Rentenrechnung mit Zinseszins

Fit in Mathe Online
Das Portal mit mehr als 500000 Aufgaben für Schule und Studium

Information für Nutzer dieses Materials

Dieses Dokumentist Teil eines der umfangreichsten, privat betriebenen Online-Portale Deutschlands für Mathematik und wird Ihnen nach dem kostenfreien bzw. kostenpflichtigen Download zur freien Nutzung zur Verfügung gestellt.

Neben den WIKIs zu den einzelnen Themengebieten mit ausführlicher Erläuterung und Beispielen werden umfangreiche Aufgabensammlungen getrennt nach Schwierigkeitsgraden bereitgestellt.

Sollte Ihnen das Material gefallen (oder auch nicht), besuchen Sie uns doch auf unserer Webseite und hinterlassen Sie eine Beurteilung. Oder vielleicht geben Sie uns ja einen Like in einem der sozialen Netzwerke?

gez.: Dr.-Ing. Meinolf Müller
verantwortlich für den Inhalt gem. § 5 TMG
von https://www.fit-in-mathe-online.de

Bewertung
Fit-in-mathe-online.de
SEHR GUT
19.12.19 7 Bewertungen
Hallo Herr -Ing. Meinholf Mueller, Die Seite ist T..
Dr.-Bemi.
webwiki

Inhaltsverzeichnis

Rentenrechnung mit Zinseszins

© by Fit-in-Mathe-Online.de

Kapitel mit 96 Aufgaben

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Einleitung

Im Kapitel ***Ratensparen*** haben wir Berechnungsformeln für die Berechnungen von Ratensparverträgen kennengelernt. In diesem Kapitel lernen wir nun eine andere und umfangreichere Berechnung dieser „Ratensparverträge" kennen.
Haben wir unter ***Ratensparen*** stets nur berechnet, nach wie vielen Raten eine bestimmtes Endkapital erreicht wird und haben dabei immer nur Einzahlungen am Anfang eines Jahres angenommen, ist es in der Rentenrechnung auch möglich, Einzahlungen am Ende eines Jahres vorzunehmen. Es entstehen dadurch zwei neue Begriffe, nämlich

- Vorschüssige Rentenzahlungen sowie
- Nachschüssige Rentenzahlungen

Weiterhin ist in der Rentenrechnung auch von Interesse, wie lange ein vorhandenes Kapital ausreicht, wenn man sich Jahr für Jahr einen bestimmten Betrag auszahlen lässt. Rentenrechnung ist also Ratensparen auf der einen Seite sowie Entnahmeplan auf der anderen Seite.

Die wichtigsten Begriffe der Rentenrechnung – im folgenden Schritt für Schritt erläutert – sind somit:

- Berechnung des Rentenendwertes, vorschüssig und nachschüssig
- Berechnung des Rentenbarwertes, vorschüssig und nachschüssig
- Regelmäßige Ein- bzw. Auszahlungen, vorschüssig und nachschüssig
- Ewige Renten

Der Rentenendwert

Rentenendwerte sind die Werte, die nach Ablauf von regelmäßigen Einzahlungen (bzw. Auszahlungen) als effektiver Geldbetrag verfügbar sind.
Wir merken uns:
Ein- bzw. Auszahlungen zu Beginn eines Jahres werden „vorschüssige Zahlungen" genannt.
Ein- bzw. Auszahlungen am Ende eines Jahres werden „nachschüssige Zahlungen" genannt.

Folgende Formelzeichen gelten bei der Verzinsung regelmäßiger Zahlungen:

K_0: Anfangskapital
K_n: Endkapital
$p\,\%$: Zinssatz
q: Zinsfaktor mit $q = 1 + \frac{p\,\%}{100}$
R: Rate
n: Anzahl der jährlichen Zahlungen

Hinweis:
Diese Formelzeichen haben wir bereits im Kapitel „**Ratensparen**" kennen gelernt.

Der Rentenendwert mit nachschüssiger Zahlung

Für den Endwert regelmäßiger nachschüssiger Zahlungen gilt:

$$K_n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Beispiel 1: Herr Maier zahlt 10 Jahre lang am **Ende** des Jahres $5\,000$ € auf ein Konto ein. Die Bank bietet einen Zinssatz von $4\,\%$.
Wie hoch ist das Endkapital nach dieser Zeit?

Lösung 1: Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 4\,\%,\ n = 10$
Gesucht: K_{10}
$K_{10} = \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{5000 \cdot (1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1} = 60030{,}54$
Der Rentenendwert beträgt $60\,030{,}54$ €.

Beispiel 2: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $12\,000$ €. Es werden 8 Jahre lang **am Ende** des Jahres $5\,000$ € eingezahlt. Die Bank gewährt $5\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren angewachsen?

Lösung 2: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch nachschüssige Einzahlungen vermehrt, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 5\,\%,\ n = 8,\ K_0 = 12000\,€$
Gesucht: K_8
$K_8 = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 12000 \cdot 1{,}05^8 + \frac{5000 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{1{,}05 - 1} = 65475{,}00$
Der Rentenendwert beträgt $65\,475$ €.

Beispiel 3: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $65\,000$ €. Es werden 8 Jahre lang **am Ende** des Jahres $5\,000$ € abgehoben. Die Bank gewährt $4\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren gesunken?

Lösung 3: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch nachschüssige Abhebungen **vermindert**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 4\,\%,\ n = 8,\ K_0 = 65000\,€$
Gesucht: K_8
$K_8 = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 65000 \cdot 1{,}04^8 - \frac{5000 \cdot (1{,}04^8 - 1)}{1{,}04 - 1} = 42885{,}86$
Der Rentenendwert beträgt $42\,885{,}86$ €.

