Aufgabe A1

Herr Beiersdorf zahlt 10 Jahre lang am Anfang jeden Jahres 3 800 € auf ein Sparkonto. Bis zum Ende des 4. Jahres beträgt der Zinssatz 6 %, ab Beginn des 5. Jahres 6,5 %. Wie viel € beträgt das Guthaben am Ende des 10. Jahres?

Aufgabe A2

Es werden 9 Jahre lang jeweils am Beginn eines Jahres 2 400 € auf ein Konto eingezahlt. Die Verzinsung beträgt bis zum Ende des 3. Jahres 3 %, vom 3. Jahr bis zum 5. Jahr 4 % und ab Beginn des 6. Jahres 5 %.
Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 9. Jahres?

Aufgabe A3

Ein Lottogewinn von 10 000 € wird am Anfang eines Jahres auf ein Sparkonto eingezahlt. Der Zinssatz der ersten 5 Jahre beträgt 2 % , danach steigt er kontinuierlich Jahr für Jahr um 0,5 %. Vom Ende des 4. Jahres an sollen jährlich am Jahresanfang 1 000 € zum Guthaben zugezahlt werden. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 10. Jahres?

Aufgabe A4

Marion zahlt jedes Jahr ihren Verdienst von 1 500 € aus einem Ferienjob bei ihrer Bank ein, die das Geld mit 2,5 % verzinst. Wieviel Guthaben hat Marion nach 4 Jahren?
Welches Guthaben hätte Sie, wenn der Zinssatz anfänglich nur 1 % beträgt, sich aber Jahr für Jahr um 0,5 % erhöht?

Aufgabe A5

Arthur Eltern überweisen jeweils am Jahresanfang einen bestimmten Betrag auf sein Konto. Nach 3 Jahren hat er stolze 3 162,62 € auf seinem Konto. Sein Geld wurde anfänglich mit 2 %, danach mit 2,5 % und im letzten Jahr mit 3 % verzinst. Welchen Betrag überwiesen Arthurs Eltern jeweils am Jahresanfang?

Aufgabe A6

Frau Martens zahlt zu jedem Jahresbeginn Geld bei ihrer Bank ein, sie benötigt in 5 Jahren ein neues Auto. Die Bank verzinst ihr Geld mit jährlich 3,75 %. Nach Ablauf der Jahre bekommt sie 6 709,71 € ausbezahlt. Welchen Betrag zahlte sie jeweils ein?
Frau Martens hat zusätzlich seit 5 Jahren 3 000 € auf einem normalen Sparkonto geparkt, welches mit 1,75 % verzinst wird. Jetzt möchte sie sich ein gebrauchtes Auto für 10 000 € kaufen. Reichen die beiden Geldanlagen aus oder muss sie noch etwas dazuzahlen?

Aufgabe A7

Herr Baumgart zahlt jährlich 750 € in einen Ratensparvertrag ein mit einem Zinssatz von 2,8 %.

a) Um wie viel Prozent ist die Sparsumme nach 3 Jahren höher als die Summe der eingezahlten Raten?
b) Herr Baumgart überlegt sich, vielleicht doch nur 500 € für 5 Jahre einzuzahlen. Wie viel Prozent liegt diese Sparsumme über / unter der Sparsumme von a)?

Lösung A1

Gegeben: $R = 3800\,€$; $n = 10$; $p_1\,\% = 6\,\%$ für 1. 4 Jahre, $p_2\,\% = 6{,}5\,\%$ ab dem 5. Jahr
Gesucht: $K_{10}\,\%$

$K_{10} = R \cdot \left(q_1^4 \cdot q_2^5 + q_1^3 \cdot q_2^5 + q_1^2 \cdot q_2^5 + q_1 \cdot q_2^5 + q_2^4 + q_2^3 + q_2^2 + q_2\right)$
$= 3800 \cdot (1{,}06^4 \cdot 1{,}065^5 + 1{,}06^3 \cdot 1{,}065^5 + 1{,}06^2 \cdot 1{,}065^5 + 10{,}6 \cdot 1{,}065^5$
$+1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065)$
$= 3800 \cdot (1{,}4319 + 1{,}6318 + 1{,}5394 + 1{,}4523 + 6{,}0637) = 46052{,}58$

Nach 10 Jahren beträgt das Guthaben 46 052,58 €.

