Kapitalentwicklung mit Zinseszinsen

(fester und variabler Zinssatz)

Kapitel mit 200 Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Kapitel ***Zinseszinsen*** haben wir die Berechnungsformel für die Zinseszinsrechnung kennengelernt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nun mit der Kapitalentwicklung innerhalb der Zinseszinsrechnung.

Unter „Kapitalentwicklung" verstehen wir die ***einmalige*** Einzahlung eines bestimmten Betrages – des Anfangskapitals K_0- bei einer Bank für einen Zeitraum von mindestens einem Jahr. Wir wollen wissen, wie sich dieses eingezahlte Kapital „entwickelt" und mit welchem Betrag - Endkapital K_n- wir nach Ablauf von n Jahren bei einem Zinssatz von $p\,\%$ rechnen können.

Die Zinseszinsformel für festen Zinssatz

Die Zinseszinsformel für festen Zinssatz lautet

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{100}\right)^n$$

und mit

$$q = 1 + \frac{p\%}{100}$$

vereinfacht zu

$$K_n = K_0 \cdot q^n.$$

In der Formel bedeutet

K_0= Anfangskapital
Dies ist der Geldbetrag, den wir zur Bank bringen und anlegen, es ist aber auch gleichzeitig der Geldbetrag, den wir bei einer Bank ausleihen, weil wir einen Kredit benötigen.

K_n = Endkapital
Dies ist der Geldbetrag, den wir nach n Jahren auf unserem Konto zur Verfügung haben, wenn unser Anfangskapital n Jahre lang mit $p\,\%$ Zinsen verzinst wurde.

$p\,\%$ = Zinssatz
Dies ist der Prozentsatz, mit dem unser Anfangskapital Jahr für Jahr einschließlich Zinsen verzinst wird.

n = Anzahl der Jahre
Dies sind die Anzahl Jahre, die wir das Geld auf der Bank lassen zum verzinsen.

q = Zinsfaktor
Dies ist der Faktor der exponentiellen Zunahme des Kapitals.

Erweiterte Zinseszinsformel für variablen Zinssatz

Die obige Zinseszinsformel gilt nur für den Fall, dass der Zinssatz über die gesamte Laufzeit der Kapitalanlage konstant bleibt. Nun gibt es aber auch Sparformen, bei denen je nach Anlagelänge des Kapitals ein stufenweise steigender Zinssatz gilt. Wir sprechen hier von Kapitalentwicklung mit variablem Zinssatz.

In diesem Falle gilt die erweiterte Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_{n-1} \cdot q_n.$$

K_0= Anfangskapital sowie K_n = Endkapital ist hier wie bei festem Zinssatz. Die Veränderung ist hier der variable Zinsfaktor.

Sei p_1 % der gültige Zinssatz im ersten Jahr, so ist q_1 mit $q_1 = 1 + \frac{p_1\%}{100}$ der Zinsfaktor für das erste Jahr; q_2 mit $q_2 = 1 + \frac{p_2\%}{100}$ der Zinsfaktor für das zweite Jahr; q_3 mit $q_3 = 1 + \frac{p_3\%}{100}$ der Zinsfaktor für das dritte Jahr; … usw. bis q_n mit $q_n = 1 + \frac{p_n\%}{100}$ der Zinsfaktor für das letzte Jahr der Anlage.

Berechnungsmethoden

Wollen wir von der Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ bzw. $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$ eine der vier Variablen bzw. $2 + n$ Variablen berechnen, so müssen uns stets die anderen Variablen in irgendeiner Form gegeben sein. Bei den Aufgabenstellungen handelt es sich zumeist um Textaufgaben. Wir müssen also zunächst durch Textinterpretation ermitteln, welche der Variablen gegeben ist und welche Variable gesucht wird. Je nachdem führt uns dies zu unterschiedlichen Berechnungsmethoden.

Berechnung des Endkapitals

Zur Berechnung des Endkapitals müssen die Variablen K_0, q bzw. q_1, q_2,… q_n sowie n gegeben sein.

Beispiel 1

Auf welchen Betrag wachsen $12\,000$ €, die zu $6{,}5$ % 10 Jahre fest angelegt werden?

Lösung 1

$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $K_0 = 12000$ €, $n = 10$ Jahre und $q = 1 + \frac{p\,\%}{100} = 1 + 0{,}065 = 1{,}065$.

$K_{10} = 12000 \cdot 1{,}065^{10} = 22525{,}65$

Das Kapital wächst auf $22\,525{,}65$ € an.

Beispiel 2

Ein Betrag von $8\,000$ € wird 5 Jahre fest angelegt. Die Zinsen sind wie folgt gestaffelt:

1. Jahr: 2 %
2. Jahr: $2{,}25$ %
3. Jahr: $2{,}5$ %
4. Jahr: $2{,}75$ %
5. Jahr: 3 %

Mit welchem Endkapital kann nach den Jahren Laufzeit gerechnet werden?

Lösung 2

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$ mit $K_0 = 8000$ €, $n = 5$ Jahre und $q_1 = 1 + \frac{p_1\,\%}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Alternativ ergeben sich $q_2 = 1{,}0225$; $q_3 = 1{,}025$; $q_4 = 1{,}0275$ und $q_5 = 1{,}03$.

$K_5 = 8000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03 = 9051{,}00$

Das Kapital wächst auf $9051{,}00$ € an.

Berechnung des Anfangskapitals

Zur Berechnung des Endkapitals müssen die Variablen K_n, q bzw. q_1, q_2,… q_n sowie n gegeben sein.

Beispiel 3

Welches Kapital wurde bei $6{,}5\ \%$ Zinsen angelegt, wenn nach 10 Jahren $22\,525{,}65$ € vorhanden sind?

Lösung 3

$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $K_n = 22525{,}65$ €, $n = 10$ Jahre und $q = 1 + \frac{p\ \%}{100} = 1 + 0{,}065 = 1{,}065$.

$22525{,}65 = K_0 \cdot 1{,}065^{10} \qquad | \quad : 1{,}065^{10}$

$K_0 = 12000$

Das Anfangskapital betrug ursprünglich $12\,000{,}00$ €.

Beispiel 4

Welches Anfangskapital wurde angelegt, wenn nach 5 Jahren und einer Zinsstaffelung wie folgt

1. Jahr: $2\ \%$
2. Jahr: $2{,}25\ \%$
3. Jahr: $2{,}5\ \%$
4. Jahr: $2{,}75\ \%$
5. Jahr: $3\ \%$

ein Endkapital von $9051{,}00$ € entstand?

Lösung 4

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$ mit $K_n = 9051$ €, $n = 5$ Jahre und $q_1 = 1 + \frac{p_1\ \%}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Alternativ ergeben sich $q_2 = 1{,}0225$; $q_3 = 1{,}025$; $q_4 = 1{,}0275$ und $q_5 = 1{,}03$.

$9051 = K_0 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03$

$9051 = K_0 \cdot 1{,}13137456 \qquad | \quad : 1{,}13137456$

$K_0 = 8000$

Das Anfangskapital betrug ursprünglich $8000{,}00$ €.

Berechnung des Zinssatzes

Zur Berechnung des Zinssatzes müssen die Variablen K_0, K_n *sowie* n gegeben sein. Bei variablem Zinssatz müssen die Zinssätze bis auf einen einzigen ebenfalls gegeben sein.

Beispiel 5

Ein Kapital von $12\,000$ € wächst in 10 Jahren auf $22\,525{,}65$ € an. Welcher Zinssatz liegt zugrunde?

Lösung 5

$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $K_0 = 12000{,}00$ € $K_n = 22525{,}65$ €, $n = 10$ Jahre.

$22525{,}65 = 12000 \cdot q^{10} \qquad | \quad : 12000$

$1{,}8771375 = q^{10} \qquad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}065$

$1{,}065 = 1 + \frac{p\ \%}{100}$

$p\ \% = 106{,}5\ \% - 100\ \% = 6{,}5\ \%$

Das Kapital wurde mit $6{,}5\ \%$ *verzinst.*

Beispiel 6

Ein Kapital von $8\,000$ € wächst in 5 Jahren auf $9\,051$ € an. Die Zinsstaffel der ersten 4 Jahre war

1. Jahr: $2\,\%$
2. Jahr: $2{,}25\,\%$
3. Jahr: $2{,}5\,\%$
4. Jahr: $2{,}75\,\%$

Wie hoch war der Zinssatz im 5. Jahr?

Lösung 6

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$ mit $K_0 = 8000$ €, $K_n = 9051$ €, $n = 5$ Jahre und $q_1 = 1 + \frac{p_1\,\%}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Analog ergeben sich $q_2 = 1{,}0225;\ \ q_3 = 1{,}025$ und $q_4 = 1{,}0275$.

$9051 = 8000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot q_5$

$9051 = 8787{,}34 \cdot q_5 \qquad | \quad : 8787{,}34$

$q_5 = 1{,}03$

$1{,}03 = 1 + \frac{p_5\,\%}{100}$

$p_5\,\% = 103\,\% - 100\,\% = 3\,\%$

Der Zinssatz im 5. Jahr betrug $3\,\%$.

Berechnung des Anlagezeitraums

Zur Berechnung des Anlagezeitraums müssen die Variablen K_0, K_n sowie q gegeben sein. Berechnungen von Anlagezeiträumen mit vareiablen Zinssätzen sind nicht möglich.

Hinweis:

Zur Berechnung des Anlagezeitraums sind Kenntnisse der Logarithmus-Rechnung erforderlich.

Beispiel 7

Ein Kapital von $12\,000$ € wächst bei einem Zinssatz von $6{,}5\,\%$ auf $22\,525{,}65$ € an. Wie viele Jahre liegen zugrunde?

Lösung 7

$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $K_0 = 12000{,}00$ € $K_n = 22525{,}65$ € und $q = 1 + \frac{p\,\%}{100} = 1 + 0{,}065 = 1{,}065$.

$22525{,}65 = 12000 \cdot 1{,}065^n \qquad | \quad : 12000$

$1{,}8771375 = 1{,}065^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}8771375) = n \cdot log(1{,}065) \qquad | \quad : log(1{,}065)$

$n = \frac{log(1{,}8771375)}{log(1{,}065)} = 10$

Das Kapital wurde 10 Jahre lang angelegt.

Berechnung von Jahreszinsen

Manchmal ist es von Interesse, wieviel Zinsen es in einem bestimmten Anlagejahr gab. Hierzu müssen - wie bei der Berechnung des Endkapitals – die Variablen K_0, q bzw. q_1, q_2,… q_n sowie n gegeben sein.

Wird nun nach den erhaltenen Zinsen in einem bestimmten Jahr gefragt – z. B. im dritten Jahr – so berechnen wir dies über das Endkapital des dritten Jahres abzüglich des Endkapitals des 2. Jahres.

Beispiel 8

Ein Betrag von $12\,000$ € wird zu $6{,}5\,\%$ auf 10 Jahre fest angelegt. Welche Zinsen wurden im $6.$ Jahr der Anlage verdient?

Lösung 8

$K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $K_0 = 12000$ €, $n = 10$ Jahre und $q = 1 + \frac{p\,\%}{100} = 1 + 0{,}065 = 1{,}065$.
$Z_6 = K_6 - K_5$
$K_6 = 12000 \cdot 1{,}065^6 = 17509{,}71$
$K_5 = 12000 \cdot 1{,}065^5 = 16441{,}04$
$Z_6 = 17509{,}71 - 16441{,}04 = 1068{,}67$
Im $6.$ Jahr der Anlage wurden $1\,068{,}67$ € Zinsen verdient.

Beispiel 9

Ein Betrag von $8\,000$ € wird 5 Jahre fest angelegt. Die Zinsen sind wie folgt gestaffelt:
1. Jahr: $2\,\%$
2. Jahr: $2{,}25\,\%$
3. Jahr: $2{,}5\,\%$
4. Jahr: $2{,}75\,\%$
5. Jahr: $3\,\%$

Welche Zinsen wurden im $3.$ Jahr der Anlage verdient?

Lösung 9

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$ mit $K_0 = 8000$ €, $n = 5$ Jahre und $q_1 = 1 + \frac{p_1\,\%}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Analog ergeben sich $q_2 = 1{,}0225$; $q_3 = 1{,}025$; $q_4 = 1{,}0275$ und $q_5 = 1{,}03$.
$Z_3 = K_3 - K_2$
$K_3 = 8000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 = 8552{,}19$
$K_2 = 8000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 = 8343{,}60$
$Z_3 = 8552{,}19 - 8343{,}60 = 208{,}59$
Im $3.$ Jahr der Anlage wurden $208{,}59$ € Zinsen verdient.

Berechnung des Gesamtzinsertrags absolut und relativ

Es ist auch von Interesse zu wissen, wieviel Zinsen insgesamt verdient wurden und zwar absolut als auch relativ.
Den absoluten Zuwachs (in €) ermitteln wir aus $Z_{ges} = K_n - K_o$.
Den relativen Zuwachs (in %) ermitteln wir aus $p_{ges}\% = \frac{K_n}{K_0} \cdot 100\,\% - 100\,\%$.

Beispiel 10

Ein Betrag von $12\,000$ € wächst mit Zinseszinsen auf $22\,525{,}65$ € an. Welchen Zinsertrag erzielte die Anlage absolut und in Prozent?

Lösung 10

$Z_{ges} = K_n - K_0$ mit $K_0 = 12000$ € und $K_n = 22525{,}65$ €.
$p_{ges}\% = \frac{K_n}{K_o} \cdot 100 - 100$
$Z_{ges} = 22525{,}65 - 12000 = 10525{,}65$
$p_{ges}\% = \frac{22525{,}65}{12000} \cdot 100\,\% - 100\,\% = 87{,}7\,\%$
Die Kapitalanlage erwirtschaftete $10\,525{,}65$ € Zinsen. Das sind $87{,}7\,\%$ des Anlagekapitals.

Beispiel 11

Ein Betrag von $8\,000$ € wächst mit Zinseszinsen auf $0\,051$ € an. Welchen Zinsertrag erzielte die Anlage absolut und in Prozent?