Der Rentenendwert mit vorschüssiger Zahlung

Für den Endwert regelmäßiger vorschüssiger Zahlungen gilt:

$$K_n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Beispiel 4: Herr Maier zahlt 10 Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € auf ein Konto ein. Die Bank bietet einen Zinssatz von $4\,\%$.
Wie hoch ist das Endkapital nach dieser Zeit?

Lösung 4: Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 4\,\%$, $n = 10$
Gesucht: K_{10}
$K_{10} = \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{5000 \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1} = 62431{,}76$
Der Rentenendwert beträgt $62\,431{,}76$ €.
Hinweis:
Diese Berechnung hätte auch mit den Formeln aus dem Kapitel **Ratensparen** ausgeführt werden können. Wir erinnern uns an die Formel mit

$$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q)$$

Die Berechnung mit dieser Formel bringt:
$K_{10} = 5000 \cdot (1{,}04^{10} + 1{,}04^9 + 1{,}04^8 + \cdots + 1{,}04) = 5000 \cdot 12{,}48635 = 62431{,}76$
Es ergibt sich derselbe Rentenendwert.

Beispiel 5: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $12\,000$ €. Es werden 8 Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € eingezahlt. Die Bank gewährt $5\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren angewachsen?

Lösung 5: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch vorschüssige Einzahlungen **vermehrt**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 5\,\%$, $n = 8$, $K_0 = 12000$ €
Gesucht: K_8
$K_8 = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 12000 \cdot 1{,}05^8 + \frac{5000 \cdot 1{,}05 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{1{,}05 - 1} = 67862{,}29$
Der Rentenendwert beträgt $67\,862{,}29$ €.

Beispiel 6: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $45\,000$ €. Es werden 7 Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € abgehoben. Die Bank gewährt $4\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 7 Jahren gesunken?

Lösung 6: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch vorschüssige Abhebungen **vermindert**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 4\,\%$, $n = 7$, $K_0 = 45000$ €
Gesucht: K_8
$K_7 = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 45000 \cdot 1{,}04^7 - \frac{5000 \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04 - 1} = 18145{,}80$
Der Rentenendwert beträgt $18\,145{,}80$ €.

Der Rentenbarwert

Unter dem Rentenbarwert verstehen wir den einmalige Betrag K_0, der bei einer Rentenanstalt einzuzahlen ist, um n Jahre lang entweder **am Ende** (nachschüssig) oder **am Anfang** (vorschüssig) eines jeden Jahres eine Rente von R € beziehen zu können bei einem festen Zinssatz von p %.

Der Rentenbarwert mit nachschüssiger Auszahlung

Den nachschüssigen Barwert K_0 erhalten wir durch Abzinsung des nachschüssigen Rentenendwertes K_n.
Wir berechnen zunächst den Rentenendwert K_n über die Formeln der Kapitalentwicklung mit festem Zinssatz:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Den so ermittelten Rentenendwert setzen wir dem Rentenendwert der nachschüssigen Zahlungen gleich.

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Jetzt dividieren wir noch entsprechend den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen noch mit q^n und erhalten dadurch die Rentenbarwert

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Beispiel 7: Welcher einmalige Betrag (Barwert) ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, um bei einem Zinssatz von $6\,\%$ 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von $5\,000$ € beziehen zu können?

Lösung 7: Gegeben: $R = 5000$ €, $n = 15$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: Rentenbarwert K_0
$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{5000 \cdot (1{,}06^{15} - 1)}{1{,}06^{15} \cdot (1{,}06 - 1)} = 48561{,}24$
Es muss ein Barwert in Höhe von $48\,561{,}24$ € bei der Rentenanstalt eingezahlt werden.

Der Rentenbarwert mit vorschüssiger Auszahlung

Den vorschüssigen Barwert K_0 erhalten wir durch Abzinsung des vorschüssigen Rentenendwertes K_n.
Auch hier berechnen wir zunächst den Rentenendwert K_n über die Formeln der Kapitalentwicklung mit festem Zinssatz:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Den so ermittelten Rentenendwert setzen wir dem Rentenendwert der vorschüssigen Zahlungen gleich.

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Jetzt dividieren wir noch entsprechend den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen noch mit q^n und erhalten dadurch die Rentenbarwert

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$

Beispiel 8: Welcher einmalige Betrag (Barwert) ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, um bei einem Zinssatz von $6\,\%$ 15 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres eine Rente von $5\,000$ € beziehen zu können?

Lösung 8: Gegeben: $R = 5000$ €, $n = 15$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: Rentenbarwert K_0
$K_0 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q^{n-1}\cdot(q-1)} = \frac{5000\cdot(1{,}06^{15}-1)}{1{,}06^{14}\cdot(1{,}06-1)} = 51474{,}92$
Es muss ein Barwert in Höhe von $51\,474{,}92$ € *bei der Rentenanstalt eingezahlt werden.*

Die ewige Rente

Unter einer ewigen Rente verstehen wir die jährliche bzw. monatliche Kapitalentnahme von einem bestehenden Guthaben nur in Höhe der Verzinsung des Guthabens. De facto bleibt der anfänglich eingezahlte Grundbetrag unberührt und lediglich die Zinsen werden abgehoben. Die ewige Rente ist defacto der Zinsertrag einer Kapitalanlage, so wie wir sie im Kapitel ***Zinsrechnung*** kennen gelernt haben.

Die ewige nachschüssige Rente

Es wird das Kapital K_0 gesucht, welches in einem Jahr bei einem Zinssatz von $p\,\%$ Zinsen in Höhe der Rate R der ewigen Rente bringt.

$$K_0 = \frac{R}{q-1}$$

Beispiel 9: Welches Kapital K_0 ist anzulegen, damit bei $6\,\%$ Jahreszinsen eine nachschüssige ewige Rente von $15\,000$ € gezahlt werden kann?

