\ K_0 = 2500;\ n = 5$
$3750 = 2500 \cdot q^5 \quad | \quad :2500$
$q^5 = 1{,}5 \quad | \quad \sqrt[5]{\ }$
$q = 1{,}059$
$p\,\% = (1{,}0845 - 1) \cdot 100 = 8{,}45\,\%$
Der Zinssatz müsste $8{,}45\,\%$ *betragen.*

c) $K_5 = 6000;\ n = 5;\ p\,\% = 5{,}5\,\%$
$6000 = K_0 \cdot 1{,}055^5 \quad | \quad :1{,}055^5$
$K_0 = 4590{,}80$
Aufstockung Vater:
$K_{Vater} = K_0 - 2500 = 4590{,}80 - 2500 = 2090{,}80$
Katjas Vater müsste ihre $2\,500{,}00\,€$ *um* $2\,090{,}80\,€$ *aufstocken.*

Lösung A20

a) $K_0 = 1000;\ K_n = 2000;\ p\,\% = 6{,}5\,\%$
$2 = 1{,}048^n \quad | \quad log$
$log(2) = n \cdot log(1{,}048) \quad | \quad : log(1{,}065)$
$n = 14{,}78$
Das Kapital ist im $15.$ *Jahr auf das Doppelte angestiegen.*

b) $K_{10} = 2490;\ K_0 = 1000 + Z;\ p\,\% = 6{,}5\,\%$
$2490 = (1000 + Z) \cdot 1{,}065^{10} \quad | \quad \cdot 1{,}065^{10}$
$1326{,}49 = 1000 + Z \quad | \quad -1000$
$Z = 326{,}49$
Olaf muss $326{,}49\,€$ *dazu zahlen.*

c) $2490 = 1000 \cdot q^{11} \quad | \quad :100$
$q^{11} = 2{,}49 \quad | \quad \sqrt[11]{\ }$
$q = 1{,}0865$
$p\,\% = (1{,}0865 - 1) \cdot 100 = 8{,}65\,\%$
Der Zinssatz müsste $8{,}65\,\%$ *betragen.*

d) $2490 = K_0 \cdot 1{,}048^{11} \quad | \quad :1{,}048^{11}$
$K_0 = 1486{,}71$
Das Anfangskapital hätte $1\,486{,}71\,€$ *betragen müssen.*

Lösung A21

Aufgabe zum Ratensparvertrag

a) $K_{10} = 100000;\ \ n = 10;\ \ p\,\% = 6{,}5\,\%$

$K_{10} = R \cdot (1{,}065^{10} + 1{,}065^{8} + 1{,}065^{7} + 1{,}065^{6} + 1{,}065^{5} + 1{,}065^{4} + \cdots + 1{,}065)$

$100000 = R \cdot 14{,}3716 \qquad | \quad :14{,}3716$

$R = 6958{,}19$

Die jährliche Eiinzahlung muss $6\,958{,}19$ € *betragen.*

b) Verwendung der Rentenformel für vorschüssige Einzahlungen:

$K_n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$60000 = \frac{6958{,}19 \cdot 1{,}065 \cdot (10{,}65^n - 1)}{0{,}065} = 114007{,}27 \cdot (1{,}065^n - 1)$

$\frac{60000}{114007{,}27} = 10{,}65^n$-1

$0{,}526282227 + 1 = 1{,}065^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}526282227) = n \cdot log(1{,}065) \qquad | \quad :log(1{,}065)$

$n = 6{,}71$

Im 7. *Jahr sind* $60\,000$ € *auf dem Konto.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 6958{,}19 \cdot 1{,}065 = 7410{,}47$

$K_2 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^2 + 1{,}065) = 15302{,}63$

$K_3 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 23708{,}79$

$K_4 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 32660{,}65$

$K_5 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 42194{,}39$

$K_6 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^6 + 1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 52347{,}82$

$K_7 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^7 + 1{,}065^6 + 1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065)$

$= 63161{,}22$

Lösung A22

a) $K_5 = 19978{,}88;\ \ n = 5;\ \ p\,\% = 5{,}9\,\%$

$19978{,}88 = K_0 \cdot 1{,}059^5 \qquad | \quad :1{,}059^5$

$K_0 = 15000{,}00$

Das Anfangskapital betrug $15\,000$ €.