Lösung 11

$Z_{ges} = K_n - K_0$ mit $K_0 = 8000$ € und $K_n = 9051$ €.

$p_{ges}\% = \frac{K_n}{K_o} \cdot 100 - 100$

$Z_{ges} = 9051 - 8000 = 1051$

$p_{ges}\% = \frac{9051}{8000} \cdot 100\ \% - 100\ \% = 13{,}14\ \%$

Die Kapitalanlage erwirtschaftete $1\,051$ € Zinsen. Das sind $13{,}14\ \%$ des Anlagekapitals.

Aufgabe A1

Bestimme den Zinsfaktor q für die jährliche Verzinsung.

a) $p\% = 3\%$ b) $p\% = 7\%$ c) $p\% = 4{,}2\%$ d) $p\% = 3{,}6\%$
e) $p\% = 5{,}2\%$ f) $p\% = 5{,}6\%$ g) $p\% = 6{,}55\%$ h) $p\% = 2{,}25\%$

Aufgabe A2

Auf welches Kapital K_n wächst ein Anfangskapital K_0 bei einem Zinssatz von $p\,\%$ in n Jahren?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	1200 €	4000 €	2600 €	4500 €	5900 €
$p\,\%$	4 %	5 %	3 %	2,25 %	0,75 %
n	$7\,J$	$12\,J$	$10\,J$	$6\,J$	$2\,J$

Aufgabe A3

Auf welches Kapital K_n wächst ein Anfangskapital K_0 bei einem Zinssatz von $p\,\%$ in n Jahren?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	3600 €	2900 €	1680 €	71000 €	169000 €
$p\,\%$	1 %	2 %	0,5 %	7 %	1,25 %
n	$2\,J$	$10\,J$	$4\,J$	$8\,J$	$15\,J$

Aufgabe A4

Welches Kapital K_0 wächst auf ein Endkapital K_n bei einem Zinssatz von $p\,\%$ in n Jahren an?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_n	25000 €	140000 €	80000 €	63250 €	122360 €
$p\,\%$	3,5 %	4,75 %	4,2 %	3,2 %	2,9 %
n	$8\,J$	$3\,J$	$5\,J$	$12\,J$	$11\,J$

Aufgabe A5

Welches Kapital K_0 wächst auf ein Endkapital K_n bei einem Zinssatz von $p\,\%$ in n Jahren an?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_n	47968 €	105904 €	142880 €	94660 €	111950 €
$p\,\%$	3,7 %	5,5 %	4,5 %	1 %	8 %
n	$5\,J$	$10\,J$	$10\,J$	$12\,J$	$9\,J$

Aufgabe A6

Welcher Zinssatz $p\,\%$ ließ ein Kapital K_0 in n Jahren auf ein Endkapital K_n anwachsen?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	56000 €	84000 €	92000 €	62000 €	40000 €
n	$9\,J$	$12\,J$	$10\,J$	$10\,J$	$5\,J$
K_n	111950 €	94660 €	142880 €	105904 €	47968 €

Aufgabe A7

Welcher Zinssatz $p\,\%$ ließ ein Kapital K_0 in n Jahren auf ein Endkapital K_n anwachsen?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	$1200\ €$	$4000\ €$	$2600\ €$	$4500\ €$	$5900\ €$
n	$7\ J$	$12\ J$	$10\ J$	$6\ J$	$2\ J$
K_n	$1579{,}12\ €$	$7183{,}43\ €$	$3494{,}18\ €$	$5142{,}71\ €$	$5988{,}83\ €$

Aufgabe A8

Auf welchen Betrag wachsen $15000\ €$, die zu $4{,}5\ \%$ 12 Jahre festgelegt werden?

Aufgabe A9

Eine Spende von $60\,000\ €$ wird festgelegt und wächst auf $90\,456\ €$ nach 12 Jahren an.

a) Mit welchem Zinssatz wurde das Geld verzinst?

b) Welches Kapital hätte sich ergeben, wenn bei gleichem Zinssatz und gleicher Laufzeit statt $60\,000\ €$ $90\,000\ €$ angelegt worden wären?

Aufgabe A10

Auf welche Summe wäre $1\ €$ angewachsen, wenn er bei Christi Geburt bis zum Ende des Jahres 2000 zu $1\ \%$ auf Zinseszinsen angelegt worden wäre?

Aufgabe A11

Ein Mann leiht einem anderen $3\,800\ €$ auf 10 Jahre und verlangt dafür einen Schuldschein über $6\,705\ €$. Berechne den Zinssatz.

Aufgabe A12

Ein Bauplatz kostete vor 5 Jahren $45\,000\ €$.

a) Wie teuer muss er heute verkauft werden, wenn man keinen Verlust erleiden will. Als Zinssatz seien $6\ \%$ angenommen.

b) Der Bauplatz wird tatsächlich für $75\,000\ €$ verkauft. Welcher Verzinsung entspricht dieser Preis?

Lösung A1

Lösungsformel für q: $q = 1 + \frac{p\,\%}{100}$

a) $q = 1{,}03$ b) $q = 1{,}07$ c) $q = 1{,}042$ d) $q = 1{,}036$
e) $q = 1{,}052$ f) $q = 1{,}056$ g) $q = 1{,}0655$ h) $q = 1{,}0225$

Lösung A2

Lösungsformel für K_n: $K_n = K_0 \cdot q^n$

	a)	b)	c)	d)	e)
K_n	$1200\,€ \cdot 1{,}04^7 = 1579{,}12\,€$	$4000\,€ \cdot 1{,}05^{12} = 7183{,}43\,€$	$2600€ \cdot 1{,}03^{10} = 3494{,}18\,€$	$4500€ \cdot 1{,}0225^6 = 5142{,}71\,€$	$5900€ \cdot 1{,}0075^2 = 5988{,}83\,€$

Lösung A3

Lösungsformel für K_n: $K_n = K_0 \cdot q^n$

	a)	b)	c)	d)	e)
K_n	$3600\,€ \cdot 1{,}01^2 = 3672{,}36\,€$	$2900\,€ \cdot 1{,}02^{10} = 3535{,}08\,€$	$1680€ \cdot 1{,}005^4 = 1713{,}85\,€$	$71000€ \cdot 1{,}07^8 = 121991{,}22\,€$	$169000€ \cdot 1{,}0125^{15} = 203616{,}13\,€$

Lösung A4

Lösungsformel für K_0: $K_0 = K_n/q^n$

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	$25000\,€/1{,}035^8 = 18985{,}29\,€$	$140000\,€/1{,}0475^3 = 121805{,}23\,€$	$80000€/1{,}042^5 = 65125{,}55\,€$	$632500€/1{,}032^{12}$ $433415{,}22\,€$	$122360€/1{,}029^{11} = 89345{,}02\,€$

Lösung A5

Lösungsformel für K_0: $K_0 = K_n/q^n$

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	$47968\,€/1{,}0375^5 = 39774{,}65$	$105904\,€/1{,}055^{10} = 61999{,}44\,€$	$142880€/1{,}045^{10} = 92004{,}39\,€$	$94660€/1{,}01^{12}$ $84005{,}94\,€$	$111950€/1{,}08^9 = 56002{,}87\,€$

Lösung A6

Lösungsformel für q: $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$; $p\% = (q-1) \cdot 100$

	a)	b)	c)	d)	e)
q	$\sqrt[9]{\frac{111950}{56000}} = 1{,}08$	$\sqrt[12]{\frac{94660}{84000}} = 1{,}01$	$\sqrt[10]{\frac{142880}{92000}} = 1{,}045$	$\sqrt[10]{\frac{105904}{62000}} = 1{,}055$	$\sqrt[5]{\frac{47968}{40000}} = 1{,}037$
$p\%$	8 %	1 %	4,5 %	5,5 %	3,7 %

Lösung A7

Lösungsformel für q: $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$; $p\% = (q-1) \cdot 100$

	a)	b)	c)	d)	e)
q	$\sqrt[7]{\frac{1579{,}12}{1200}} = 1{,}04$	$\sqrt[12]{\frac{7183{,}43}{4000}} = 1{,}05$	$\sqrt[10]{\frac{3494{,}18}{2600}} = 1{,}03$	$\sqrt[6]{\frac{5142{,}71}{4500}} = 1{,}0225$	$\sqrt[2]{\frac{5988{,}83}{5900}} = 1{,}0075$
$p\%$	4 %	5 %	3 %	2,25 %	0,75 %

Lösung A8

$K_n = K_0 \cdot q^n$
$K_n = 15000 \cdot 1{,}045^{12}$
$K_n = 25438{,}22$
Das Kapital wächst auf 25.438,22 € *an.*

Lösung A9

a) $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}; \quad p\% = (q-1) \cdot 100$

$q = \sqrt[12]{\frac{90456}{60000}} = 1{,}035$

$p\% = (1{,}035 - 1) \cdot 100 = 3{,}5\ \%$

Das Geld wurde mit 3,5 % *verzinst.*

b) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_n = 90000 \cdot 1{,}035^{12} = 135996{,}18$

Es hätten sich ein Kapital von 135.996,18 € *ergeben.*

Lösung A10

$K_n = K_0 \cdot q^n$
$K_n = 1 \cdot 1{,}01^{2000} = 439286205{,}10$
1 € *wäre auf* 439 286 205,10 € *angewachsen.*

Lösung A11

$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}; \quad p\% = (q-1) \cdot 100$

$q = \sqrt[10]{\frac{6705}{3000}} = 1{,}0837$

$p\% = (1{,}0837 - 1) \cdot 100 = 8{,}37\ \%$

Der Mann verlangte einen Zinssatz von 8,37 % *.*

Lösung A12

a) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_n = 45000 \cdot 1{,}06^5 = 60220{,}15$

Der Bauplatz müsste für 60 220,15 € *verkauft werden.*

b) $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}; \quad p\% = (q-1) \cdot 100$

$q = \sqrt[5]{\frac{75000}{45000}} = 1{,}1076$

$p\% = (1{,}1076 - 1) \cdot 100 = 10{,}76\ \%$

Die Verzinsung entspricht 10,76 %*.*

Aufgabe A1

Bestimme den Zinsfaktor q für die jährliche Verzinsung.

a) $p\% = 0{,}5\%$ b) $p\% = 1{,}7\%$ c) $p\% = 3{,}2\%$ d) $p\% = 4{,}6\%$
e) $p\% = 0{,}525\%$ f) $p\% = 0{,}55\%$ g) $p\% = 0{,}575\%$ h) $p\% = 0{,}6\%$

Aufgabe A2

Auf welches Kapital K_n wächst ein Anfangskapital K_0 bei variablem Zinssatz gemäß Tabelle in 5 Jahren an?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	1200 €	4000 €	2600 €	4500 €	5900 €
p_1 %	1 %	2,5 %	1 %	2,25 %	0,75 %
p_2 %	1,5 %	3,0 %	2 %	2,5 %	1,75 %
p_3 %	1,75 %	3,5 %	3 %	2,75 %	2,75 %
p_4 %	2,0 %	4,0 %	4 %	3,0 %	3,75 %
p_5 %	2,25 %	4,5 %	5 %	3,25 %	4,75 %

Aufgabe A3

Auf welches Kapital K_n wächst ein Anfangskapital K_0 bei variablem Zinssatz gemäß Tabelle in 5 Jahren an?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	3600 €	2900 €	1680 €	71000 €	169000 €
p_1 %	0,75 %	2,25 %	1 %	2,5 %	1 %
p_2 %	1,75 %	2,5 %	2 %	3,0 %	1,5 %
p_3 %	2,75 %	2,75 %	3 %	3,5 %	1,75 %
p_4 %	3,75 %	3,0 %	4 %	4,0 %	2,0 %
p_5 %	4,75 %	3,25 %	5 %	4,5 %	2,25 %

Aufgabe A4

Welches Kapital K_0 wächst auf ein Endkapital K_n bei variablem Zinssatz gemäß Tabelle in 5 Jahren an?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	1305,47 €	4750,19 €	3012,69 €	5153,58 €	6753,91 €
p_1 %	1 %	2,5 %	1 %	2,25 %	0,75 %
p_2 %	1,5 %	3,0 %	2 %	2,5 %	1,75 %
p_3 %	1,75 %	3,5 %	3 %	2,75 %	2,75 %
p_4 %	2,0 %	4,0 %	4 %	3,0 %	3,75 %
p_5 %	2,25 %	4,5 %	5 %	3,25 %	4,75 %

Aufgabe A5

Welches Kapital K_0 wächst auf ein Endkapital K_n bei variablem Zinssatz gemäß Tabelle in 5 Jahren an?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	4121,24 €	3321,19 €	1946,66 €	84315,58 €	183853,55 €
p_1 %	0,75 %	2,25 %	1 %	2,5 %	1 %
p_2 %	1,75 %	2,5 %	2 %	3,0 %	1,5 %
p_3 %	2,75 %	2,75 %	3 %	3,5 %	1,75 %
p_4 %	3,75 %	3,0 %	4 %	4,0 %	2,0 %
p_5 %	4,75 %	3,25 %	5 %	4,5 %	2,25 %

Aufgabe A6

Welcher Zinssatz p_x % ließ ein Kapital K_0 in 4 Jahren auf ein Endkapital K_n anwachsen?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	56000,00 €	84000,00 €	92000,00 €	62000,00 €	40000,00 €
K_n	61798,81 €	95458,38 €	102045,55 €	65965,02 €	43712,88 €
p_1 %	1 %	2,5 %	2,25 %	? %	0,75 %
p_2 %	2 %	3,0 %	? %	1,5 %	1,75 %
p_3 %	3 %	? %	2,75 %	1,75 %	2,75 %
p_4 %	? %	4,0 %	3,0 %	2,0 %	? %

Aufgabe A7

Welcher Zinssatz p_x % ließ ein Kapital K_0 in 4 Jahren auf ein Endkapital K_n anwachsen?

	a)	b)	c)	d)	e)
K_0	1200,00 €	4000,00 €	2600,00 €	4500,00 €	5900,00 €
K_n	1311,39 €	4255,80 €	2883,90 €	5113,84 €	6510,95 €
p_1 %	0,75 %	? %	2,25 %	2,5 %	1 %
p_2 %	1,75 %	1,5 %	? %	3,0 %	2 %
p_3 %	2,75 %	1,75 %	2,75 %	? %	3 %
p_4 %	? %	2,0 %	3,0 %	4,0 %	? %

Aufgabe A8

Ein Betrag von 15000 € wird 6 Jahre zu folgendem variablem Zinssatz angelegt:
1. Jahr: 2,25 % 2. Jahr 2,5 % 3. Jahr 2,75 %
4. Jahr 3,0 % 5. und 6. Jahr jeweils 4,0 %
Welches Endkapital ergibt sich?