Lösung 9: Gegeben: $R = 15\,000$ €, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: K_0
$K_0 = \frac{R}{q-1} = \frac{15000}{1{,}06-1} = 250000$
Es ist ein Betrag von $250\,000$ € *bei der Bank anzulegen.*

Die ewige vorschüssige Rente

Es wird das Kapital K_0 gesucht, welches in einem Jahr bei einem Zinssatz von $p\,\%$ Zinsen in Höhe der Rate R der ewigen Rente zuzüglich einer ersten Rate zu Beginn der ewigen Rente bringt.

$$K_0 = \frac{R\cdot q}{q-1}$$

Beispiel 10: Welches Kapital K_0 ist anzulegen, damit bei $6\,\%$ Jahreszinsen eine vorschüssige ewige Rente von $15\,000$ € gezahlt werden kann?

Lösung 10: Gegeben: $R = 15\,000$ €, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: K_0
$K_0 = \frac{R\cdot q}{q-1} = \frac{15000\cdot 1{,}06}{1{,}06-1} = 265000$
Es ist ein Betrag von $265\,000$ € *bei der Bank anzulegen.*

Aufgabe A1

Berechne den Rentenendwert K_n bei **nachschüssigen** Zahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	4760 €	3800 €	3200 €	5000 €	12000 €	7000 €
p %	3,75 %	6,1 %	5,5 %	6,8 %	4 %	3 %
n	$7\ J$	$4\ J$	$8\ J$	$12\ J$	$9\ J$	$5\ J$
K_n						

Aufgabe A2

Berechne den Rentenendwert K_n bei **vorschüssigen** Zahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	4760 €	3800 €	3200 €	5000 €	12000 €	7000 €
p %	3,75 %	6,1 %	5,5 %	6,8 %	4 %	3 %
n	$7\ J$	$4\ J$	$8\ J$	$12\ J$	$9\ J$	$5\ J$
K_n						

Aufgabe A3

Auf welches Endkapital K_n wächst ein vorhandenes Kapital K_0 durch die jährlichen **nachschüssigen** Ratenzahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
K_0	15000 €	280000 €	18600 €	54000 €	32500 €	120000 €
R	1200 €	13000 €	900 €	12000 €	1100 €	1800 €
p %	4 %	5 %	6 %	5,6 %	3,8 %	4,3 %
n	$12\ J$	$10\ J$	$8\ J$	$5\ J$	$11\ J$	$6\ J$
K_n						

Aufgabe A4

Auf welches Endkapital K_n sinkt ein vorhandenes Kapital K_0 durch die jährlichen **nachschüssigen** Abhebungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
K_0	280000 €	380000 €	30000 €	60000 €	48000 €	70000 €
R	20000 €	60000 €	5000 €	4200 €	3600 €	8000 €
p %	4,1 %	5,6 %	5,1 %	4 %	4,6 %	2,9 %
n	$10\ J$	$7\ J$	$6\ J$	$8\ J$	$9\ J$	$5\ J$
K_n						

Aufgabe A5

Herr Meyerhuber zahlt am Anfang eines Jahres $20\,000$ € auf ein Sparkonto ein und leistet in den folgenden 5 Jahren am Jahresende jeweils eine Sonderzahlung von $8\,000$ €. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 5. Jahres bei $3\,\%$ Verzinsung?

Aufgabe A6

Zu einem Sparguthaben von $4\,100$ € werden 6 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres $1\,800$ € zugezahlt. Auf welches Kapital wächst das Guthaben bis zum Ende des 6. Jahres bei einem Zinssatz von $5{,}5\,\%$ an?

Aufgabe A7

Wie hoch ist der vorschüssige Rentenendwert K_n für R € Rente, $p\,\%$ Zinssatz und n Jahren Laufzeit?

a) $R = 4\,500\,€;\ p\,\% = 5{,}5\,\%;\ n = 20$ b) $R = 7\,500\,€;\ p\,\% = 6{,}75\,\%;\ n = 8$

c) $R = 3\,600\,€;\ p\,\% = 6\frac{2}{3}\,\%;\ n = 15$ d) $R = 6\,000\,€;\ p\,\% = 8\frac{1}{3}\,\%;\ n = 10$

Aufgabe A8

Herr Fröhlich zahlt 20 Jahre lang am Ende jeden Jahres $3\,500$ € auf ein Sparkonto. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 20. Jahres bei einer jährlichen Verzinsung von $5{,}25\,\%$?

Aufgabe A9

Frau Sparreich zahlt 15 Jahre lang am Anfang jeden Jahres $4\,800$ € auf ein Sonderkonto ein. Die jährliche Verzinsung beträgt $7\,\%$. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 15. Jahres?

Aufgabe A10

Ein Lottogewinn von $10\,000$ € wird am Anfang eines Jahres auf ein Sparkonto eingezahlt; Zinssatz $5\,\%$. Vom Ende des 4. Jahres an sollen jährlich am Jahresende $1\,500$ € zum Guthaben zugezahlt werden. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 20. Jahres?

Aufgabe A11

Frau Trifels verfügt über ein Sparguthaben von $25\,0000$ €. Sie will 10 Jahre lang am Jahresende jeweils $2\,500$ € abheben. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 10. Jahres bei $4{,}5\,\%$ Verzinsung?

Aufgabe A12

Ein Barvermögen von $30\,0000$ € wird zu $6{,}5\,\%$ verzinst. Es sollen am Anfang eines jeden Jahres $3\,000$ € abgehoben werden. Auf wie viel € sinkt das Vermögen bis zum Ende des 14. Jahres?