Lösung A2

Gegeben: $R = 2400\,€$; $n = 9$; $p_1\,\% = 3\,\%$ für 1. 3 Jahre, $p_2\,\% = 4\,\%$ vom 5. bis 7. Jahr, $p_2\,\% = 5\,\%$ ab dem 8. Jahr; Gesucht: K_9

$K_9 = R \cdot (q_1^3 \cdot q_2^3 \cdot q_3^3 + q_1^2 \cdot q_2^3 \cdot q_3^3 + q_1 \cdot q_2^3 \cdot q_3^3 + q_2^3 \cdot q_3^3 + q_2^2 \cdot q_3^3 + q_2 \cdot q_3^3 + q_3^3 + q_3^2 + q_3)$
$K_9 = 2400 \cdot (1{,}03^3 \cdot 1{,}04^3 \cdot 1{,}05^3 + 1{,}03^2 \cdot 1{,}04^3 \cdot 1{,}05^3 + 1{,}03 \cdot 1{,}04^3 \cdot 1{,}05^3 +$
$1{,}04^3 \cdot 1{,}05^3 + 1{,}04^2 \cdot 1{,}05^3 + 1{,}04 \cdot 1{,}05^3 + 1{,}05^3 + 1{,}05^2 + 1{,}05)$
$= 2400 \cdot (1{,}4229 + 1{,}3815 + 1{,}3412 + 1{,}3022 + 1{,}2521 + 1{,}2039 + 3{,}3101) = 26265{,}36$

Nach 9 Jahren beträgt das Guthaben 26 265,36 €.

Lösung A3

Zunächst Berechnung der Einmalzahlung von 10 000 € über die gesamte Laufzeit:
Gegeben: $K_0 = 10000\,€$; $p_1\,\% = 2\,\%$ für 1. 5 Jahre, $p_6\,\% = 2{,}5$, $p_7\,\% = 3\,\%$, $p_8\,\% = 3{,}5\,\%$, $p_9\,\% = 4\,\%$, $p_{10}\,\% = 4{,}5\,\%$,
Gesucht: K_{10}

$K_{10} = K_0 \cdot q_1^5 \cdot q_6 \cdot q_7 \cdot q_8 \cdot q_9 \cdot q_{10}$
$K_{10} = 10000 \cdot 1{,}02^5 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 = 13111{,}49$

Berechnung der Ratenzahlung ab dem Jahr:
Gegeben: $R = 1000\,€$; $p_5\,\% = 2\,\%$, $p_6\,\% = 2{,}5$, $p_7\,\% = 3\,\%$, $p_8\,\% = 3{,}5\,\%$, $p_9\,\% = 4\,\%$, $p_{10}\,\% = 4{,}5\,\%$; Gesucht: K_R

$K_R = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6 + q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6 + q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6 + q_4 \cdot q_5 \cdot q_6 + q_5 \cdot q_6 + q_6)$
$K_R = 1000 \cdot (1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 + 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045$
$+1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}045 + 1{,}04 \cdot 1{,}045 + 1{,}045)$
$K_R = 1000 \cdot (1{,}2113 + 1{,}1818 + 1{,}1473 + 1{,}1085 + 1{,}0659 + 1{,}045) = 6759{,}80$
$K_{Ges} = K_{10} + K_R = 13111{,}49 + 6759{,}80 = 19871{,}29$

Nach 10 Jahren beträgt das Guthaben 19 871,29 €.

Lösung A4

Berechnung Ratensparen mit festem Zinssatz:
Gegeben: $R = 1500\,€$; $n = 4$, $p\,\% = 2{,}5\,\%$; Gesucht: K_4

$K_4 = R \cdot (q^4 \cdot q^3 \cdot q^2 \cdot q + q^3 \cdot q^2 \cdot q + q^2 \cdot q + q)$
$= 1500 \cdot (1{,}025^4 \cdot 1{,}025^3 \cdot 1{,}025^2 \cdot 1{,}025 + 1{,}025^3 \cdot 1{,}025^2 \cdot 1{,}025 + 1{,}025^2 \cdot 1{,}025 + 1{,}025)$
$= 1500 \cdot (1{,}2801 + 1{,}1597 + 1{,}0769 + 1{,}025) = 6812{,}55$

Bei festen Zinssatz hat Marion ein Guthaben von 6 812,55 €.

Berechnung Ratensparen mit variablem Zinssatz:
Gegeben: $R = 1500\,€$; $n = 4$, $p_1\,\% = 1\,\%$, $p_2\,\% = 1{,}5\,\%$, $p_3\,\% = 2\,\%$, $p_4\,\% = 2{,}5\,\%$
Gesucht: K_4

$K_4 = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_3 \cdot q_4 + q_4)$
$K_4 = 1500 \cdot (1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}025 + 1{,}015 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}025 + 1{,}02 \cdot 1{,}025 + 1{,}025)$
$K_4 = 1500 \cdot (1{,}0718 + 1{,}0612 + 1{,}0456 + 1{,}025) = 6305{,}40$

Bei variablem Zinssatz hätte Marion ein Guthaben von 6 305,40 €.