Aufgabe A9

Eine Spende von 60 000 € wird festgelegt und wächst auf 91 965,20 € nach 12 Jahren an.

a) In den ersten 6 Jahren wird ein fester Zinssatz von 3,0 % vereinbart. Im 7 bis 9 Jahr beträgt der Zinssatz 4,0 %. Der Zinssatz im 10. bis 12. Jahr ist gleich. Welcher Zinssatz liegt dem zugrunde?
b) Welches Endkapital ergibt sich, wenn bei gleichen Zinssätzen und gleicher Laufzeit statt 60 000 € 90 000 € angelegt worden wären?

Aufgabe A10

Ein Mann leiht einem anderen 3 800 € auf 8 Jahre und verlangt dafür einen Schuldschein über 6 705 €. Der Zinssatz im 1. Jahr beträgt 5 %. Danach steigt er bis zum 7. Jahr Jahr für Jahr um ein weiteres Prozent.
Wie hoch ist der Prozentsatz p_8 im 8. Jahr?

Aufgabe A11

Ein Bauplatz kostet heute $130\,000$ €.

a) Wie teuer muss er in 5 Jahren verkauft werden, wenn die anfängliche Inflationsrate bei $0{,}5$ % liegt und in den Folgejahren Jahr für Jahr um jeweils $0{,}25$ % ansteigt?

b) Der Bauplatz wird tatsächlich für $180\,000$ € verkauft. Welcher Verzinsung entspricht dieser Preis?

Aufgabe A12

Ein Konfirmand legt seine erhaltenen Geldgeschenke in Höhe von 2050 € so an, dass er dann über sein Geld verfügen kann, wenn es sich etwa verdoppelt hat. Die Bank gewährt ihm dafür im 1. Jahr $4{,}0$ % Zinsen. Diese Zinsen erhöhen sich Jahr für Jahr um $0{,}5$ % Prozent.

a) Wie lange muss der Konfirmand warten?

b) Welchen festen Zinssatz müsste er dann mit der Bank „aushandeln", damit er nach weiteren drei Jahren über 5000 € verfügen kann?

Aufgabe A13

Wie lange müssen 50000 € angelegt werden, wenn sie auf 89000 € anwachsen sollen, der Zinssatz im 1. Jahr 4 % beträgt und dann Jahr für Jahr um jeweils 1 % steigt?

Aufgabe A14

Ein Sparer verfügt nach 6 Jahren Sparzeit über ein Kapitel von 50000 €. Sein Anlagekapital würde im 1. Jahr mit $5{,}0$ %, im 2. Jahr mit $5{,}5$ % und im 3. Jahr mit $6{,}0$ % verzinst. Am Ende des dritten Jahres zahlt er weitere $23201{,}91$ € auf sein Konto ein. Die Bank gewährt ihm dann folgende Zinssätze:
4. Jahr $6{,}5$ %, 5. Jahr $7{,}0$ % und 6. Jahr $7{,}5$ % für weitere drei Jahre.

a) Welchen Betrag hat der Sparer anfänglich angelegt?

b) Wieviel Zinsen wurden ihm im 5. Sparjahr gutgeschrieben?

Lösung A1

Lösungsformel für q: $q = 1 + \frac{p\,\%}{100}$

a) $q = 1{,}005$ b) $q = 1{,}017$ c) $q = 1{,}032$ d) $q = 1{,}046$
e) $q = 1{,}00525$ f) $q = 1{,}0055$ g) $q = 1{,}00575$ h) $q = 1{,}006$

Lösung A2

Lösungsformel für K_n: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5$

a) $K_n = 1200 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 = 1305{,}47$
b) $K_n = 4000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 = 4750{,}19$
c) $K_n = 2600 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 = 3012{,}69$
d) $K_n = 4500 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}0325 = 5153{,}58$
e) $K_n = 5900 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0475 = 6753{,}91$

Lösung A3

Lösungsformel für K_n: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5$

a) $K_n = 3600 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0475 = 4121{,}03$
b) $K_n = 2900 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}0325 = 3321{,}19$
c) $K_n = 1680 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 = 1946{,}66$
d) $K_n = 71000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 = 84315{,}89$
e) $K_n = 169000 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225 = 183853{,}55$

Lösung A4

Lösungsformel für K_0: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5$

a) $1305{,}47 = K_0 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225$
$1305{,}47 = K_0 \cdot 1{,}087890846 \quad | \quad :1{,}087890846$
$K_0 = 1200$ €

b) $4750{,}19 = K_0 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045$
$4750{,}19 = K_0 \cdot 1{,}187547719 \quad | \quad :1{,}187547719$
$K_0 = 4000$ €

c) $3012{,}69 = K_0 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05$
$3012{,}69 = K_0 \cdot 1{,}158727752 \quad | \quad :1{,}158727752$
$K_0 = 2600$ €

d) $5153{,}58 = K_0 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}0325$
$5153{,}58 = K_0 \cdot 1{,}145239445 \quad | \quad :1{,}145239445$
$K_0 = 4500$ €

e) $6753{,}91 = K_0 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0475$
$6753{,}91 = K_0 \cdot 1{,}14473099 \quad | \quad :1{,}14473099$
$K_0 = 5900$ €

Lösung A5

Lösungsformel für K_0: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5$

a) $4121{,}03 = K_0 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0475$
$4121{,}03 = K_0 \cdot 1{,}14473099 \quad | \quad :1{,}14473099$
$K_0 = 3600$ €

b) $3321{,}19 = K_0 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}0325$
$3321{,}19 = K_0 \cdot 1{,}145239445 \quad | \quad :1{,}145239445$
$K_0 = 2900$ €

c) $1946{,}66 = K_0 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05$
$1946{,}66 = K_0 \cdot 1{,}158727752 \qquad | \quad :1{,}158727752$
$K_0 = 1680\,€$

d) $84315{,}89 = K_0 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045$
$84315{,}89 = K_0 \cdot 1{,}187547719 \qquad | \quad :1{,}187547719$
$K_0 = 71000\,€$

e) $183853{,}55 = K_0 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}0225$
$183853{,}55 = K_0 \cdot 1{,}087890846 \qquad | \quad :1{,}087890846$
$K_0 = 169000\,€$

Lösung A6

Lösungsformel für K_0: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$

a) $61798{,}81 = 56000{,}00 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot q_4$
$61798{,}81 = 59421{,}94 \cdot q_4 \qquad | \quad :59421{,}94$
$q_4 = 1{,}04$
$p_4\,\% = 104\,\% - 100\,\% = 4\,\%$

b) $95458{,}38 = 84000{,}00 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot q_3 \cdot 1{,}04$
$95458{,}38 = 92230{,}32 \cdot q_3 \qquad | \quad :92230{,}32$
$q_3 = 1{,}035$
$p_3\,\% = 103{,}5\,\% - 100\,\% = 3{,}5\,\%$

c) $102045{,}55 = 92000{,}00 \cdot 1{,}0225 \cdot q_2 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03$
$102045{,}55 = 99556{,}63 \cdot q_2 \qquad | \quad :99556{,}63$
$q_2 = 1{,}025$
$p_2\,\% = 102{,}5\,\% - 100\,\% = 2{,}5\,\%$

d) $65965{,}02 = 62000{,}00 \cdot q_1 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02$
$65965{,}02 = 65311{,}90 \cdot q_1 \qquad | \quad :65311{,}90$
$q_1 = 1{,}01$
$p_1\,\% = 101\,\% - 100\,\% = 1\,\%$

e) $43712{,}88 = 40000{,}00 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0275 \cdot q_4$
$43712{,}88 = 42132{,}89 \cdot q_4 \qquad | \quad :42132{,}89$
$q_4 = 1{,}0375$
$p_4\,\% = 103{,}75\,\% - 100\,\% = 3{,}75\,\%$

Lösung A7

Lösungsformel für K_0: $K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$

a) $1311{,}39 = 1200{,}00 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0275 \cdot q_4$
$1311{,}39 = 1263{,}99 \cdot q_4 \qquad | \quad :1263{,}99$
$q_4 = 1{,}0375$
$p_4\,\% = 103{,}75\,\% - 100\,\% = 3{,}75\,\%$

b) $4255{,}80 = 4000{,}00 \cdot q_1 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02$
$4255{,}80 = 4213{,}67 \cdot q_1 \qquad | \quad :4213{,}67$
$q_1 = 1{,}01$
$p_1\,\% = 101\,\% - 100\,\% = 1\,\%$

c) $2883{,}90 = 2600{,}00 \cdot 1{,}0225 \cdot q_2 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03$
$2883{,}90 = 2813{,}56 \cdot q_2 \qquad | \quad :2813{,}56$
$q_2 = 1{,}025$
$p_2\,\% = 102{,}5\,\% - 100\,\% = 2{,}5\,\%$

d) $5113{,}84 = 4500{,}00 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot q_3 \cdot 1{,}04$
$5113{,}84 = 4940{,}91 \cdot q_3 \quad | \quad :4940{,}91$
$q_3 = 1{,}035$
$p_3\,\% = 103{,}5\,\% - 100\,\% = 3{,}5\,\%$

e) $6510{,}95 = 5900{,}00 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot q_4$
$6510{,}95 = 6260{,}53 \cdot q_4 \quad | \quad :6260{,}53$
$q_4 = 1{,}04$
$p_4\,\% = 104\,\% - 100\,\% = 4\,\%$

Lösung A8

Lösungsformel: $K_4 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$
$K_4 = 15000 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04^2$
$K_n = 17995{,}51$
Das Kapital wächst auf 17.995,51 € an.

Lösung A9

Dies ist eine Kombination aus festem und variablem Zinssatz. In den ersten 6 Jahren ist der Zinssatz fix, in den Jahren 7 bis 9 ebenfalls, nur zu einem anderen Satz, in den Jahren 10 bis 12 fest, jedoch zu noch einem anderen Satz, der hier gesucht wird.

a) $K_n = K_0 \cdot q_1^6 \cdot q_2^3 \cdot q_3^3$
$91965{,}20 = 60000 \cdot 1{,}03^6 \cdot 1{,}04^3 \cdot q_3^3$
$91965{,}20 = 80588{,}79 \cdot q_3^3 \quad | \quad :80588{,}79$
$q_3^3 = 1{,}141166125 \quad | \quad \sqrt[3]{}$
$q_3 = 1{,}045$
$p_3\% = 104{,}5\,\% - 100\,\% = 4{,}5\,\%$
Der Zinssatz im 10. bis 12. Jahr betrug 4,5 %.

b) $K_n = K_0 \cdot q_1^6 \cdot q_2^3 \cdot q_3^3$
$K_{12} = 90000 \cdot 1{,}03^6 \cdot 1{,}04^3 \cdot 1{,}045^3 = 137947{,}79$
Es hätten sich ein Kapital von 137 947,79 € ergeben.

Lösung A10

Lösungsformel: $K_8 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6 \cdot q_7 \cdot q_8$
$6705 = 3800 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}10 \cdot q_8$
$6705 = 6094{,}51 \cdot q_8 \quad | \quad :6094{,}51$
$q_8 = 1{,}10$
$p_8\,\% = 110\,\% - 100\,\% = 10\,\%$
Der Zinssatz im 8. Jahr betrug 10 %.

Lösung A11

a) Lösungsformel: $K_5 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5$
$K_5 = 130000 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}025$
$K_5 = 140029{,}93$
Der Bauplatz müsste für 140 029,93 € wiederverkauft werden.

b) $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}; \quad p\% = (q-1) \cdot 100$
$q = \sqrt[5]{\frac{180000}{130000}} = 1{,}067$
$p\% = (1{,}067 - 1) \cdot 100 = 6{,}7\,\%$
Die Verzinsung entspricht 6,7 %.

Lösung A12

a) Aufgabe kann nur über eine Tabelle gelöst werden.

Jahr	Anfangskapital	Zinsfaktor	Endkapital
1	2050 €	1,04	2132 €
2	2132 €	1,045	2227,94 €
3	2227,94 €	1,05	2339,34 €
4	2339,34 €	1,055	2468,00 €
5	2468,00 €	1,06	2616,08 €
6	2616,08 €	1,065	2786,13 €
7	2786,13 €	1,07	2981,16 €
8	2981,16 €	1,075	3204,75 €
9	3204,75 €	1,08	3461,13 €
10	3461,13 €	1,085	3755,33 €
11	3755,33 €	1,09	4093,31 €
12	4093,31 €	1,095	4482,17 €

Der Konfirmand muss bis zum 12. *Jahr warten, bis sich seine Einlage verdoppelt hat.*

b) $K_{15} = K_{12} \cdot q^3$

$5000 = 4482{,}17 \cdot q^3 \qquad | \quad :4482{,}17$

$q^3 = 1{,}115531093 \qquad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}037$

$p\% = (1{,}037 - 1) \cdot 100 = 3{,}7\ \%$

Der Konfirmand müsste einen Zinssatz von 3,7 % *mit seiner Bank vereinbaren.*

Lösung A13

Aufgabe kann nur über eine Tabelle gelöst werden.