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{4760\cdot(1{,}0375^7-1)}{1{,}0375-1} = 37311{,}76$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	4760 €	3800 €	3200 €	5000 €	12000 €	7000 €
$p\,\%$	3,75 %	6,1 %	5,5 %	6,8 %	4 %	3 %
n	7 J	4 J	8 J	12 J	9 J	5 J
K_n	37311,76 €	16648,22 €	31109,03 €	88396,41 €	126993,54 €	37163,95 €

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{4760\cdot 1{,}0375\cdot(1{,}0375^7-1)}{1{,}0375-1} = 38710{,}95$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	4760 €	3800 €	3200 €	5000 €	12000 €	7000 €
$p\,\%$	3,75 %	6,1 %	5,5 %	6,8 %	4 %	3 %
n	7 J	4 J	8 J	12 J	9 J	5 J
K_n	38710,95 €	17663,76 €	32820,03 €	94407,37 €	132073,28 €	38278,87 €

Lösung A3

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = K_0\cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = 15000\cdot 1{,}04^{12} + \frac{1200\cdot(1{,}04^{12}-1)}{1{,}04-1} = 42046{,}45$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
K_0	15 000 €	280 000 €	18 600 €	54 000 €	32 500 €	120 000 €
R	1200 €	13 000 €	900 €	12 000 €	1 100 €	1 800 €
$p\,\%$	4 %	5 %	6 %	5,6 %	3,8 %	4,2 %
n	12 J	10 J	8 J	5 J	11 J	6 J
K_n	42 046,45 €	619 603,10 €	38 553,30 €	138 017,93 €	63 666,11 €	165 598,25 €

Lösung A4

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = K_0\cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = 280000\cdot 1{,}041^{10} - \frac{20000\cdot(1{,}041^{10}-1)}{1{,}041-1} = 42046{,}45$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
K_0	280 000 €	380 000 €	30 000 €	60 000 €	48 000 €	70 000 €
R	20 000 €	60 000 €	5 000 €	4 200 €	3 600 €	8 000 €
$p\,\%$	4,1 %	5,6 %	5,1 %	4,0 %	4,6 %	2,9 %
n	10 J	7 J	6 J	8 J	9 J	5 J
K_n	177 232,35 €	58 929,23 €	6 337,89 €	43 414,39 €	32 901,55 €	38 367,76 €

Lösung A5

Gegeben: $K_0 = 20000$ €, $n = 5$, $R = 8000$ € nachschüssig, $p\,\% = 3\,\%$
Gesucht: K_5

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = 20000 \cdot 1{,}03^5 + \frac{8000\cdot(1{,}03^5-1)}{1{,}03-1} = 65658{,}57$

Das Guthaben beträgt am Ende des 5. *Jahres* 65 658,57 €

Lösung A6

Gegeben: $K_0 = 4100$ €, $n = 6$, $R = 1800$ € vorschüssig, $p\,\% = 5{,}5\,\%$
Gesucht: K_6

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = 4100 \cdot 1{,}055^6 + \frac{1800\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^6-1)}{1{,}055-1} = 18733{,}66$

Das Guthaben beträgt am Ende des 6. *Jahres* 18 733,66 €

Lösung A7

Für alle Aufgaben:
Vorschüssige Einzahlungen ohne Anfangskapital.

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

a) $K_{20} = \frac{4500\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^{20}-1)}{1{,}055-1} = 156\,907{,}43$ €

b) $K_8 = \frac{7500\cdot 1{,}055\cdot(1{,}0675^8-1)}{1{,}0675-1} = 76\,259{,}11$ €

c) $K_{20} = \frac{3600\cdot 1{,}0767\cdot(1{,}0767^{15}-1)}{1{,}0767-1} = 95\,273{,}13$ €

d) $K_{20} = \frac{6000\cdot 1{,}0933\cdot(1{,}0933^{10}-1)}{1{,}0933-1} = 92\,605{,}82$ €

Lösung A8

Gegeben: $n = 20$, $R = 3500$ € nachschüssig, $p\,\% = 5{,}25\,\%$
Gesucht: K_{20}

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{3500\cdot(1{,}0525^{20}-1)}{1{,}0525-1} = 118836{,}29$

Das Guthaben beträgt am Ende des 20. *Jahres* 118 836,29 €

Lösung A9

Gegeben: $n = 15$, $R = 4800$ € vorschüssig, $p\,\% = 7\,\%$
Gesucht: K_{15}

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{4800\cdot 1{,}07\cdot(1{,}07^{15}-1)}{1{,}07-1} = 129062{,}66$

Das Guthaben beträgt am Ende des 15. *Jahres* 129 062,66 €.

Lösung A10

Gegeben: $K_0 = 10000$ €, $n = 20$, $p\,\% = 5\,\%$ dann

$n = 17$, $R = 1500$ € nachschüssig, $p\,\% = 5\,\%$

Gesucht: K_{20}

Berechnung der Geldanlage von 10 000 € auf 20 Jahre:

$K_{Lotto} = K_0 \cdot q^{20} = 10000 \cdot 1{,}05^{20} = 26532{,}98$

Berechnung der nachschüssigen Rentenzahlung von 1 500 € auf 17 Jahre:

$K_{Rente} = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{1500\cdot(1{,}05^{17}-1)}{1{,}05-1} = 38760{,}55$

$K_{20} = K_{Lotto} + K_{Rente} = 26532{,}98 + 38760{,}55 = 65293{,}53$

Das Guthaben am Ende des 20. Jahres beträgt 65 293,53 €.