b) $K_{12} = K_0 \cdot q^{12} = 15000 \cdot 1{,}059^{12} = 29843{,}02$

Das Endkapital nach 12 *Jahre neträgt* $29\,843{,}02$ €.

c) $3 = 1{,}059^n \qquad | \quad log$

$log(3) = n \cdot log(1{,}059) \qquad | \quad :log(1{,}045)$

$n = 19{,}16$

Das Anfangskapital verdreifacht sich im 20. *Jahr.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 15000 \cdot 1{,}059 = 15885{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}059 = 16822{,}22$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}059 = 17814{,}73$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}059 \ldots$

… weiter bis

$K_{19} = K_{15} \cdot 1{,}059 = 44577{,}38$

$K_{20} = K_{19} \cdot 1{,}059 = 47207{,}44$

d) $q^{17} = 3 \qquad | \quad \sqrt[17]{\ }$

$q = 1{,}0666$

$p\,\% = (1{,}0666 - 1) \cdot 100 = 6{,}66\,\%$

Der Zinssatz müsste $6{,}66\,\%$ *betragen.*

Lösung A23

a) Gesucht ist jeweils das Anfangskapital.
Anfangskapital A:
$K_{0_A} = 389000{,}00$
Anfangskapital B:
$K_5 = 445000{,}00;\ n = 5;\ p\% = 6{,}25\ \%$
$445000 = K_0 \cdot 1{,}0625^5 \quad | \quad :1{,}0625^5$
$K_{0_B} = 328636{,}14$
Anfangskapital C:
$K_3 = 225000{,}00;\ n = 3;\ p\% = 6{,}25\ \%;\ K_6 = 225000{,}00;\ n = 6;\ p\ \% = 6{,}25\ \%$
$225000 = K_{0_1} \cdot 1{,}0625^3 \quad | \quad :1{,}0625^3$
$K_{0_1} = 187583{,}96$
$225000 = K_{0_2} \cdot 1{,}0625^6 \quad | \quad :1{,}0625^6$
$K_{0_2} = 156389{,}97$
$K_{0_C} = K_{0_1} + K_{0_2} = 187583{,}96 + 156389{,}97 = 343973{,}93$
Das Angebot von A ist für die Verkäuferin am günstigsten.

b) $375000 = 235000 \cdot q^{15} \quad | \quad :235000$
$q^{15} = 1{,}595744681 \quad | \quad \sqrt[15]{\ }$
$q = 1{,}03164$
$p\ \% = (1{,}03164 - 1) \cdot 100 = 3{,}16\ \%$
Die durchschnittliche Wertsteigerung betrug $3{,}16\ \%$ *pro Jahr.*

Lösung A24

$K_0 = 76000;\ n = 6;\ p\ \% = 7\ \%$

a) $K_6 = K_0 \cdot q^6 = 76000 \cdot 1{,}07^6 = 114055{,}51$
Das Kapital beträgt nach 6 *Jahre* $114\,055{,}51$ *€.*

b) $130582{,}15 = 76000 \cdot 1{,}07^n \quad | \quad :76000$
$1{,}718186184 = 1{,}07^n \quad | \quad log$
$log(1{,}718186184) = n \cdot log(1{,}07) \quad | \quad :log(1{,}07)$
$n = 8$
Das Anfangskapital wächst in 8 *Jahren auf* $130\,582{,}15$ *an.*

Ohne Logarithmus:
$K_1 = 76000 \cdot 1{,}07 = 81320{,}00$
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}07 = 87012{,}40$
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}07 = 93103{,}27$
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}07 \ldots$
… weiter bis
$K_7 = K_6 \cdot 1{,}07 = 122039{,}39$
$K_8 = K_7 \cdot 1{,}07 = 130582{,}15$

c) $2 = q^9 \quad | \quad \sqrt[9]{\ }$
$q = 1{,}08$
$p\ \% = (1{,}08 - 1) \cdot 100 = 8{,}0\ \%$
Der Zinssatz müsste $8\ \%$ *betragen.*