Jahr	Anfangskapital	Zinsfaktor	Endkapital
1	50000,00 €	1,04	52000,00 €
2	52000,00 €	1,05	54600,00 €
3	54600,00 €	1,06	57876 ,00€
4	57876,00 €	1,07	61927,32 €
5	61927,32 €	1,08	66881,51 €
6	66881,51 €	1,09	72900,85 €
7	72900,85 €	1,10	80190,94 €
8	80190,94 €	1,11	89011,94 €

Die 50 000 € *müssen* 8 *Jahre lang angelegt werden.*

Lösung A14

Wegen der zusätzlichen Einzahlung am Ende des dritten Jahres, muss die Zinseszinsformel für variablen Zinssatz erweitert werden.

a) Sei z die Zuzahlung am Ende des dritten Jahres, dann gilt:

$K_n = (K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + z) \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6$

$50000 = (K_0 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}055 \cdot 1{,}06 + 23201{,}91) \cdot 1{,}065 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}075$

$50000 = (K_0 \cdot 1{,}17425 + 23201{,}91) \cdot 1{,}22502 \qquad | \quad :1{,}22502$

$40815{,}66 = 1{,}17425 \cdot K_0 + 23201{,}91 \qquad | \quad -23201{,}91$

$17613{,}75 = 1{,}17425 \cdot K_0 \qquad | \quad :1{,}17425$

$K_0 = 15000$

Der Sparer hat ursprünglich 15 000 € *angelegt.*

b) Zinsen im 5. Sparjahr:

$Z_5 = K_5 - K_4$

$K_4 = (15000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}055 \cdot 1{,}06 + 23201{,}91) \cdot 1{,}065 = 43468{,}12$

$K_5 = K_4 \cdot q_5 = 43468{,}12 \cdot 1{,}07 = 46510{,}89$

$Z_5 = 46510{,}89 - 43468{,}12 = 3042{,}77$

Im fünften Jahr wurden $3\,042{,}77$ € *Zinsen gutgechrieben.*

Aufgabe A1

Ein Kapital K_0 wird n Jahre zu einem festen Zinssatz von $p\,\%$ angelegt. Welcher Betrag befindet sich am Ende der Zeit auf dem Konto, wenn weder Ein- noch Auszahlungen vorgenommen werden?

a) $K_0 = 2\,000$ €; $p\,\% = 5\,\%$; $n = 5$
b) $K_0 = 1\,200$ €; $p\,\% = 3\,\%$; $n = 9$
c) $K_0 = 1\,150$ €; $p\,\% = 7\,\%$; $n = 9$
d) $K_0 = 3\,000$ €; $p\,\% = 4{,}5\,\%$; $n = 12$
e) $K_0 = 1\,650$ €; $p\,\% = 3{,}5\,\%$; $n = 4$
f) $K_0 = 4\,950$ €; $p\,\% = 1{,}5\,\%$; $n = 9$
g) $K_0 = 2\,600$ €; $p\,\% = 2\,\%$; $n = 7$
h) $K_0 = 1\,945$ €; $p\,\% = 3{,}7\,\%$; $n = 6$
i) $K_0 = 4\,560$ €; $p\,\% = 1{,}9\,\%$; $n = 3$
j) $K_0 = 2\,340$ €; $p\,\% = 4{,}6\,\%$; $n = 8$

Aufgabe A2

Eine Bank bietet einen Zinssatz von $2{,}7\,\%$ an. Wie hoch war das Startkapital K_0 der Kunden, wenn jeder Kunde sein Geld für 5 Jahre angelegt hat?

a) $K_5 = 5\,255{,}45$ €
b) $K_5 = 422{,}72$ €
c) $K_5 = 1\,432{,}68$ €
d) $K_5 = 2\,673{,}43$ €
e) $K_5 = 8\,682{,}92$ €
f) $K_5 = 12\,087{,}40$ €
g) $K_5 = 7\,508{,}44$ €
h) $K_5 = 5\,341{,}14$ €
i) $K_5 = 498{,}13$ €

Aufgabe A3

Übertrage die Tabelle in dein Heft und trage die fehlenden Werte ein.

	K_0 in €	p in %	n in Jahren	K_n in €
a)	8 760	7,5	9	
b)	6 120		8	7 170,56
c)	520	3,5		661,59
d)		2,7	22	8 302,17
e)	7 635	4,1		11 878,65
f)		6,9	4	163,24
g)	542	5,4	15	

Aufgabe A4

Alina legt $2\,400$ € für 5 Jahre zu $3{,}2\,\%$ an. Dann stuft ihre Bank die Zinsen auf $4{,}0\,\%$ hoch und Alina lässt den Betrag weitere 5 Jahre auf der Bank. Welcher Betrag befindet sich nach den 10 Jahren auf dem Konto?

Aufgabe A5

Wie lautet der Endbetrag der folgenden Geldanlagen?

a) $1\,000$ € werden bei $2\,\%$ für 3 Jahre angelegt;
b) $2\,500$ € werden bei $2{,}5\,\%$ für 5 Jahre angelegt;
c) $3\,000$ € werden bei $3{,}0\,\%$ für 4 Jahre angelegt.

Aufgabe A6

Ein Kapital von $2\,000$ € wurde vor 4 Jahren angelegt und ist mittlerweile auf $2\,602{,}05$ € angewachsen. Zu welchem Zinssatz wurde es angelegt?

Aufgabe A7
Nach 5 Jahren beträgt ein erspartes Vermögen $24\,000$ €. Dabei wurde von der Bank ein Zinssatz von $3{,}45\,\%$ p.a. gewährt. Nun wird das ersparte Vermögen in Höhe von $24\,000$ € zwei weitere Jahre zu einem Zinssatz von $2\,\%$ p.a. auf dem Konto ruhen gelassen.
Berechne die Zinsen, die im gesamten Zeitraum gutgeschrieben wurden.

Aufgabe A8
Welches Angebot der Banken ist besser, wenn $2\,000$ € ausgezahlt werden sollen?
Bank A: 2 Jahre: $2{,}5\,\%$ p.a., dann 2 Jahre: $2{,}0\,\%$ p.a.
Bank B: 2 Jahre: $2{,}25\,\%$ p.a., dann 2 Jahre: $2{,}75\,\%$ p.a.

Aufgabe A9
Wie lautet der Endbetrag der folgenden Geldanlagen?
a) $34\,500$ € werden bei $3{,}2\,\%$ für 8 Jahre angelegt;
b) $50\,000$ € werden bei $1{,}7\,\%$ für 6 Jahre angelegt;
c) $21\,800$ € werden bei $2{,}9\,\%$ für 9 Jahre angelegt.

Aufgabe A10
Ein Kapital von $136\,800$ € wurde vor 12 Jahren angelegt und ist mittlerweile auf $199\,637{,}66$ € angewachsen. Zu welchem Zinssatz wurde es angelegt?

Aufgabe A11
Wie lautet der Endbetrag, wenn $123\,400$ € für 6 Jahre zu folgenden Zinssätzen angelegt wurden?

a) $3{,}1\,\%$	b) $5{,}3\,\%$	c) $1{,}6\,\%$
d) $0{,}4\,\%$	e) $8{,}0\,\%$	f) $3{,}7\,\%$

Lösung A1

Lösungsformel: $K_n = K_0 \cdot q^n$

a) $K_5 = 2000 \cdot 1{,}05^5 = 2552{,}69$ €
b) $K_9 = 1200 \cdot 1{,}03^9 = 1565{,}73$ €
c) $K_5 = 1150 \cdot 1{,}07^9 = 2114{,}23$ €
d) $K_9 = 3000 \cdot 1{,}045^{12} = 5087{,}64$ €
e) $K_5 = 1650 \cdot 1{,}035^4 = 1893{,}41$ €
f) $K_9 = 4950 \cdot 1{,}015^9 = 5659{,}78$ €
g) $K_5 = 2600 \cdot 1{,}02^7 = 2986{,}58$ €
h) $K_9 = 1945 \cdot 1{,}037^6 = 2418{,}76$ €
i) $K_5 = 4560 \cdot 1{,}019^3 = 4824{,}89$ €
j) $K_9 = 2340 \cdot 1{,}046^8 = 3353{,}28$ €

Lösung A2

Lösungsformel: $K_5 = K_0 \cdot q^5$

a) $5\,255{,}45 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 4\,600$ €
b) $422{,}72 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 379$ €
c) $1\,432{,}68 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 1\,254$ €
d) $2\,673{,}43 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 2\,340$ €
e) $8\,682{,}92 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 7\,600$ €
f) $12\,087{,}40 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 10\,579{,}88$ €
g) $7\,508{,}44 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 6\,572$ €
h) $5\,341{,}14 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 4\,675$ €
i) $498{,}13 \text{ €} = K_0 \cdot 1{,}027^5$
$K_0 = 436$ €

Lösung A3

	K_0 in €	p in %	n in Jahren	K_n in €
a)	8 760	7,5	9	**16 795,01**
b)	6 120	**2,0**	8	7 170,56
c)	520	3,5	**7**	661,59
d)	**4 617**	2,7	22	8 302,17
e)	7 635	4,1	**11**	11 878,65
f)	**125**	6,9	4	163,24
g)	542	5,4	15	**1 192,91**

Lösung A4

Lösungsformel: $K_{10} = K_0 \cdot q_1^5 \cdot q_2^5$
$K_{10} = 2400 \cdot 1{,}032^5 \cdot 1{,}04^5 = 3418{,}03$
Nach 10 *Jahren befinden sich* 3 418,03 € *auf dem Konto.*

Lösung A5

Lösungsformel: $K_n = K_0 \cdot q^n$

a) $K_3 = 1000 \cdot 1{,}02^3 = 1\,061{,}20$ €
b) $K_3 = 2500 \cdot 1{,}025^5 = 2\,828{,}52$ €
c) $K_3 = 3000 \cdot 1{,}03^4 = 3\,376{,}53$ €

Lösung A6

Lösungsformel: $K_4 = K_0 \cdot q^4$
$2602{,}05 = 2000 \cdot q^4 \quad | \; :2000$
$q^4 = 1{,}301025 \quad | \; \sqrt[4]{}$
$q = 1{,}068$
$p\,\% = (1{,}068 - 1) \cdot 100 = 6{,}8\,\%$
Das Geld wurde mit 6,8 % *angelegt.*

Lösung A7

Erster Schritt: Berechnung des Anfangskapitals über $K_n = K_0 \cdot q^n$

$24000 = K_0 \cdot 1{,}0345^5 \quad | \quad :1{,}0345^5$

$K_0 = 20256{,}24$

Zinsen in den ersten 5 Jahren:

$Z_{1-5} = K_5 - K_0 = 24000 - 20256{,}24 = 3743{,}76$

Zweiter Schritt: Endkapital aus $24\,000$ € nach weiteren 2 Jahren mit 2 %:

$K_7 = K_5 \cdot q^2 = 24000 \cdot 1{,}02^2 = 24969{,}60$

Zinsen für das 6. und 7. Jahr:

$Z_{6-7} = K_7 - K_5 = 24969{,}60 - 24000 = 969{,}60$

Dritter Schritt: Berechnung der Gesamtzinsen:

$Z_{ges} = Z_{1-5} + Z_{6-7} = 3743{,}76 + 969{,}60 = 4713{,}36$

Es wurden insgesamt $4\,713{,}36$ € *Zinsen verdient.*

Lösung A8

Gesucht wird das geringste Anfangskapital, welches zu einem Endkapital von $2\,000$ € führt.

Bank A:

$2000 = K_0 \cdot 1{,}025^2 \cdot 1{,}02^2 \quad | \quad :(1{,}025^2 \cdot 1{,}02^2)$

$K_0 = 1829{,}71$

Bank B:

$2000 = K_0 \cdot 1{,}0225^2 \cdot 1{,}0275^2 \quad | \quad :(1{,}0225^2 \cdot 1{,}0275^2)$

$K_0 = 1811{,}92$

Das Angebot von Bank B ist günstiger, da ein geringeres Anfangskapital eingesetzt werden muss.

Lösung A9

Lösungsformel: $K_n = K_0 \cdot q^n$

a) $K_8 = 34500 \cdot 1{,}032^8 = 44387{,}09$ €   b) $K_6 = 50000 \cdot 1{,}017^6 = 55321{,}73$ €

c) $K_9 = 21800 \cdot 1{,}029^9 = 28196{,}48$ €

Lösung A10

Lösungsformel: $K_{12} = K_0 \cdot q^{12}$

$199637{,}66 = 136800 \cdot q^{12} \quad | \quad :136800$

$q^{12} = 1{,}45933962 \quad | \quad \sqrt[12]{}$

$q = 1{,}032$

$p\,\% = (1{,}032 - 1) \cdot 100 = 3{,}2\,\%$

Das Geld wurde mit $3{,}2$ % *angelegt.*

Lösung A11

Lösungsformel: $K_6 = K_0 \cdot q^6$

a) $K_6 = 123400 \cdot 1{,}031^6 = 148206{,}47$ €   b) $K_6 = 123400 \cdot 1{,}053^6 = 168223{,}00$ €

c) $K_6 = 123400 \cdot 1{,}016^6 = 135730{,}40$ €   d) $K_6 = 123400 \cdot 1{,}004^6 = 126391{,}37$ €

e) $K_6 = 123400 \cdot 1{,}08^6 = 195820{,}29$ €   f) $K_6 = 123400 \cdot 1{,}037^6 = 153457{,}35$ €

Aufgabe A1

Herr Maier kaufte 1950 ein Auto für $2\,700\,DM$. Da er nicht viel fuhr und das Auto auch sonst hegte und pflegte, konnte er es im Jahre 2010 als Oldtimer Wagen an einen Liebhaber zu $50\,000\,€$ verkaufen. Mit welchem Zins hat sich der Wertzuwachs entwickelt?
Verwende den Umrechnungsfaktor $1{,}95583$ für die Umrechnung von DM nach $€$.

Aufgabe A2

Ein Auto kostet $70\,450\,€$. Es verliert jedes Jahr $20\,\%$ seines aktuellen Wertes (degressive Abschreibung). Welchen Wert besitzt das Auto nach 5 Jahen?

Aufgabe A3

Eine Person legt $3\,430\,€$ zu $6{,}5\,\%$ Zinsen an, Zinsen werden mitverzinst.

a) Welches Guthaben besitzt er nach fünf Jahren, wenn sie zu Beginn des dritten Jahres eine Sonderzahlung von $1\,200\,€$ leistet?
b) Welche Sonderzahlung hätte sie nach zwei Jahren leisten müssen, um nach fünf Jahren $7\,000\,€$ zu erhalten?
c) Wie viel volle Jahre müsste der Endbetrag von b) noch liegen, bis $9\,000\,€$ erreicht wären?