Lösung A11

Gegeben: $K_0 = 25000$ €, $n = 10$, $R = 2500$ € nachschüssig, $p\,\% = 4{,}5\,\%$

Gesucht: K_{10}

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = 25000 \cdot 1{,}045^{10} - \frac{2500\cdot(1{,}045^{10}-1)}{1{,}045-1} = 8103{,}71$

Das Guthaben beträgt am Ende des 10. Jahres nur noch 8 103,71 €

Lösung A12

Gegeben: $K_0 = 30000$ €, $n = 14$, $R = 3000$ € vorschüssig, $p\,\% = 6{,}5\,\%$

Gesucht: K_{14}

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = 30000 \cdot 1{,}065^{14} - \frac{3000\cdot 1{,}065\cdot(1{,}065^{14}-1)}{1{,}065-1} = 2899{,}72$

Das Guthaben ist zum Ende des 14. Jahres auf 2 899,72 € gesunken.

Aufgabe A1

Berechne die fehlenden Größen bei **nachschüssigen** Zahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R		2400 €	7500 €	1200 €		5000 €
p %	3,5 %	5 %	4,5 %	3,9 %	3 %	4,2 %
n	9 J				10 J	4 J
K_n	13479 €	38201 €	155888 €	11017 €	74515 €	

Aufgabe A2

Berechne die fehlenden Größen bei **vorschüssigen** Zahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	550 €		12000 €		580 €	
p %	3 %	5,5 %	6 %	3,6 %	4,2 %	2,8 %
n		10 J		8 J		5 J
K_n	4341 €	20357 €	88726 €	37643 €	9185 €	9377 €

Aufgabe A3

Zur Finanzierung der späteren Berufsausbildung zahlen die Eltern bei der Geburt ihres Kindes 2 000 € auf ein Sparkonto ein und zu jedem Geburtstag weitere 2 000 €. Die letzte Zahlung erfolgt am 18. Geburtstag (Vollendung des 18. Lebensjahres). Wie hoch ist das Guthaben am 18. Geburtstag bei einer jährlichen Verzinsung von 5,5 %?
Hinweis zur Lösung: Stelle die Einzahlungen auf der Zeitgeraden dar.

Aufgabe A4

Herr Weber will in 8 Jahren 50 000 € durch gleichgroße Einzahlungen sparen.

a) Wie viel muss er am Ende jeden Jahres einzahlen, damit bei 6,5 % Verzinsung am Ende des 8. Jahres 50 000 € zur Verfügung stehen?

b) Wie hoch sind die jährlichen Einzahlungen, wenn in 10 Jahren bei 7 % Verzinsung 100 000 € gespart werden sollen?

Aufgabe A5

Zur Finanzierung des Studiums seines Sohnes will ein Vater bis zum Ende von 7 Jahren 40 000 € sparen. Er beabsichtigt, 7 gleich große Beträge zu Beginn eines jeden Jahres auf ein Sparkonto einzuzahlen.
Wie hoch ist jede Einzahlung bei einem Zinssatz von 6,75 %?
Wie hoch ist die jährliche Einzahlung bei einem Zinssatz von 7,25 %?

Aufgabe A6
Herr Kunze will am Ende jeden Jahres $2\,500$ € auf ein Sparkonto so lange einzahlen, bis $30\,000$ € Guthaben überschritten werden. Wie viele Jahre muss er bei einem Zinssatz von $4{,}5\,\%$ sparen?

Aufgabe A7
Wie viele Jahre muss man am Anfang jeden Jahres $4\,250$ € auf ein Sparkonto einzahlen, bis am Ende des Jahres der letzten Einzahlung $100\,000$ € Guthaben überschritten werden? Die Bank gewährt einen Zinssatz von $5{,}5\,\%$.

Aufgabe A8
Herr Kugler zahlt 10 Jahre lang am Ende jeden Jahres $3\,800$ € auf ein Sparkonto. Bis zum Ende des 4. Jahres beträgt der Zinssatz $6\,\%$, ab Beginn des 5. Jahres $6{,}5\,\%$. Wie viel € beträgt das Guthaben am Ende des 10. Jahres?

Aufgabe A9
Es werden 15 Jahre lang jeweils am Beginn eines Jahres $2\,700$ € auf ein Konto eingezahlt. Die Verzinsung beträgt bis zum Ende des 8. Jahres $6\,\%$, ab Beginn des 9. Jahres $5{,}5\,\%$. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 15. Jahres?

Aufgabe A10
Herr Meister möchte sich in fünf Jahren ein Auto für $50\,000$ € kaufen. Am Anfang des ersten Jahres zahlt er $1\,200$ € bei seiner Bank ein, die ihm $3{,}5\,\%$ Zinsen gewährt. Wie hoch sind die Raten, die er jeweils am Ende des 1. bis zum Ende des 5. Jahres einzahlen muss, wenn er danach über die $50\,000$ € verfügen will?

Aufgabe A11
Eine Sparerin legt 12 Jahre lang am Ende eines Jahres $9\,000$ € zu $4\,\%$ auf Zinseszinsen. Wie hoch ist die Gesamtsumme am Ende des 12. Jahres?

Aufgabe A12
Herr Schneider hat ein Sparguthaben von $15\,000$ €, das zu $4{,}75\,\%$ verzinst wird. Am Ende des 3. Jahres beginnt er, jährlich $1\,200$ € jeweils am Jahresende abzuheben. Wie hoch ist sein Guthaben am Ende des 12. Jahres?

Aufgabe A13
Zu einem Kapital K_0 werden 8 Jahre lang am Jahresende jeweils 600 € zugezahlt. Am Ende des 8. Jahres beträgt das Guthaben $12\,371{,}38$ €. Wie hoch war das Anfangskapital K_0 bei einem Zinssatz von $4\,\%$?

Aufgabe A14
Frau Lehmann zahlt 10 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres $1\,500$ € zu ihrem Sparguthaben K_0. Am Ende des 10. Jahres ist das Guthaben bei $6\,\%$ Verzinsung auf $43\,343{,}06$ € angewachsen. Berechne das Anfangskapital K_0.

