

Einleitung

Im Kapitel **Zinseszinsen** haben wir die Berechnungsformel für die Zinseszinsrechnung kennengelernt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nun mit dem Ratensparen innerhalb der Zinseszinsrechnung.



Unter „Ratensparen“ verstehen wir die **mehrmalige jährliche** Einzahlung eines bestimmten Betrages – der Rate R – bei einer Bank für einen Zeitraum von mehreren Jahren. Wir wollen wissen, wie sich dieses eingezahlte Kapital „entwickelt“ und mit welchem Betrag - Endkapital K_n - wir nach Ablauf von n Jahren bei einem Zinssatz von $p\%$ rechnen können.

Die Zinseszinsformel für Ratensparen mit festem Zinssatz

Die Zinseszinsformel für Ratensparen mit festem Zinssatz lautet

$$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q)$$

mit

$$q = 1 + \frac{p\%}{100}$$

In der Formel bedeutet

R = Rate

Dies ist der Geldbetrag, den wir in jedem Jahr wiederholt zur Bank bringen und anlegen.

K_n = Endkapital

Dies ist der Geldbetrag, den wir nach n Jahren auf unserem Konto zur Verfügung haben, wenn unsere Raten Jahr für Jahr mit $p\%$ Zinsen verzinst wurden.

$p\%$ = Zinssatz

Dies ist der Prozentsatz, mit dem unsere Raten Jahr für Jahr einschließlich Zinsen verzinst werden.

n = Anzahl der Jahre

Dies sind die Anzahl Jahre (aber auch Anzahl der Rateneinlagen), die wir unsere Raten bei der Bank zum Sparen und Verzinsen anlegen.

q = Zinsfaktor

Dies ist der Faktor der exponentiellen Zunahme der Raten.

Erweiterte Zinseszinsformel für variablen Zinssatz

Die obige Zinseszinsformel gilt nur für den Fall, dass der Zinssatz über die gesamte Laufzeit des Ratensparvertrages konstant bleibt. Nun gibt es aber auch Sparformen, bei denen je nach Länge des Ansparvertrages ein stufenweise steigender Zinssatz gilt. Wir sprechen hier von Ratensparen mit variablem Zinssatz.

In diesem Falle gilt die erweiterte Zinseszinsformel

$$K_n = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n + q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot \dots \cdot q_n + q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot \dots \cdot q_n + \dots + q_n).$$

 $R =$ jährliche Rate sowie $K_n =$ Endkapital ist hier wie bei festem Zinssatz. Die Veränderung ist hier der variable Zinsfaktor.

Sei $p_1\%$ der gültige Zinssatz im ersten Jahr, so ist q_1 mit $q_1 = 1 + \frac{p_1\%}{100}$ der Zinsfaktor für das erste Jahr; q_2 mit $q_2 = 1 + \frac{p_2\%}{100}$ der Zinsfaktor für das zweite Jahr; q_3 mit $q_3 = 1 + \frac{p_3\%}{100}$ der Zinsfaktor für das dritte Jahr; ... usw. bis q_n mit $q_n = 1 + \frac{p_n\%}{100}$ der Zinsfaktor für das letzte Jahr der Anlage.

Berechnungsmethoden

Wollen wir von der Zinseszinsformel $K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q)$ bzw. $K_n = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n + q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n + \dots + q_n)$ eine der Variablen berechnen, so müssen uns stets alle anderen Variablen in irgendeiner Form gegeben sein. Bei den Aufgabenstellungen handelt es sich zumeist um Textaufgaben. Wir müssen also zunächst durch Textinterpretation ermitteln, welche der Variablen gegeben ist und welche Variable gesucht wird. Dies führt uns zu unterschiedlichen Berechnungsmethoden.

Berechnung des Endkapitals

Zur Berechnung des Endkapitals müssen die Variablen R, q bzw. q_1, q_2, \dots, q_n sowie n gegeben sein.

Beispiel 1

Ein Sparer zahlt jeweils am Jahresanfang einen Betrag von 500 € bei seiner Bank ein. Über welches Endkapital kann er nach 5 Jahren bei einem festen Zinssatz von 2,5 % verfügen?

Lösung 1

$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q)$ mit $R = 500$ €, $n = 5$ Jahre und $q = 1 + \frac{p\%}{100}$,

$q = 1 + 0,025 = 1,025$ sind gegeben.

$$K_5 = 500 \cdot (1,025^5 + 1,025^4 + 1,025^3 + 1,025^2 + 1,025) = 2693,87$$

Das Kapital wächst auf 2 693,87 € an.