Aufgabe A4

Ein Kapital von $15\,670\,€$ wird mit $3{,}5\,\%$ verzinst, Zinses werden mitverzinst. Das Kapital ist dadurch auf $19\,262{,}40\,€$ angewachsen.
Wie viele Jahre wurde das Kapital verzinst?

Aufgabe A5

Eine Lottospielerin bringt ihren Lottogewinn zur Bank. Ihre $10\,520\,€$ werden jährlich mit $5{,}5\,\%$ verzinst. Zinsen werden mitverzinst.

a) Auf welchen Betrag würde ihr Gewinn in sechs Jahren anwachsen?
b) Wie lange müsste sie vom Zeitpunkt des Lottogewinns an warten, bis ihr Guthaben auf $20\,000\,€$ angewachsen wäre?
c) Sie versucht, schneller Gewinn zu machen und setzt ihren Lottogewinn an der Börse ein. Doch ihre Aktien fallen. Ihr Kapital vermindert sich in zwei Jahren um $2\,500\,€$.
Wie viel Prozent betrug die jährliche Wertminderung?

Aufgabe A6

Ein anderer Lottospieler gewann $16\,380\,€$, die er auf ein Sparkonto einzahlte und für acht Jahre festlegte. Während dieser Zeit wuchs sein Gewinn durch Zinseszins um $13\,200\,€$ an.

a) Welcher jährliche Zinssatz wurde von der Bank gewährt?
b) Welchen Betrag hätte der Lottospieler nach vier Jahren zusätzlich einzahlen müssen, damit er nach acht Jahren über $35\,000$ € verfügen konnte?
c) In welcher Zeit wäre sein Lottogewinn bei 5 Prozent Zinseszins um 50 Prozent gewachsen?

Aufgabe A7

Ein Sparer legt $15\,000$ € für drei Jahre auf $5{,}5$ Prozent Zinseszins fest. Nach Ablauf der drei Jahre bietet ihm die Bank einen Zinssatz von $6{,}25\,\%$ für weitere drei Jahre. Der Sparer nimmt das Angebot an und stockt gleichzeitig sein angespartes Guthaben um $7\,386{,}38$ € auf.

a) Welches Endkapital steht dem Sparer nach den sechs Jahren zur Verfügung?
b) Wie viele Zinsen hat er in den sechs Jahren insgesamt bekommen?
c) Welcher Verzinsung entspräche es, wenn er vor sechs Jahren beide Beträge eingezahlt hätte und dafür zusammen $5\,000$ € an Zinseszins erhalten hätte?

Aufgabe A8

Großeltern schenken ihrem Enkel zur Geburt ein Sparbuch über $6\,000$ €. Das Geld wird mit $6{,}25\,\%$ Zinseszins angelegt. Zur Vollendung des $11.$ Lebensjahres erhöhen sie das angesparte Kapital auf $15\,000$ €.

a) Welchen Betrag müssen die Großeltern zum $11.$ Geburtstag ihres Enkels zuzahlen?
b) Zu welchem Zinssatz ist das Geld ($15\,000$ €) nach dem $11.$ Geburtstag angelegt, wenn der Enkel an seinem $21.$ Geburtstag $25\,625$ € zur Verfügung hat?
c) In welchem Jahr überschreitet das Kapital $20\,000$ €, wenn es nach dem $11.$ Geburtstag zu $6{,}75\,\%$ Zinseszins angelegt wird?

Aufgabe A9

Ein Vater möchte die spätere Ausbildung seines Sohnes finanziell absichern.

a) Welchen Betrag muss er anlässlich der Geburt des Sohnes anlegen, damit seinem Sohn bei einem jährlichen Zinssatz von $8{,}5\,\%$ zum $18.$ Geburtstag $20\,000$ € zur Verfügung stehen?
b) Ein anderes Geldinstitut bietet dem Vater an, bei einer Einzahlung von $4\,450$ € nach achtzehn Jahren $20\,000$ € auszuzahlen. Mit welchem Zinssatz (Zinseszins) rechnet dieses Institut?
c) Welcher Betrag würde dem Sohn nach achtzehn Jahren zur Verfügung stehen, wenn der Vater bei einem Zinssatz von $8{,}5\,\%$ Zinseszins folgende Einzahlungen vornehmen würde:

heute:	$2\,000$ €
in 4 Jahren:	$2\,000$ €
in 8 Jahren:	$2\,000$ €
in 12 Jahren:	$2\,000$ €

Lösung A1

Umrechnung des Kaufpreises von $2\,700\ DM$ in €:

$K_€ = \frac{K_{DM}}{1{,}95583} = \frac{2700}{1{,}95583} = 1380{,}49\ €$

$K_€ = K_0 = 1380{,}49;\quad n = 60\ J;\quad K_{60} = 50000$

$K_{60} = K_0 \cdot q^{60}$

$50000 = 1380{,}49 \cdot q^{60} \quad | \quad :1380{,}49$

$q^{60} = 36{,}22 \quad | \quad \sqrt[60]{\ }$

$q = 1{,}0616$

$p\% = (q-1)\cdot 100 = (1{,}0616 - 1)\cdot 100 = 6{,}16\ \%$

Der jährliche Wertzuwachs des Oldtimers lag bei $6{,}16\ \%$.

Lösung A2

Hinweis: Die Zinseszinsrechnung berechnet uns nicht den Betrag der Zunahme bzw. des Wertverlustes (Abnahme) eines Wirtschaftsgutes, sondern vielmehr den echten Wert. Wenn ein Auto also $20\ \%$ seines Wertes verliert, dann ist es noch $80\ \%$ Prozent wert.

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_5 = 70450 \cdot 0{,}8^5 = 23085{,}06$

Nach 5 *Jahren besitzt das Auto noch einen Wert von* $23\,085{,}06\ €$.

Lösung A3

Wegen der Zuzahlungen muss die Zinseszinsformel erweitert werden. Der Betrag der Zuzahlung sei z.

a) $K_5 = (K_0 \cdot q^2 + z)\cdot q^3$

$K_5 = (3430 \cdot 1{,}065^2 + 1200)\cdot 1{,}065^3 = 6148{,}94$

Nach 5 Jahre verfügt die Person über $6\,148{,}94\ €$.

b) $K_5 = (K_0 \cdot q^2 + z)\cdot q^3$

$7000 = (3430 \cdot 1{,}065^2 + z)\cdot 1{,}065^3 \quad | \quad :1{,}065^3$

$5794{,}94 = 3890{,}39 + z \quad | \quad -3890{,}39$

$z = 1904{,}55$

Die Person hätte eine Sonderzahlung über $1\,904{,}55\ €$ *leisten müssen.*

c) $K_n = K_b \cdot q^n$

$9000 = 7000 \cdot 1{,}065^n \quad | \quad :7000$

$\frac{9}{7} = 1{,}065^n \quad | \quad log$

$log\left(\frac{9}{7}\right) = n \cdot log(1{,}065) \quad | \quad :log(1{,}065)$

$n = \frac{log\left(\frac{9}{7}\right)}{log(1{,}065)} = 3{,}99$

Das Endkapital von b) hätte noch ganze 4 *Jahre liegen müssen.*

Lösung A4

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$19262{,}40 = 15670 \cdot 1{,}035^n \quad | \quad :15670$

$1{,}229325335 = 1{,}035^n \quad | \quad log$

$log(1{,}229325335) = n \cdot log(1{,}035) \quad | \quad :log(1{,}035)$

$n = \frac{log(1{,}229325335)}{log(1{,}035)} = 5{,}9999$

Das Kapital wurde 5 *Jahre lang angelegt.*

Lösung A5

a) $K_6 = K_0 \cdot q^6$

$K_6 = 10520 \cdot 1{,}055^6 = 14505{,}43$

Nach 6 Jahren wäre das Kapital auf 14 505,43 € angewachsen.

b) $20000 = 10520 \cdot 1{,}055^n \quad | \quad :10520$

$1{,}901140684 = 1{,}055^n \quad | \quad log$

$log(1{,}901140684) = n \cdot log(1{,}055) \quad | \quad :log(1{,}055)$

$n = \frac{log(1{,}901140684)}{log(1{,}055)} = 11{,}9999$

Das Kapital müsste 12 Jahre lang angelegt werden.

c) Exponentielle Abnahme

$K_2 = K_0 \cdot q^2$

$K_2 = 10520 - 2500 = 8020$

$8020 = 10520 \cdot q^2 \quad | \quad :10520$

$q^2 = 0{,}762357414 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$q = 0{,}8731$

$p\,\% = (1 - 0{,}8731) \cdot 100 = 12{,}67\,\%$

Der jährliche Verlust lag bei 12,67 %.

Lösung A6

Hinweise: Es ist der Text „wächst der Gewinn 13 200 € an" zu beachten. Die sind kein Endkapital, sondern die Zinsen, die der Lottospieler in den 8 Jahren verdient hat.
Wegen der Zuzahlung in Aufgabenteil b) muss die Zinseszinsformel erweitert werden. Der Betrag der Zuzahlung sei z.

a) $K_8 = K_0 \cdot q^8$

$K_8 = K_0 + Z_8 = 16380 + 13200 = 29580$

$29580 = 16380 \cdot q^8 \quad | \quad :16380$

$q^8 = 1{,}805860806 \quad | \quad \sqrt[8]{\ }$

$q = 1{,}0767$

$p\,\% = (1{,}07671 - 1) \cdot 100 = 7{,}67\,\%$

Die Bank gewährte einen Zins von 7,67 %.

b) $K_8 = (K_0 \cdot q^4 + z) \cdot q^4$

$35000 = (16380 \cdot 1{,}0767^4 + z) \cdot 1{,}0767^4 \quad | \quad :1{,}0767^4$

$26042{,}89 = 22013{,}69 + z \quad | \quad -22013{,}69$

$z = 4029{,}20$

Der Lottospieler hätte nach Ablauf der ersten 4 Jahre noch 4 029,20 € einzahlen müssen.

c) $K_n = K_0 \cdot 1{,}5 = 16380 \cdot 1{,}5 = 24570$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$24570 = 16380 \cdot 1{,}05^n \quad | \quad :16380$

$1{,}5 = 1{,}05^n \quad | \quad log$

$log(1{,}5) = n \cdot log(1{,}05) \quad | \quad :log(1{,}05)$

$n = \frac{log(1{,}5)}{log(1{,}05)} = 8{,}31$

Der Lottogewinn wäre bei 5 % Zinsen in 8,3 Jahren um 50 % gewachsen.

Lösung A7

Hinweise: Wegen der Aufteilung in 3 Jahre und 3 Jahre muss in zwei Abschnitten gerechnet werden.

a) $K_3 = K_0 \cdot q^3 = 15000 \cdot 1{,}055^3 = 17613{,}62$

$K_6 = (K_3 + 7386{,}38)q^3 = (17613{,}62 + 7386{,}38) \cdot 1{,}055^3 = 25000 \cdot 1{,}055^3 = 29356{,}03$

Nach 6 Jahren stehen dem Sparer 29 856,03 € zur Verfügung.

b) $Z_{ges} = Z_{1-3} + Z_{4-6}$

$Z_{1-3} = K_3 - K_0 = 17613{,}62 - 15000 = 2613{,}62$

$Z_{4-6} = K_6 - (K_3 + 7386{,}38) = 29356{,}03 - 25000 = 4356{,}03$

$Z_{ges} = 2613{,}62 + 4356{,}03 = 6989{,}65$

Der Sparer hat insgesamt 6 989,65 € Zinsen erhalten.

c) $K_0 = 15000 + 7386{,}38 = 22386{,}38$

$K_6 = K_0 + 5000 = 27386{,}38$

$27386{,}38 = 22386{,}38 \cdot q^6 \quad | \quad :22386{,}38$

$q^6 = 1{,}223350091 \quad | \quad \sqrt[6]{}$

$q = 1{,}034$

$p\,\% = (1{,}034 - 1) \cdot 100 = 3{,}4\,\%$

Der Zinssatz wäre 3,4 % gewesen.

Lösung A8

a) $K_{11} = K_0 \cdot q^{11} = 6000 \cdot 1{,}0625^{11} = 11688{,}79$

Aufstockung auf 15 000 €:

$A = 15000 - K_{11} = 15000 - 11688{,}79 = 3311{,}21$

Die Großeltern müssen 3 311,21 € zuzahlen, um das angesparte Kapital auf 15 000 € zu erhöhen.

b) $K_{21} = K_{11} \cdot q^{10}$

$25625 = 15000 \cdot q^{10} \quad | \quad :15000$

$q^{10} = 1{,}708333333 \quad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}055$

$p\,\% = (1{,}055 - 1) \cdot 100 = 5{,}5\,\%$

Das Geld wurde mit 5,5 % verzinst.

c) $K_n = K_{11} \cdot q^n$

$20000 = 15000 \cdot 1{,}0675^n \quad | \quad :15000$

$\frac{4}{3} = 1{,}0675^n \quad | \quad log$

$log\left(\frac{4}{3}\right) = n \cdot log(1{,}0675) \quad | \quad :log(1{,}0675)$

$n = \frac{log\left(\frac{4}{3}\right)}{log(1{,}0675)} = 4{,}40$

Im 5. Jahr nach dem 11. Geburtstag übersteigt das Kapital einen Betrag von 20 000 €

Lösung A9

a) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$20000 = K_0 \cdot 1{,}085^{18} \quad | \quad :1{,}085^{18}$

$K_0 = 8845{,}71$

Der Vater muss 8 845,71 € anlegen.

b) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$20000 = 4450 \cdot q^{18} \quad | \quad :4450$

$q^{18} = 4{,}494382 \quad | \quad \sqrt[18]{\;}$

$q = 1{,}0871$

$p\,\% = (1{,}08714 - 1) \cdot 100 = 8{,}71\,\%$

Das Bankinstitut biete $8{,}71\,\%$*.*

c) Gestaffelte Einzahlungen:

Die Einzahlungen seien $E_1;\ E_2;\ E_3$ und E_4, dann gilt

$K_{18} = E_1 \cdot q^{18} + E_2 \cdot q^{14} + E_3 \cdot q^{10} + E_4 \cdot q^6$

$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 2000$

$K_{18} = 2000 \cdot (q^{18} + q^{14} + q^{10} + q^6) = 200 \cdot (1{,}085^{18} + 1{,}085^{14} + 1{,}085^{10} + 1{,}085^6)$

$K_{18} = 22736{,}62$

Dem Sohn stünden $22\,736{,}62\,€$ *zur Verfügung.*

Aufgabe A1
Familie Meier legt $15\,000\,€$ zu folgenden Zinssätzen an:
1. Jahr: $2{,}8\,\%$
2. Jahr: $3{,}2\,\%$
3. Jahr: $3{,}6\,\%$

a) Auf welchen Betrag ist das Kapital nach 3 Jahren angewachsen?
b) Berechne die Zinsbeträge in den einzelnen Jahren.
c) Auf wie viel Euro wäre das Endkapital bei gleich bleibendem Zinssatz von $3{,}2\,\%$ in den 3 Jahren angewachsen?