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{R\cdot(1{,}035^9-1)}{1{,}035-1} = 10{,}36849581 \cdot R$

$13479 = 10{,}36849581 \cdot R \qquad | \quad :10{,}36849581$

$R = 1300$

Detaillierte Lösung für b)

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{2400\cdot(1{,}05^n-1)}{1{,}05-1} = 48000 \cdot (1{,}05^n - 1) = 48000 \cdot 1{,}05^n - 48000$

$38201 = 48000 \cdot 1{,}05^n - 48000 \qquad | \quad +48000$

$86201 = 48000 \cdot 1{,}05^n \qquad | \quad :48000$

$1{,}05^n = 1{,}765851467 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln\,(1{,}05) = ln\,(1{,}765851467) \qquad | \quad :ln\,(1{,}05)$

$n = 12$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	1 300 €	2400 €	7500 €	1200 €	6 500 €	5000 €
p %	3,5 %	5 %	4,5 %	3,9 %	3 %	4,2 %
n	9 J	12 J	15 J	8 J	10 J	4 J
K_n	13479 €	38201 €	155888 €	11017 €	74515 €	21 295,65 €

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{550\cdot 1{,}030\cdot(1{,}03^n-1)}{1{,}03-1} = 18883{,}33 \cdot (1{,}03^n - 1)$

$4341 = 18883{,}33 \cdot 1{,}03^n - 18883{,}33 \qquad | \quad +18883{,}22$

$23224{,}33 = 18883{,}33 \cdot 1{,}03^n \qquad | \quad :18883{,}33$

$1{,}03^n = 1{,}2299 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln\,(1{,}03) = ln\,(1{,}2299) \qquad | \quad :ln\,(1{,}03)$

$n = 7$

Detaillierte Lösung für b)

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{R\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^{10}-1)}{1{,}055-1} = 13{,}5835 \cdot R$

$20357 = 13{,}5835 \cdot R \qquad | \quad :13{,}5835$

$R = 1498{,}67$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	550 €	1500 €	12000 €	4000 €	580 €	1725 €
p %	3 %	5,5 %	6 %	3,6 %	4,2 %	2,8 %
n	7 J	10 J	6 J	8 J	12 J	5 J
K_n	4341 €	20375 €	88726 €	37643 €	9185 €	9377 €

Lösung A3

18 vorschüssige, jährliche Einzahlung zu den jeweiligen Geburtstagen zuzüglich einer weiteren Einzahlung bei Vollendung des Lebensjahres, die unverzinst bleibt.

Gegeben: $n = 18$, $R = 2000$ € vorschüssig, $p\ \% = 5{,}5\ \%$

Gesucht: $K_{ges} = K_{18} + 2000$

$K_{ges} = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q-1} + R = \frac{2000 \cdot 1{,}055 \cdot (1{,}055^{18} - 1)}{1{,}055-1} + 2000 = 64205{,}34$

Das Guthaben beträgt bei Vollendung des 18. Lebensjahres 64 205,34 €

Lösung A4

a) Gegeben: $n = 8$, $K_8 = 50000$ €, $p\ \% = 6{,}5\ \%$ nachschüssig

Gesucht: R

$K_8 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$50000 = \frac{R \cdot (1{,}065^8 - 1)}{1{,}065-1} \quad | \cdot 0{,}065$

$50000 \cdot 0{,}065 = 0{,}655 \cdot R \quad | : 0{,}655$

$R = 4961{,}83$

Herr Weber muss jeweils 4 961,83 € einzahlen.

b) Gegeben: $n = 10$, $K_{10} = 100000$ €, $p\ \% = 7\ \%$ nachschüssig

Gesucht: R

$K_{10} = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$100000 = \frac{R \cdot (1{,}07^{10} - 1)}{1{,}07-1} \quad | \cdot 0{,}07$

$100000 \cdot 0{,}07 = 0{,}96715 \cdot R \quad | : 0{,}96715$

$R = 7237{,}75$

Herr Weber muss jeweils 7 237,75 € einzahlen.

Lösung A5

Gegeben: $n = 7$, $K_7 = 40000$ €, $p\ \% = 6{,}75\ \%$ nachschüssig

Gesucht: R

$K_7 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$40000 = \frac{R \cdot (1{,}0675^7 - 1)}{1{,}0675-1} \quad | \cdot 0{,}0675$

$40000 \cdot 0{,}0675 = 0{,}5797 \cdot R \quad | : 0{,}5797$

$R = 4657{,}56$

Der Vater muss jeweils 4 657,56 € einzahlen (bei 6,75 % Zinssatz).

Lösung für 7,25 % Zinssatz:

$K_7 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$40000 = \frac{R \cdot (1{,}0725^7 - 1)}{1{,}0725-1} \quad | \cdot 0{,}0725$

$40000 \cdot 0{,}0725 = 0{,}633223 \cdot R \quad | : 0{,}633223$

$R = 4586{,}95$

Der Vater muss jeweils 4 586,95 € einzahlen (bei 7,25 % Zinssatz).