Beispiel 2

Ein Sparer zahlt jeweils am Jahresanfang einen Betrag von 500 € bei seiner Bank ein. Über welches Endkapital kann er nach 5 Jahren verfügen, wenn die Bank im folgende Zinsstapel gewährt?

1. Jahr: 2 %
2. Jahr: 2,25 %
3. Jahr: 2,5 %
4. Jahr: 2,75 %
5. Jahr: 3 %

Lösung 2

$K_n = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n + q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n + \dots + q_n)$ mit $R = 500$ €, $n = 5$ Jahre und $q_1 = 1 + \frac{p_1\%}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$. Alternativ ergeben sich $q_2 = 1,0225$; $q_3 = 1,025$; $q_4 = 1,0275$ und $q_5 = 1,03$.

$$K_5 = 500 \cdot (1,02 \cdot 1,0225 \cdot 1,025 \cdot 1,0275 \cdot 1,03 + 1,0225 \cdot 1,025 \cdot 1,0275 \cdot 1,03 + 1,025 \cdot 1,0275 \cdot 1,03 + 1,0275 \cdot 1,03 + 1,03)$$

$$= 500 \cdot (1,1314 + 1,1092 + 1,0848 + 1,0583 + 1,03) = 2706,85$$

Das Kapital wächst auf 2 706,85 € an.

Berechnung der Rate

Zur Berechnung der Rate müssen die Variablen K_n , q bzw. q_1, q_2, \dots, q_n sowie n gegeben sein.

Beispiel 3

Ein Sparer zahlt jeweils am Jahresanfang einen bestimmten Betrag bei seiner Bank ein. Nach 5 Jahren kann er über ein Kapital von 2 693,87 € verfügen. Welchen Betrag hat er jeweils eingezahlt, wenn ein fester Zinssatz von 2,5 % gewährt wurde?

Lösung 3

$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q)$ mit $K_n = 2\,396,87$ €, $n = 5$ Jahre und $q = 1 + \frac{p\%}{100}$,
 $q = 1 + 0,025 = 1,025$ sind gegeben.

$$2396,87 = R \cdot (1,025^5 + 1,025^4 + 1,025^3 + 1,025^2 + 1,025)$$

$$2693,87 = 5,387736729 \cdot R \quad | \quad :5,387736729$$

$$R = 500,00$$

Die jährliche Rate betrug 500,00 €.

Beispiel 4

Ein Sparer zahlt jeweils am Jahresanfang einen bestimmten Betrag bei seiner Bank ein. Nach 5 Jahren kann er über ein Kapital von 2 706,85 € verfügen. Welchen Betrag hat er jeweils eingezahlt, wenn die Bank nachfolgend aufgeführten variablen Zins gewährte?

1. Jahr: 2 %
2. Jahr: 2,25 %
3. Jahr: 2,5 %
4. Jahr: 2,75 %
5. Jahr: 3 %

Lösung 4

$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$ mit $K_n = 2\,706,85$ €, $n = 5$ Jahre und $q_1 = 1 + \frac{p_1\%}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$. Alternativ ergeben sich $q_2 = 1,0225$; $q_3 = 1,025$; $q_4 = 1,0275$ und $q_5 = 1,03$.

$$2706,85 = (1,02 \cdot 1,0225 \cdot 1,025 \cdot 1,0275 \cdot 1,03 + 1,0225 \cdot 1,025 \cdot 1,0275 \cdot 1,03 + 1,025 \cdot 1,0275 \cdot 1,03 + 1,0275 \cdot 1,03 + 1,03)$$

$$2706,85 = R \cdot (1,1314 + 1,1092 + 1,0848 + 1,0583 + 1,03)$$

$$2706,85 = 5,4137 \cdot R \quad | \quad :5,4137$$

$$R = 500,00$$

Die wiederkehrende jährliche Rate betrug 500,00 €.

Berechnung des Zinssatzes

Zur Berechnung des Zinssatzes bedarf es anderer Formeln als die oben Angeführten.

Näheres findest du im Kapitel „Rentenrechnung“.

Berechnung des Anlagezeitraums

Zur Berechnung des Zinssatzes bedarf es anderer Formeln als die oben Angeführten.

Näheres findest du im Kapitel „Rentenrechnung“.