Aufgabe A2
Frau Dupfelmoser legt bei ihrer Bank Geld an. Im $1.$ Jahr wird es mit $3\,\%$, im $2.$ Jahr mit $4\,\%$ verzinst.
Nach zwei Jahren ist ihr Guthaben auf $4\,284{,}40\,€$ angewachsen.

a) Wie hoch war der Geldbetrag, den Frau Dupfelmoser angelegt hat?
b) Wie viel Zinsen sind angefallen? Wie viel Prozent Zinsen sind es im $2.$ Jahr mehr als im Vorjahr?
c) Warum kann man nicht bei beiden Jahren mit $3{,}5\,\%$ als Zinssatz rechnen?

Aufgabe A3
Ein Anfangsguthaben von $12\,000\,€$ ist nach 3 Jahren auf $13\,498{,}06\,€$ angewachsen.
Zinssatz im 1. Jahr: $3{,}5\,\%$
Zinssatz im 2. Jahr: $4{,}0\,\%$

a) Wie hoch war der Zinssatz im 3. Jahr?
b) Wie viel Zinsen wurden jeweils am Jahresende gutgeschrieben?

Aufgabe A4
Bundesschatzbriefe sind Wertpapiere mit jährlich wachsenden Zinssätzen nach festem Plan. Bei Typ B beträgt die Laufzeit längstens 7 Jahre. Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst.
Verwende für die folgenden Teilaufgaben Dier Prozentsätze aus der Grafik für Rendite Typ A bzw. B.

Laufzeiten	Zinssatz	Rendite Typ A	Rendite Typ B
1 Jahr	2,25%	2,25%	2,25%
2 Jahre	2,50%	2,37%	2,37%
3 Jahre	3,00%	2,58%	2,58%
4 Jahre	3,25%	2,74%	2,75%
5 Jahre	3,50%	2,88%	2,90%
6 Jahre	4,00%	3,05%	3,08%
7 Jahre	4,00%	–	3,21%

a) Auf welchen Betrag wächst ein Anfangsguthaben von $2\,000\,€$ nach Ablauf von 7 Jahren an?
b) Welcher Geldbetrag wurde angelegt, wenn nach 7 Jahren ein Betrag von $7\,742{,}38\,€$ angespart wurde?
c) Mit welchem gleichbleibenden Zinssatz hätte man denselben Betrag angespart?
d) Bei Typ A beträgt die Laufzeit längstens 6 Jahre. Die Zinsen werden jährlich ausbezahlt. Vergleiche die Ergebnisse von Typ A und Typ B nach 6 Jahren, wenn jeweils $3\,000\,€$ angelegt wurden.

Aufgabe A5

Prüfe das Angebot an einem Beispiel. Was wäre, wenn die Reihenfolge der Zinssätze genau umgekehrt wäre? Antworte, bevor du am Beispiel prüfst.

Immer mehr Zinsen!
1. Jahr: $3\,\%$ Zinsen
1. Jahr: $4\,\%$ Zinsen
1. Jahr: $5\,\%$ Zinsen

Aufgabe A6

Ein Anfangskapital von $20\,000$ € wird im $1.$ Jahr mit $3{,}75\,\%$ verzinst. Am Ende des $2.$ Jahres werden $871{,}50$ € gutgeschrieben. Nach 3 Jahren ist das Anfangskapital auf $22\,659{,}33$ € angewachsen.

a) Berechne des Zinssatz des $2.$ und des $3.$ Jahres.

b) Um wieviel Prozent hat das Kapital insgesamt zugenommen?

c) Mit welchem jährlich gleich bleibenden Zinssatz hätte das Anfangskapital verzinst werden müssen, um nach 3 Jahren ebenso auf $22\,659{,}33$ € anzuwachsen?

Aufgabe A7

Herr Mustermann hat Geld angelegt. Nach 3 Jahren erhält er für ein Guthaben von $5\,000$ € Zinsen in Höhe von $629{,}64$ €. Der Zinssatz im $3.$ Jahr beträgt $4{,}5\,\%$. Die Zinssätze im $1.$ und $2.$ Jahr sind gleich.

a) Wie hoch ist der Zinssatz im $1.$ Jahr?

b) Wie viele Zinsen wurden im $2.$ Jahr gutgeschrieben?

Aufgabe A8

Martha möchte $2\,400$ € anlegen. Sie prüft die Angebote von zwei Banken.

Gutbank
Laufzeit: 3 Jahre
gleichbleibender Zinssatz
$\mathbf{4{,}0}\,\%$

Nordbank
1. Jahr: $3{,}5\,\%$ Zinsen
2. Jahr: $4{,}0\,\%$ Zinsen
3. Jahr: $4{,}5\,\%$ Zinsen
Laufzeit: 3 Jahre

Auf den ersten Blick hält Martha beide Angebote für gleich gut. Stimmt ihr Eindruck?

Lösung A1

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$

a) $K_3 = 15000 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}032 \cdot 1{,}036 = 16486{,}32$
Das Kapital nach 3 *Jahren beträgt* 16 486,32 €.

b) $Z_1 = K_1 - K_0;\;\; Z_2 = K_2 - K_1;\;\; Z_3 = K_3 - K_2$
$K_1 = 15000 \cdot 1{,}028 = 15420{,}00$
$K_2 = 15000 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}032 = 15913{,}44$
$K_3 = 106486{,}32$
$Z_1 = 15420 - 15000 = 420{,}00$
$Z_2 = 15913{,}44 - 15420{,}00 = 493{,}44$
$Z_3 = 16486{,}32 - 15913{,}44 = 572{,}88$
Die Zinsen betrugen:
Im 1. Jahr 420,00 €, *im 2. Jahr* 493,44 € *und im 3. Jahr* 572,88 €.

c) $K_n = K_0 \cdot q^n$
$K_3 = 15000 \cdot 1{,}032^3 = 16486{,}57$
Bei gleichbleibendem Zinssatz wäre das Kapital auf 16 486,57 € *angestiegen.*

Lösung A2

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$

a) $K_2 = K_0 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 = 4284{,}40$
$4284{,}40 = K_0 \cdot 1{,}0712 \quad | \quad :1{,}0712$
$K_0 = 3999{,}63$
Das ursprünglich angelegte Kapital betrug 3 999,63 €.

b) $Z_{ges} = K_2 - K_0 = 4284{,}40 - 3999{,}63 = 284{,}77$
Es sind insgesamt 284,77 € *Zinsen angefallen.*
$Z_1 = K_1 - K_0;\;\; Z_2 = Z_{ges} - Z_1$
$Z_1 = 3999{,}63 \cdot 1{,}03 - 3999{,}63 = 4119{,}62 - 3999{,}63 = 119{,}99$
$Z_2 = 284{,}77 - 119{,}99 = 164{,}78$
$q_{1,2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{164{,}78}{119{,}99} = 1{,}3733$
$p_{1,2}\,\% = (1{,}3733 - 1) \cdot 100 \approx 37{,}3\,\%$
Im zweiten Jahr sind es 37,3 % *mehr Zinsen als im ersten Jahr.*

c) Beide Jahre mit 3,5 %:
$K_2 = K_0 \cdot 1{,}035^2$
Beide Jahre mit je 3,0 % im ersten und 4,0 % im zweiten Jahr:
$K_2 = K_0 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04$
Wegen $1{,}035^2 = 1{,}071225$ *nicht gleich* $1{,}03 \cdot 1{,}04 = 1{,}0712$ *kann man nicht in beiden Jahren mit* 3,5 % *Zinsen rechnen.*

Lösung A3

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n;\;\; K_0 = 12\,000\,€;\;\; K_3 = 13\,498{,}06\,€$

a) $K_3 = K_0 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot q_3$
$13498{,}06 = 12000 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot q_3$
$13498{,}06 = 12916{,}80 \cdot q_3 \quad | \quad 12916{,}80$
$q_3 = 1{,}045$
$p_3\,\% = (1{,}045 - 1) \cdot 100 = 4{,}5\,\%$
Im 3. *Jahr wurden* 4,5 % *Zinsen gewährt.*

b) $Z_1 = K_1 - K_0$; $Z_2 = K_2 - K_1$; $Z_3 = K_3 - K_2$
$K_1 = 12000 \cdot 1{,}035 = 12420{,}00$
$K_2 = 12000 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 = 12916{,}80$
$K_3 = 13\,498{,}06$ € | gegeben
$Z_1 = K_1 - K_0 = 12420{,}00 - 12000 = 420$
$Z_2 = K_2 - K_1 = 12916{,}80 - 12420{,}00 = 496{,}80$
$Z_3 = K_3 - K_2 = 13498{,}06 - 12916{,}80 = 591{,}26$
Am Ende des ersten Jahres wurden 420 €, des zweiten Jahres 496,80 € und des dritten Jahres 591,26 € Zinsen gutgeschrieben.

Lösung A4

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$ für Typ B,
$K_n = K_0 + K_0 \cdot \left(\frac{p_1\,\%}{100} + \frac{p_2\,\%}{100} + \frac{p_3\,\%}{100} + \frac{p_4\,\%}{100} + \frac{p_5\,\%}{100} + \frac{p_6\,\%}{100}\right)$ für Typ A.

a) $K_7 = 2000 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}0237 \cdot 1{,}0258 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}029 \cdot 1{,}0308 \cdot 1{,}0321$
$K_7 = 2415{,}58$
Nach 7 beträgt das Kapital 2 415,58 €.

b) $7742{,}38 = K_0 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}0237 \cdot 1{,}0258 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}029 \cdot 1{,}0308 \cdot 1{,}0321$
$7742{,}38 = 1{,}207791887 \cdot K_0$ | $:1{,}207791887$
$K_0 = 6410{,}36$
Vor 7 Jahren wurden 6 410,36 € angelegt.

c) $K_7 = K_0 \cdot q^7$
$7742{,}38 = 6410{,}36 \cdot q^7$ | $:6410{,}36$
$1{,}207791762 = q^7$ | $\sqrt[7]{}$
$q = 1{,}0273$
$p\,\% = (1{,}0273 - 1) \cdot 100 = 2{,}73\,\%$
Mit etwa 2,75 % festem Zinssatz hätte man das gleiche Ergebnis erzielt.

d) Typ A:
$K_6 = 3000 + 3000 \cdot (0{,}025 + 0{,}0237 + 0{,}0258 + 0{,}0274 + 0{,}0288 + 0{,}0305)$
$K_6 = 3000 \cdot 1{,}1612 = 3483{,}60$
$q_{ges_A} = \frac{3483{,}60}{3000} = 1{,}1612$
Typ B:
$K_6 = 3000 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}0237 \cdot 1{,}0258 \cdot 1{,}0275 \cdot 1{,}029 \cdot 1{,}0308$
$K_6 = 3000 \cdot 1{,}170227581 = 3510{,}68$
$q_{ges_B} = \frac{3510{,}68}{3000} = 1{,}1702$
Die Rendite von Typ B ist etwa 1 % besser als die von Typ A.

Lösung A5

Die Reihenfolge der Zinssätze hat keinen Einfluss auf das Endergebnis.
Begründung:

Nach dem Kommutativgesetz gilt:
$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = K_0 \cdot q_3 \cdot q_2 \cdot q_1$

Lösung A6

$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

a) $22659{,}33 = (20000 \cdot 1{,}0375 + 871{,}50) \cdot q_3 = 21621{,}50 \cdot q_3$

$22659{,}33 = 21621{,}50 \cdot q_3 \quad | \quad :21621{,}50$

$q_3 = 1{,}048$

$p_3\,\% = (1{,}048 - 1) \cdot 100 = 4{,}8\,\%$

Der Zinssatz im 3. Jahrbetrug 4,8 %.

$q_2 = \frac{K_2}{K_1}$

$K_1 = 20000 \cdot 1{,}0375 = 20750{,}00$

$K_2 = K_1 + 871{,}50 = 20750{,}00 + 871{,}50 = 21621{,}50$

$q_2 = \frac{21621{,}50}{20750} = 1{,}042$

$p_2\,\% = (1{,}042 - 1) \cdot 100 = 4{,}2\,\%$

Der Zinssatz im 2. Jahrbetrug 4,2 %.

b) $q_{ges} = \frac{K_3}{K_0} = \frac{22659{,}33}{20000} = 1{,}133$

$p_{ges}\,\% = (1{,}133 - 1) \cdot 100 = 13{,}3\,\%$

Das Kapital hat insgesamt 13,3 % zugenommen.

c) $K_3 = K_0 \cdot q^3$

$22659{,}33 = 20000 \cdot q^3 \quad | \quad :20000$

$q^3 = 1{,}1329665 \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}0425$

$p\,\% = (1{,}0425 - 1) \cdot 100 = 4{,}25\,\%$

Der Zinssatz hätte 4,25 % betragen müssen.