Lösung A6

Gegeben: $R = 2500$, $K_n > 30000$ €, $p\,\% = 4{,}5\,\%$ nachschüssig
Gesucht: n

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$30000 < \frac{2500\cdot(1{,}045^n-1)}{1{,}045-1} \quad | \cdot 0{,}045$

$30000\cdot 0{,}045 < 2500\cdot 1{,}045^n - 2500 \quad | +2500$

$3850 < 2500\cdot 1{,}045^n \quad | :2500$

$1{,}54 > 1{,}045^n \quad | \ ln$

$ln(1{,}54) < n\cdot ln\,(1{,}045) \quad | \cdot ln\,(1{,}045)$

$n > \frac{ln\,(1{,}54)}{ln\,(1{,}045)} = 9{,}8$

Herr Kunze muss 10 *Jahre lang sparen.*

Lösung A7

Gegeben: $R = 4250$, $K_n > 100000$ €, $p\,\% = 5{,}5\,\%$ vorschüssig
Gesucht: n

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$100000 < \frac{4250\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^n-1)}{1{,}055-1} \quad | \cdot 0{,}055$

$100000\cdot 0{,}055 < 4483{,}75\cdot 1{,}055^n - 4483{,}75 \quad | +4483{,}75$

$9983{,}75 < 4483{,}75\cdot 1{,}055^n \quad | :4483{,}75$

$2{,}226652 > 1{,}055^n \quad | \ ln$

$ln(2{,}226652) < n\cdot ln\,(1{,}055) \quad | \cdot ln\,(1{,}055)$

$n > \frac{ln\,(2{,}226652)}{ln\,(1{,}055)} = 14{,}95$

Man muss 15 *Jahre lang einzahlen.*

Lösung A8

Gegeben: $R = 3800$, $n_1 = 4$, $p_1\,\% = 6\,\%$ nachschüssig, $n_2 = 6$, $p_2\,\% = 6{,}5\,\%$
Gesucht: K_{10}

1. Berechnung des Guthabens : K_4

   $K_4 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{3800\cdot(1{,}06^4-1)}{1{,}06-1} = 16623{,}54$

2. Berechnung K_{10} aus 6 Jahren Verzinsung K_4 und weiteren 6 nachschüssigen Einzahlungen mit $6{,}5\,\%$ Zinssatz.

   $K_{10} = K_4\cdot q_2^6 + \frac{R\cdot(q_2^n-1)}{q_2-1} = 16623{,}54\cdot 1{,}065^6 + \frac{3800\cdot(1{,}065^6-1)}{1{,}065-1} = 51098{,}28$

Das Guthaben am Ende des $10.$ *Jahres beträgt* $51\,098{,}28$ €.

Lösung A9

Gegeben: $R = 2700$, $n_1 = 8$, $p_1\,\% = 6\,\%$ vorschüssig, $n_2 = 7$, $p_2\,\% = 5{,}5\,\%$
Gesucht: K_{15}

1. Berechnung des Guthabens : K_8

   $K_8 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{2700\cdot 1{,}06\cdot(1{,}06^8-1)}{1{,}06-1} = 28326{,}55$

2. Berechnung K_{15} aus 7 Jahren Verzinsung K_8 und weiteren 7 vorschüssigen Einzahlungen mit $5{,}5\,\%$ Zinssatz.

   $K_{15} = K_8\cdot q_2^7 + \frac{R\cdot q_2\cdot(q_2^7-1)}{q_2-1} = 28326{,}55\cdot 1{,}055^7 + \frac{2700\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^7-1)}{1{,}055-1} = 64754{,}29$

Das Guthaben am Ende des $15.$ *Jahres beträgt* $64\,754{,}29$ €.

Lösung A10

Gegeben: $K_0 = 1200$ €, $K_5 = 50000$ €, $n = 5$, $p\,\% = 3{,}5\,\%$ nachschüssig
Gesucht: R

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$50000 = 1200 \cdot 1{,}035^5 + \frac{R\cdot(1{,}035^5-1)}{1{,}035-1} = 1425{,}22 + \frac{R\cdot(1{,}035^5-1)}{1{,}035-1}$

$50000 - 1425{,}22 = \frac{R\cdot(1{,}035^5-1)}{1{,}035-1} \quad | \quad \cdot 0{,}035$

$1700{,}18 = 0{,}187686 \cdot R \quad | \quad : 0{,}187686$

$R = 9058{,}63$

Herr Meister muss jeweils am Ende des 1. *bis zum Ende des* 5. *Jahres* 9 058,63 € *einzahlen.*

Lösung A11

Gegeben: $R = 9000$ €, $n = 12$, $p\,\% = 4\,\%$ nachschüssig
Gesucht: K_{12}

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{9000\cdot(1{,}04^{12}-1)}{1{,}04-1} = 135232{,}25$

Die Gesamtsumme am Ende des 12. *Jahres beträgt* 135 232,25 €.

Lösung A12

Zunächst Berechnung der Verzinsung von 15 000 € im ersten und zweiten Jahr:

$K_2 = K_0 \cdot q^2 = 15000 \cdot 1{,}0475^2 = 16458{,}84$

Dieses Kapital wird nun zum Anfangskapital für die Jahre mit Abhebungen.
Gegeben: $K_0 = 16458{,}84$ €, $R = 1200$ €, $n = 10$, $p\,\% = 4{,}75\,\%$ nachschüssig
Gesucht: K_n

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = 16458{,}84 \cdot 1{,}0475^{10} - \frac{1200\cdot(1{,}0475^{10}-1)}{1{,}0475-1} = 11259{,}68$

Das Guthaben am Ende des 12. *Jahres beträgt* 11 259,68 €.

Lösung A13

Gegeben: $K_8 = 12371{,}38$ €, $R = 600$ €, $n = 8$, $p\,\% = 4\,\%$ nachschüssig
Gesucht: K_0

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$12371{,}38 = K_0 \cdot 1{,}04^8 + \frac{600\cdot(1{,}04^8-1)}{1{,}04-1}$

$12371{,}38 = K_0 \cdot 1{,}04^8 + 5528{,}535756 \quad | \quad -5528{,}535756$

$6842{,}84 = 1{,}36856905 \cdot K_0 \quad | \quad : 1{,}36856905$

$K_0 = 5000$

Das Anfangskapital K_0 *betrug* 5 000 €.