Lösung A5

Gegeben: $K_3 = 3162{,}62$ €; $n = 3$, $p_1\,\% = 2\,\%$, $p_2\,\% = 2{,}5\,\%$, $p_3\,\% = 3\,\%$
Gesucht: R
$K_3 = R \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_2 \cdot q_3 + q_3)$
$3162{,}62 = R \cdot (1{,}02 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}03 + 1{,}025 \cdot 1{,}03 + 10{,}3)$
$3162{,}62 = 3{,}162615 \cdot R \quad | \quad : 3{,}162615$
$R = 1000$
Arthurs Eltern überwiesen jeweils $1\,000$ €.

Lösung A6

Berechnung Ratensparen:
Gegeben: $K_5 = 6709{,}71$ €; $n = 5$, $p\,\% = 3{,}75\,\%$; Gesucht: R
$K_5 = R \cdot (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)$
$6709{,}71 = R \cdot (1{,}0375^5 + 1{,}0375^4 + 1{,}0375^3 + 1{,}0375^2 + 1{,}0375)$
$6709{,}71 = 5{,}5914 \cdot R \quad | \quad : 5{,}5914$
$R = 1200$
Frau Martens hat jeweils $1\,200$ € *einbezahlt.*
Berechnung des Sparguthabens:
Gegeben: $K_0 = 3000$ €; $n = 5$, $p\,\% = 1{,}75\,\%$
Gesucht: K_5
$K_5 = K_0 \cdot q^5 = 3000 \cdot 1{,}0175^5 = 3271{,}85$
Gesamtguthaben:
$K_{ges} = 6709{,}71 + 3271{,}85 = 9981{,}56$
Berechnung der Differenz D zu $10\,000$ € :
$D = 10000 - K_{ges} = 10000 - 9981{,}56 = 18{,}44$
Die beiden Geldanlagen reichen nicht aus, Frau Martens muss noch $18{,}44$ € dazuzahlen?

Lösung A7

a) Gegeben: $R = 750$ €; $n = 3$, $p\,\% = 2{,}8\,\%$; Gesucht: K_3
$K_3 = R \cdot (q^3 \cdot q^2 \cdot q + q^2 \cdot q + q)$
$\quad = 750 \cdot (1{,}028^3 \cdot 1{,}028^2 \cdot 1{,}028 + 1{,}028^2 \cdot 1{,}028 + 1{,}028)$
$K_3 = 2470{,}94$
Summe S der Einzahlungen: $S = 3 \cdot 750 = 2250$
Prozentuales Verhältnis v Sparsumme zu Summe Einzahlungen:
$v\,\% = \frac{K_3}{S} \cdot 100 = \frac{2470{,}94}{2250} \cdot 100 = 109{,}82\,\%$
Die Sparsumme nach 3 *Jahren ist um* $9{,}82\,\%$ *höher als die Summe der Einzahlungen.*

b) Sparsumme mit Sparrate 500 €:
Gegeben: $R = 500$ €; $n = 5$, $p\,\% = 2{,}8\,\%$; Gesucht: K_5
$K_5 = R \cdot (q^5 \cdot q^4 \cdot q^3 \cdot q^2 \cdot q + q^4 \cdot q^3 \cdot q^2 \cdot q + q^3 \cdot q^2 \cdot q + q^2 \cdot q + q)$
$\quad = 500 \cdot (1{,}028^5 \cdot 1{,}028^4 \cdot 1{,}028^3 \cdot 1{,}028^2 \cdot 1{,}028 + 1{,}028^4 \cdot 1{,}028^3 \cdot 1{,}028^2 \cdot 1{,}028 +$
$\quad 1{,}028^3 \cdot 1{,}028^2 \cdot 1{,}028 + 1{,}028^2 \cdot 1{,}028 + 1{,}028)$
$K_5 = 500 \cdot (1{,}5132 + 1{,}3180 + 1{,}1802 + 1{,}0864 + 1{,}028) = 3062{,}90$
Prozentuales Verhältnis v Sparsumme b) zu Sparsumme a)
$v\,\% = \frac{K_5}{K_3} \cdot 100 = \frac{3062{,}90}{2470{,}94} \cdot 100 = 123{,}96\,\%$
Die Sparsumme b) nach 5 *Jahren ist um etwa* $23\,\%$ *höher als die Summe a) nach* 3 *Jahren.*