Lösung A7

$K_3 = K_0 \cdot q_1^2 \cdot q_3$

a) $K_3 = 5000 + 629{,}64 = 5629{,}64$

$5629{,}64 = 5000 \cdot q_1^2 \cdot 1{,}045$

$5629{,}64 = 5225 \cdot q_1^2 \quad | \quad :5225$

$q_1^2 = 1{,}077443062 \quad | \quad \sqrt[2]{}$

$q_1 = 1{,}038$

$p_1\,\% = (1{,}038 - 1) \cdot 100 = 3{,}8\,\%$

Der Zinssatz im 1. und 2. Jahr betrug 3,8 %.

b) $Z_2 = K_2 - K_1$

$K_1 = 5000 \cdot 1{,}038 = 5190{,}00$

$K_2 = 5000 \cdot 1{,}038^2 = 5387{,}22$

$Z_2 = 5387{,}22 - 5190 = 197{,}22$

Im 2. Jahr wurden 197,22 € gutgeschrieben.

Lösung A8

Gutbank:

$K_3 = K_0 \cdot q^3 = 2400 \cdot 1{,}04^3 = 2699{,}67$

Nordbank:

$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 2400 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 = 2699{,}61$

Das Angebot der Gutbank ist geringfügig besser.

Aufgabe A1

Ein Kapital von $6\,100\,€$ verzinst sich jährlich zu $6\,\%$ und soll so viele Jahre liegen bleiben, bis erstmals $10\,000\,€$ überschritten sind.

a) Nach wie vielen Jahren ist dies der Fall, und wie hoch ist dann das tatsächliche Guthaben?

b) Mit wie viel Prozent muss das Kapital von $6\,100\,€$ verzinst werden, um in neun Jahren auf $12\,000\,€$ anzuwachsen?

Aufgabe A2

Herr Carstensen will sich ein Häuschen kaufen. Er hat dafür entweder drei Raten zu je $40\,000\,€$ zu zahlen, und zwar die erste Rate sofort, die zweite nach zwei Jahren und die dritte nach vier Jahren, oder aber er hat nach drei Jahren eine einmalige Zahlung in Höhe von $126\,500\,€$ zu leisten.
Welche Zahlungsart (bezogen auf den heutigen Tag) wird er wählen, wenn das Geld mit $5{,}5\,\%$ jährlich verzinst wird?
Tipp: Barwertaufgabe

Aufgabe A3

Ein Sparguthaben in Höhe von $12\,600\,€$ wird vier Jahre mit $9{,}75\,\%$ verzinst. Dann wird die Hälfte des Kapitals abgehoben und der Restbetrag zu jährlich $8\,\%$ Prozent erneut festgelegt.

a) Nach wie vielen Jahren ist der Restbetrag wieder auf $12\,600\,€$ angewachsen?

b) Zu welchem Zinssatz müsste das ursprüngliche Sparguthaben angelegt werden, damit es sich in fünfzehn Jahren verdreifacht?

Aufgabe A4

Bei der Geburt seiner Tochter richtet Herr Wilhelm ein Sparbuch mit $5\,000\,€$ ein. Bis zur Volljährigkeit der Tochter steht das Geld auf Zinseszins und wächst auf $20\,000\,€$ an.

a) Mit welchem Zinssatz wurde das Geld verzinst?

b) Die Tochter lässt die Summe noch ein 9 Monate auf dem Sparbuch und erhält $5\,\%$ Zinsen. Von den anfallenden Zinsen kann sie die Hälfte ihres Führerscheins bezahlen. Wie teuer ist er?

c) Danach erwirbt sie von dem Kapital ($20\,000\,€$) ein Kraftfahrzeug. Später verkauft sie den Wagen mit einem jährlichen Wertverlust von $20\,\%$ für $10\,240\,€$. Wie lange hat sie das Auto gefahren?

Aufgabe A5

Jemand hat sich vor fünf Jahren ein Auto für $11\,560$ € gekauft. Heute bietet ihm ein Händler beim Kauf eines Neuwagens zum Preis von $16\,309$ € noch $5\,100$ € für den Gebrauchtwagen.

a) Wie groß ist der jährliche prozentuale Wertverlust des Gebrauchtwagens?

b) Der Käufer hebt den für den Neuwagen noch ausstehenden Rechnungsbetrag von einem Sparkonto ab, auf dem vor drei Jahren $10\,400$ € eingezahlt worden waren. Wie viel verbleibt auf dem Konto, wenn mit $5{,}5\,\%$ Zinseszins gerechnet wird?

c) Wenn er den Gebrauchtwagen privat für den gleichen Preis verkauft hätte, wären ihm vom Händler $3\,\%$ Rabatt auf den Neuwagenpreis eingeräumt worden. Wie viel hätte er gespart?

Aufgabe A6

Ein Vermieter verlangt von seinem Mieter beim Einzug eine Kaution von drei Monatsmieten, die bis zum Auszug jährlich mit $3{,}5\,\%$ verzinst wird.

a) Wie viel Geld erhält ein Mieter beim Auszug aus der Wohnung nach sieben Jahren, wenn die anfängliche Monatsmiete 730 € betrug?

b) Da beim Auszug für Reparaturarbeiten Kosten in Höhe von 400 € entstehen, verringert sich der Auszahlungsbetrag. Wie hoch ist dadurch die tatsächliche Verzinsung seiner Kaution?

c) Ein anderer Mieter hat ursprünglich eine Kaution in gleicher Höhe gezahlt. Wie lange hat er in der Wohnung gewohnt, wenn ihm keine Kosten für Renovierungsarbeiten in Rechnung gestellt werden und er $2\,513{,}08$ € erhält?

Aufgabe A7

Herr Mustermann macht eine Erbschaft von $35\,000$ €. Er will das Geld über 15 Jahre mit Zinseszins festlegen.

a) Bank A bietet für die ganze Zeit einen Zinssatz von $6{,}5\,\%$.

b) Bank B bietet für die ersten 10 Jahre $6\,\%$ und dann $7{,}75\,\%$.

c) Eine Firma bietet Herrn Sommer an, nach Ablauf der 15 Jahre das Doppelte zurückzuzahlen. Berechne den Zinssatz.

Für welches Angebot wird Herr Mustermann sich entscheiden?

Aufgabe A8

Herr Müller überlegt, was er mit $20\,000$ € anfangen soll.

a) Bei welchem Zinssatz würde er in 8 Jahren $50\,\%$ mehr Geld besitzen?

b) Welchen Betrag müsste er heute bei einem Zinssatz von $3{,}5\,\%$ anlegen, um in 10 Jahren $20\,000$ € ausgezahlt zu bekommen?

c) In wie vielen Jahren wächst das Geld bei einem Zinssatz von $4\,\%$ mindestens auf das Doppelte des ursprünglichen Wertes?

Lösung A1

a) $K_n = 10000 = K_0 \cdot q^n$
$10000 = 6100 \cdot 1{,}06^n$ | $:6100$
$1{,}639344262 = 1{,}06^n$ | log
$log 1{,}639344262 = n \cdot log\ (1{,}06)$ | $:log\ (1{,}06)$
$n = 8{,}48$
Nach 9 Jahren ist das Kapital erstmals größer als 10 000 €.
$K10 = 6100 \cdot 1{,}069 = 10305{,}82$
Es beträgt dann 10 305,82 €.

Ohne Logarithmus:
$K_1 = 6100 \cdot 1{,}06 = 6466$
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}06 = 6853{,}96$
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}06 = 7265{,}19$
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}06 \ldots$
… usw. bis
$K_9 = K_8 \cdot 1{,}06 = 10305{,}82$

b) $K_9 = 12000 = 6100 \cdot q^9$ | $:6100$
$q^9 = 1{,}967213115$ | $\sqrt[9]{\ }$
$q = 1{,}078$
$p\ \% = (1{,}078 - 1) \cdot 100 = 7{,}8\ \%$
Das Kapital müsste mit 7,8 % verzinst werden.

Lösung A2

Hinweis: Gesucht ist hier der „Barwert" der beiden Zahlungsmöglichkeiten. Der Barwert ist der Wert, den man bei einer Bank anlegen muss, um mit Zins und Zinseszins die Zahlungen zu den vereinbarten Terminen leisten zu können, also ist es eigentlich K_0.

Zahlungsart I: 3 Raten à 40 000 € ergibt insgesamt 120 000 €.
$B_1 = 40000 + \frac{40000}{1{,}055^2} + \frac{40000}{1{,}055^4} = 108226{,}77$

Zahlungsart II: 1 Rate à 126 500 €
$B_2 = \frac{126500}{1{,}055^3} = 107729{,}13$

Die zweite Zahlungsart ist günstiger.

Lösung A3

a) Zunächst Berechnung von K_4:
$K_4 = 12600 \cdot 1{,}0975^4 = 18280{,}52$
Abhebung der Hälfte ergibt K_0 neu:
$K_{0neu} = \frac{1}{2} \cdot K_4 = 9140{,}26$
9 140,26 € sollen wieder auf 12 600 € anwachsen:
$12600 = 9140{,}26 \cdot 1{,}08^n$| | $:9140{,}26$
$1{,}378516585 = 1{,}08^n$ | log
$log 1{,}639344262 log(1{,}378516585) = n \cdot log(1{,}08)$ | $:log(1{,}08)$
$n = 4{,}17$
Im fünften Jahr nach Abheben der Hälfte des Kapitals ist das Guthaben wieder auf 12 600 € angewachsen.

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 9140{,}26 \cdot 1{,}08 = 9871{,}48$
$K_2 = K_2 \cdot 1.08 = 10661{,}20$
$K_3 = K_2 \cdot 1.08 = 11514{,}10$
$K_4 = K_3 \cdot 1.08 = 12435{,}22$
$K_5 = K_4 \cdot 1.08 = 13430{,}04$

b) Ursprüngliches Sparguthaben (K_0) gleich $12\,600$ € verdreifacht (K_{15}) gleich $37\,800$ € in 15 Jahren. Gesucht ist $p\,\%$:

$37800 = 12600 \cdot q^{15}$ | $:12600$
$q^{15} = 3$ | $\sqrt[15]{}$
$q = 1{,}076$
$p\,\% = (1{,}076 - 1) \cdot 100 = 7{,}6\,\%$
Das Kapital wird mit $7{,}6\,\%$ verzinst.

Lösung A4

Hinweis: Volljährigkeit erreicht man mit dem 18. Lebensjahr.

a) $K_n = K_0 \cdot q^n$
$20000 = 5000 \cdot q^{18}$ | $:5000$
$q^{18} = 4$ | $\sqrt[18]{}$
$q = 1{,}08$
$p\,\% = (1{,}08 - 1) \cdot 100 = 8\,\%$
Das Kapital wurde mit $8\,\%$ verzinst.

b) Verzinsung von 20000 € mit 9 Monaten zu $5\,\%$:
$Z = \frac{K \cdot t \cdot p\,\%}{100} = \frac{20000 \cdot \frac{9}{12} \cdot 5\,\%}{100} = 750$ €
Davon bezahlt sie die Hälfte der Führerscheinkosten.
$K_{Führersch.} = 2 \cdot Z = 1500$
Der Führerschein kostet $1\,500$ €.

c) $K_n = 10\,240$ €; $K_0 = 20\,000$ €; $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
n gesucht.
$10240 = 20000 \cdot 0{,}8^n$ | $:20000$
$0{,}512 = 0{,}8^n$ | log
log1,639344262$log(0{,}512) = n \cdot log(0{,}8)$ | $:log(0{,}8)$
$n = 3$

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 20000 \cdot 0.8 = 16000$
$K_2 = K_1 \cdot 0.8 = 12800$
$K_3 = K_2 \cdot 0.8 = 10240$
Sie hat das Auto drei Jahre lang gefahren.

Lösung A5

a) Anschaffungspreis (K_0) gleich $11\,560$ €, Wiederverkaufswert (K_n) gleich $5\,100$ €, n gleich 5 Jahre, gesucht ist $p\,\%$:
$5100 = 11560 \cdot q^5$ | $:11560$
$q^8 = 0{,}441176471$ | $\sqrt[8]{}$
$q = 0{,}9028$
$p\,\% = (1 - 0{,}9028) \cdot 100 \approx 10\,\%$
Der jährliche Wertverlust beträgt etwa $10\,\%$.

b) Berechnung von K_3:
$K_3 = 10400 \cdot 1{,}055^3 = 12212{,}11$
Der Käufer hebt den Differenzbetrag von $16\,309$ € und $5\,100$ € gleich $11\,209$ € ab.
$12212{,}11 - 11209 = 1003{,}11$
Auf dem Konto verbleiben $1\,003{,}11$ *€.*

c) $3\,\%$ von $16\,309$ €:
$16309 \cdot 0{,}03 = 489{,}27$
Der Käufer hätte $489{,}27$ € gespart.

Lösung A6

a) Drei Monatsmieten (K_0) gleich $3 \cdot 730\text{ €} = 2\,190\text{ €}$, n gleich 7 Jahre, $p = 3{,}5\,\%$, gesucht ist K_7:
$K_7 = 2190 \cdot 1{,}035^7 = 2786{,}29$
Der Mieter erhält $2\,786{,}29$ *€.*

b) Zu erwartendes Guthaben (K_{7neu}) gleich $2786{,}29 - 400 = 2386{,}29$; K_0 weiterhin $2\,190$ € und n gleich 7 Jahre, gesucht ist $p\,\%$:
$2386{,}29 = 2190 \cdot q^7 \quad | \quad :2190$
$q^7 = 1{,}089630137 \quad | \quad \sqrt[7]{}$
$q = 1{,}0123$
$p\,\% = (1{,}0123 - 1) \cdot 100 \approx 1{,}2\,\%$
Die Verzinsung der Kaution würde nur noch etwa $1{,}2\,\%$ *betragen.*

c) $K_0 = 2\,190\text{ €}$; $K_n = 2\,513{,}08\text{ €}$; $p = 3{,}5\,\%$; gesucht ist n:
$2513{,}08 = 2190 \cdot 1{,}035^n \quad | \quad :2190$
$1{,}147525114 = 1{,}035^n \quad | \quad log$
log1,639344262$log(1{,}147525114) = n \cdot log(1{,}035) \quad | \quad :log(1{,}035)$
$n = 4$

Ohne Logarithmus:
$K_1 = 2190 \cdot 1.035 = 2266{,}65$
$K_2 = K_1 \cdot 1.035 = 2345{,}98$
$K_3 = K_2 \cdot 1.035 = 2428{,}09$
$K_4 = K_3 \cdot 1.035 = 2513{,}08$
Der Mieter hat vier Jahre lang in der Wohnung gelebt.