Berechnung von Jahreszinsen

Manchmal ist es von Interesse, wieviel Zinsen es in einem bestimmten Anlagejahr gab. Hierzu müssen - wie bei der Berechnung des Endkapitals - die Variablen R , q bzw. q_1, q_2, \dots, q_n sowie n gegeben sein.

Wird nun nach den erhaltenen Zinsen in einem bestimmten Jahr gefragt - z. B. im dritten Jahr - so berechnen wir dies über das Endkapital des dritten Jahres abzüglich des Endkapitals des 2. Jahres. Allerdings müssen wir vom Ergebnis dann noch einmal die Rate abziehen, die zu Beginn des dritten Jahres eingezahlt wurde.

Beispiel 5

Ein Sparer zahlt jeweils am Jahresanfang einen Betrag von 500 € bei seiner Bank ein. Die Bank gewährt einen festen Zinssatz von 2,5 %. Wieviel Zinsen wurden ihm 4. Jahr gutgeschrieben?

Lösung 5

$$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q)$$

$$R = 500 \text{ € und } q = 1 + \frac{p\%}{100} = 1 + 0,025 = 1,025 \text{ sind gegeben.}$$

$$Z_4 = K_4 - K_3 - R$$

$$K_3 = 500 \cdot (1,025^3 + 1,025^2 + 1,025) = 1576,26$$

$$K_4 = 500 \cdot (1,025^4 + 1,025^3 + 1,025^2 + 1,025) = 2128,16$$

$$Z_4 = 2128,16 - 1576,26 - 500 = 51,40$$

Im 4. Jahr des Sparens wurden 51,40 € Zinsen gutgeschrieben.

Beispiel 6

Ein Sparer zahlt 4 Jahre lang jeweils am Jahresanfang einen Betrag von 1000 € bei seiner Bank ein. Die Zinsen sind wie folgt gestaffelt:

- 1. Jahr: 2 %
- 2. Jahr: 2,25 %
- 3. Jahr: 2,5 %
- 4. Jahr: 2,75 %

Welche Zinsen wurden im 3. Jahr der Anlage verdient?

Lösung 6

$$K_n = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_3 \cdot q_4 + q_4)$$

$$\text{mit } R = 1000 \text{ €, } n = 4 \text{ Jahre und } q_1 = 1 + \frac{p_1\%}{100} = 1 + 0,02 = 1,02. \text{ Analog ergeben sich}$$

$$q_2 = 1,0225; \quad q_3 = 1,025 \quad \text{und} \quad q_4 = 1,0275.$$

$$Z_3 = K_3 - K_2$$

$$K_3 = 1000 \cdot (1,02 \cdot 1,0225 \cdot 1,025 + 1,0225 \cdot 1,025 + 1,025) = 3142,09$$

$$K_2 = 1000 \cdot (1,02 \cdot 1,0225 + 1,0225) = 2065,45$$

$$Z_3 = 3142,09 - 2065,45 - 1000 = 76,64$$

Im 3. Jahr der Anlage wurden 76,64 € Zinsen verdient.

Berechnung des Gesamtzinsenertrags absolut und relativ

Es ist auch von Interesse zu wissen, wieviel Zinsen insgesamt verdient wurden und zwar absolut als auch relativ.

Den absoluten Zuwachs (in €) ermitteln wir aus $Z_{ges} = K_n - K_0$.

Den relativen Zuwachs (in %) ermitteln wir aus $p_{ges}\% = \frac{K_n}{K_0} \cdot 100\% - 100\%$.

Beispiel 7

Bei einem Ratensparvertrag wird 5 Jahre lang jeweils zum Jahresanfang 500 € eingezahlt. Nach 5 Jahren erhält der Sparer von seiner Bank 2 706,85 € ausbezahlt. Welchen Zinsertrag erzielte die Anlage absolut und in Prozent?

Lösung 7

Insgesamt eingezahltes Kapital $K_0 = 5 \cdot R = 5 \cdot 500 = 2500$, $K_5 = 2706,85$

$$Z_{ges} = K_n - K_0 = 2706,85 - 2500 = 206,85$$

$$p_{ges}\% = \frac{K_n}{K_0} \cdot 100 - 100 = \frac{2706,85}{2500} \cdot 100 - 100 = 8,274\%$$

Der Ratensparvertrag erwirtschaftete insgesamt 206,85 € Zinsen. Das sind etwa 8,3 % der insgesamt eingezahlten Raten.