Lösung A7

$K_0 = 35\,000\text{ €}$, n gleich 15 Jahre, gesucht ist K_{15}:

a) Bank A: $p = 6{,}5\,\%$
$K_{15} = 35000 \cdot 1{,}065^{15} = 90014{,}44$

b) Bank B: $p_1 = 6\,\%$ für 10 Jahre, $p_2 = 7{,}75\,\%$ für 5 Jahre.
$K_{15} = 35000 \cdot 1{,}06^{10} \cdot 1{,}0775^5 = 91035{,}98$

c) Prozentsatz für doppeltes Kapital $K_{15} = 70000$:
$70000 = 35000 \cdot q^{15} \quad | \quad :35000$
$q^{15} = 2 \quad | \quad \sqrt[15]{}$
$q = 1{,}0473$
$p\,\% = (1{,}0473 - 1) \cdot 100 = 4{,}73\,\%$
Die Firma bietet eine Verzinsung von nur $4{,}73\,\%$*.*

Herr Mustermann wird sich für das Angebot von Bank B entscheiden.

Lösung A8

$K_0 = 20\,000$ €

a) Verdoppeltes Kapital (K_n) gleich $40\,000$ €, $n = 8$ Jahre, gesucht p %:

$40000 = 20000 \cdot q^8 \quad | \quad :20000$

$q^8 = 2 \quad | \quad \sqrt[8]{}$

$q = 1{,}0905$

$p\,\% = (1{,}0905 - 1) \cdot 100 \approx 9{,}1\,\%$

Das Kapital müsste mit etwa $9{,}1\,\%$ verzinst werden.

b) $K_{10} = 20\,000$ €; $n = 10$ Jahre, $p\,\% = 3{,}5\,\%$, gesucht Anfangskapital K_0:

$20\,000 = K_0 \cdot 1{,}035^{10} \quad | \quad :1{,}035^{10}$

$K_0 = 14178{,}38$

Herr Müller müsste $14\,178{,}38$ € anlegen.

c) $K_n > 40\,000$ €; $K_0 = 20\,000$ €; $p\% = 4\,\%$. Gesucht n in Jahren.

$40000 = 20000 \cdot 1{,}04^n \quad | \quad :20000$

$2 = 1{,}04^n \quad | \quad log$

log1,639344262$log(2) = n \cdot log(1{,}04) \quad | \quad :log(1{,}04)$

$n = 17{,}67$

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 20000 \cdot 1.04 = 20800{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1.04 = 21632{,}00$

$K_3 = K_2 \cdot 1.04 = 22497{,}28$

$K_4 = K_3 \cdot 1.04 = \cdots.$

… usw. bis

$K_{17} = K_{16} \cdot 1.04 = 38958{,}01$

$K_{18} = 17 \cdot 1.04 = 40516{,}33$

Nach 18 Jahren hat sich das eingezahlte Kapital mehr als verdoppelt.

Aufgabe A1

Corinna legt 4 500,00 € zu folgenden Zinssätzen auf drei Jahre an:

1. Jahr	1,5 %
2. Jahr	2,25 %
3. Jahr	2,75 %

Zinsen werden mitverzinst.
Hans legt ebenfalls 4 500,00 € auf drei Jahre an. Nach Ablauf des ersten Jahres erhält er 45,00 € Zinsen, nach Ablauf des zweiten Jahres 91,43 € . Zinsen werden mitverzinst.
Welchen Zinssatz muss seine Bank im dritten Jahr gewähren, damit er nach den drei Jahren das gleiche Guthaben wie Corinna hat?
Quelle: RS-Abschluss BW 2004 / P7

Aufgabe A2

Ulrike legt bei ihrer Bank einen Betrag von 8 000,00 € für drei Jahre an. Zinsen werden mitverzinst.
Bis zum Ende der drei Jahre wächst ihr Guthaben um insgesamt 8,73 % an. Im ersten Jahr beträgt der Zinssatz 2 %. Im zweiten Jahr werden 204,00 € Zinsen gutgeschrieben.
Wie hoch ist der Zinssatz im dritten Jahr?
Quelle: RS-Abschluss BW 2005 / P7

Aufgabe A3

Ein Guthaben von 5 000,00 € wird für drei Jahre angelegt. Zinsen werden mitverzinst. Die Zinssätze der ersten beiden Jahre sind:

Zinssatz im 1. Jahr:	2,50 %
Zinssatz im 2. Jahr:	3,25 %

Für die drei Jahre werden insgesamt 503,23 € Zinsen gutgeschrieben.
Wie hoch ist der Zinssatz im dritten Jahr?
Bei welchem jährlich gleichbleibenden Zinssatz wäre nach drei Jahren das gleiche Endkapital erzielt worden?
Quelle: RS-Abschluss BW 2007 / P8

Aufgabe A4

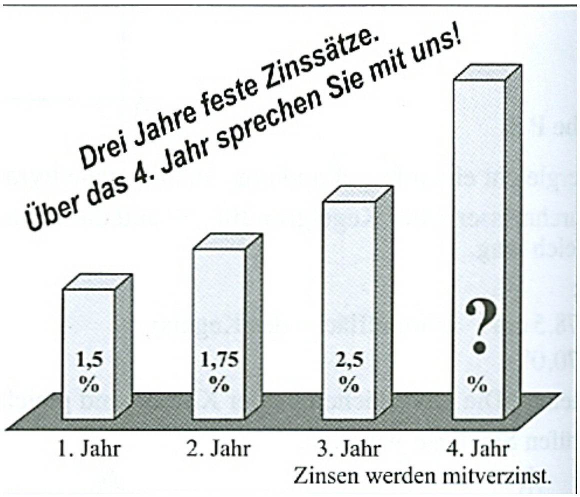
Gabi legt bei ihrer Bank 2 500,00 € zu folgenden Zinssätzen auf drei Jahre an:

1. Jahr:	3,50 %
2. Jahr:	3,75 %
3. Jahr:	4,25 %

Zinsen werden mitverzinst.
Das angesparte Geld lässt sie nach Ablauf der drei Jahre ein weiteres Jahr bei der Bank. Für dieses vierte Jahr erhält sie 132,93 € Zinsen. Wie hoch ist der Zinssatz im vierten Jahr?
Quelle: RS-Abschluss BW 2008 / P7

Aufgabe A5

Eine Bank wirbt mit nebenstehender Grafik. Herr Lenz möchte einen Betrag von 5 000,00 € anlegen. Nach Ablauf von vier Jahren soll sich der Betrag auf 5.500,00 € erhöhen.
Welchen Zinssatz müsste die Bank für das vierte Jahr anbieten?
Bei welchem jährlich gleichbleibenden Zinssatz würde er nach vier Jahren das gleiche Endkapital erzielen?
Quelle: RS-Abschluss BW 2011 / P6



Aufgabe A6

Frau Wagner möchte einen Betrag von 5 000,00 € für drei Jahre anlegen.
Das Bankhaus Adler wirbt mit folgendem Angebot:

Zinsen für das 1. Jahr	*1,50 %*
Zinsen für das 2. Jahr	*1,75 %*
Zinsen für das 3. Jahr	*2,25 %*
Zinsen werden mitverzinst	

Im Beratungsgespräch bietet das Bankhaus Adler an, dass Frau Wagner nach Ablauf der drei Jahre zuzüglich einer Bonusprämie von 100,00 € erhält.
Welchen Gesamtbetrag würde das Bankhaus Adler nach Ablauf der drei Jahre einschließlich Bonusprämie auszahlen?
Zusätzlich lässt sich Frau Wagner von der Opti-Bank beraten.
Ihr wird ein jährlich gleichbleibender Zinssatz angeboten. Zinsen werden mitverzinst. Eine Bonusprämie wird nicht vereinbart.
Wie hoch müsste der jährlich gleichbleibende Zinssatz für die drei Jahre bei der Opti-Bank mindestens sein, damit sich Frau Wagner für dieses Angebot entscheidet?
Quelle: RS-Abschluss BW 2013 / P6

Lösung A1

Guthaben von Corinna:

$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

$K_3 = 4500 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0225 \cdot 1{,}0275 = 4798{,}70$

Corrina hat nach den 3 Jahren ein Guthaben von 4.798,70 €.

Zinssatz im dritten Jahr für die Kapitalanlage von Hans.

Sein Endkapital soll gleich hoch sein wie das von Corinna.

$K_3 = (K_0 + 45{,}00 + 91{,}43) \cdot q_3$

$4798{,}70 = (4500 + 45 + 91{,}43) \cdot q_3$

$4798{,}70 = 4636{,}43 \cdot q_3 \qquad | \quad : 4636{,}43$

$q_3 = \frac{4798{,}70}{4636{,}43} = 1{,}035$

$p_3\% = (1{,}035 - 1) \cdot 100 = 3{,}5\%$

Die Bank muss im dritten Jahr einen Zinssatz von 3,5% gewähren.

Lösung A2

Endkapital von Ulrike:

Das Guthaben von Ulrike steigt in drei Jahren um 8,73% an. Über diese Angabe wird das Endkapital ermittelt.

$K_3 = K_0 \cdot 1{,}0873$

$K_3 = 8000 \cdot 1{,}0873 = 8698{,}40$

Zinssatz im dritten Jahr:

$K_3 = (K_0 \cdot q_1 + 204{,}00) \cdot q_3$

$8698{,}40 = (8000 \cdot 1{,}02 + 204{,}00) \cdot q_3$

$8698{,}40 = 8364 \cdot q_3 \qquad | \quad : 8364$

$q_3 = \frac{8698{,}40}{8364} = 1{,}04$

$p_3\% = (1{,}04 - 1) \cdot 100 = 4{,}0\%$

Der Zinssatz im dritten Jahr ist 4 %.

Lösung A3

Endkapital:

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass für die drei Jahre insgesamt 503,23 € Zinsen gutgeschrieben werden. Daraus gibt sich das Endkapital.

$K_3 = K_0 + 503{,}23$

$K_3 = 5000 + 503{,}23 = 5503{,}23$

Zinssatz im dritten Jahr:

$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

$5503{,}23 = 5000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0325 \cdot q_3$

$5503{,}23 = 5291{,}56 \cdot q_3 \qquad | \quad : 5291{,}56$

$q_3 = \frac{5503{,}23}{5291{,}56} = 1{,}04$

$p_3\,\% = (1{,}04 - 1) \cdot 100 = 4{,}0\%$

Der Zinssatz im dritten Jahr ist 4 %.

Gleiches Ergebnis mit festem Zinssatz:

$K_3 = K_0 \cdot q^3$

$5503{,}23 = 5000 \cdot q^3 \qquad | \quad : 5000$

$q^3 = \frac{5503{,}23}{5000} = 1{,}10 \qquad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}0325$

$p\% = (1{,}0325 - 1) \cdot 100 = 3{,}25\%$

Bei einem gleichbleibenden Zinssatz von 3,25 % wäre nach drei Jahren das gleiche Endkapital erzielt worden.

Lösung A4

Endkapital nach drei Jahren:

$K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

$K_3 = 2500 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0425$

$K_3 = 2798{,}62$

Gabi hat am Ende der drei Jahren ein Guthaben von $2.798{,}62$ €.

Zinssatz für das vierte Jahr:

$K_4 = K_3 + 132{,}93$

$K_4 = 2798{,}62 + 132{,}93 = 2931{,}55$

$K_4 = K_3 \cdot q_4$

$2931{,}55 = 2798{,}62 \cdot q_4 \qquad | \quad : 2798{,}62$

$q_4 = \frac{2931{,}55}{2798{,}62} = 1{,}0475$

$p_4\% = (1{,}0475 - 1) \cdot 100 = 4{,}75\%$

Der Zinssatz im vierten Jahr beträgt $4{,}75\ \%$.

Lösung A5

Zinssatz für das vierte Jahr:

$K_0 = 5000; \; K_4 = 5500$

$K_4 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$

$5500 = 5000 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}025 \cdot q_4$

$5500 = 5292{,}91 \cdot q_4 \qquad | \quad : 5292{,}91$

$q_4 = \frac{5500}{5292{,}91} = 1{,}0391$

$p_4\% = (1{,}0391 - 1) \cdot 100 = 3{,}91\%$

Die Bank müsste für das vierte Jahre einen Zinssatz von $3{,}91\ \%$ *anbieten.*

Jährlich gleichbleibender Zinssatz:

$K_4 = K_0 \cdot q^4$

$5500 = 5000 \cdot q^4 \qquad | \quad : 5000$

$1{,}1 = q^4 \qquad | \quad \sqrt[4]{\ }$

$q = 1{,}024$

$p\ \% = (1{,}024 - 1) \cdot 100 = 2{,}4\%$

Bei einem jährlich gleichbleibenden Zinssatz von $2{,}4\ \%$ *wäre dasselbe Ergebnis erzielt worden.*

Lösung A6

Endkapital beim Bankhaus Adler:

$K_{3Bonus} = K_o \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + 100$

$K_{3Bonus} = 5000 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0225 + 100$

$K_{3Bonus} = 5380$

Das Endkapital beim Bankhaus Adler beträgt 5380 €.

Fester Zinssatz bei der Opti-Bank:

Das Endkapital soll gleich hoch sein, also $K_{3Bonus} = K_{3Opti} = 5380$

$K_{3Opti} = K_0 \cdot q^3$

$5380 = 5000 \cdot q^3 \qquad | \quad : 5000$

$q^3 = \frac{5380}{5000} \qquad | \quad \sqrt[3]{\ }$

$q = 1{,}0247$

$p\ \% = (1{,}0247 - 1) \cdot 100 = 2{,}47\%$

Die Opti-Bank muss Frau Wagner mindestens $2{,}48\ \%$ *Zinsen bieten.*