Lösung A14

Gegeben: $K_{10} = 43343{,}06$ €, $R = 1500$ €, $n = 10$, $p\,\% = 6\,\%$ vorschüssig
Gesucht: K_0

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$43343{,}06 = K_0 \cdot 1{,}06^{10} + \frac{1500\cdot 1{,}06\cdot(1{,}06^{10}-1)}{1{,}06-1}$

$43343{,}06 = 1{,}790847697 \cdot K_0 + 250957{,}46 \quad | \quad -250957{,}46$

$22385{,}60 = 1{,}790847697 \cdot K_0 \quad | \quad : 1{,}790847697$

$K_0 = 12500$

Das Anfangskapital K_0 *betrug* 12 500 €.

Aufgabe A1

Der Rentner Fritz Kluge hebt 12 Jahre lang von seinem Sparkonto am Jahresende $2\,400$ € ab und verfügt am Ende des 12. Jahres noch über ein Guthaben von $15\,049{,}12$ €.
Wie hoch war das Anfangsguthaben K_0 bei einem Zinssatz von $5{,}5\,\%$?

Aufgabe A2

Ein Sparguthaben von $8\,365$ € soll durch gleichmäßige Einzahlungen bis zum Ende des 5. Jahres auf $20\,000$ € anwachsen. Wie viele € sind jeweils am Jahresende bei einem Zinssatz von $4{,}5\,\%$ einzuzahlen?

Aufgabe A3

Frau Münch will ihr Sparguthaben von $11\,840$ € durch gleichgroße Einzahlungen bis zum Ende des 8. Jahres auf $30\,000$ € erhöhen. Die Zahlungen werden am Jahresanfang geleistet; der Zinssatz beträgt $5{,}25\,\%$.
Über wie viel € lautet eine Zahlung?

Aufgabe A4

Herr Weber verfügt über ein Sparguthaben von $25\,090$ €, das zu $6\,\%$ verzinst wird. Er möchte in den nächsten 10 Jahren jeweils am Jahresende einen gleich großen Betrag abheben. Das Guthaben soll aber am Ende des 10. Jahres noch $10\,000$ € betragen. Wie viel € kann Herr Weber jährlich abheben?

Aufgabe A5

Der in Ruhestand tretende Erich Gutekunst will sein Sparguthaben in Höhe von $38\,000$ € in den nächsten 15 Jahren durch gleich große Abhebungen aufbrauchen. Wie viel € kann er jeweils am Jahresende bis zum Ende des 15. Jahres abheben, wenn ein Zinssatz von $5{,}5$ % gewährt wird?

Aufgabe A6

Zu $15\,660$ € Sparguthaben sollen am Jahresende jeweils $6\,000$ € zugezahlt werden. Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben $50\,000$ €? Zinssatz: $3\,\%$.

Aufgabe A7

Berechne den nachschüssigen Rentenbarwert K_0 für R € Rente, $p\,\%$ Zinssatz und n Jahren Laufzeit.

a) $R = 7500\text{ €}, p\,\% = 5{,}5\,\%, n = 10$ b) $R = 4800\text{ €}, p\,\% = 6\,\%, n = 15$
c) $R = 9000\text{ €}, p\,\% = 5\,\%, n = 12$ d) $R = 2700\text{ €}, p\,\% = 6{,}5\,\%, n = 20$

Aufgabe A8

Berechne den vorschüssigen Rentenbarwert K_0 für R € Rente, $p\,\%$ Zinssatz und n Jahren Laufzeit.

a) $R = 15000\text{ €}, p\,\% = 7\,\%, n = 8$ b) $R = 7800\text{ €}, p\,\% = 6{,}5\,\%, n = 15$
c) $R = 3300\text{ €}, p\,\% = 7{,}5\,\%, n = 12$ d) $R = 5400\text{ €}, p\,\% = 5{,}5\,\%, n = 20$

Aufgabe A9

Wie viel € sind einmalig einzuzahlen, um davon 10 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von $10\,000$ € beziehen zu können? Zinssatz: $5{,}5$ %.

Aufgabe A10

Herr Knaus will einmalig so viele € einzahlen, dass er davon 15 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres eine Rente von $8\,000$ € beziehen kann. Welchen Betrag muss er bei einem Zinssatz von $6{,}75$ % anlegen?

Aufgabe A11

Aus einer Erbschaft soll 20 Jahre lang eine nachschüssige Rente von $6\,000$ € gezahlt werden. Der Erbe wünscht die sofortige Auszahlung seines Rentenanspruchs in einem Betrag. Wie viele € sind auszuzahlen, wenn mit $5{,}5$ % Jahreszinsen gerechnet wird?

Aufgabe A12

Von $80\,000$ € Erbschaft soll eine vorschüssige Rente, beginnend im ersten Jahr, gezahlt werden. Wie hoch ist die Rente bei $4{,}5$ % Jahreszinsen und einer Laufzeit von

a) 15 Jahren

b) 20 Jahren

Aufgabe A13

Aus $35\,000$ € angelegtem Kapital soll eine nachschüssige Rente von $4\,400$ € gezahlt werden. Die Verzinsung beträgt 7 %.
Wie viele Jahre kann man die Rente beziehen?

Aufgabe A14

Frau Günther will aus einem Erbschaftsanteil von $70\,000$ € eine vorschüssige Rente von $6\,300$ € beziehen. Wie viele Jahre lang erhält sie die Rente, wenn eine Verzinsung von $6{,}5$ % zugrunde liegt?

Aufgabe A15

Ein Kapital von $30\,000$ € wird mit $6{,}5$ % jährlich verzinst. Wie viele € können 12 Jahre lang

a) am Ende

b) am Anfang eines jeden Jahres

abgehoben werden, wenn das Kapital aufgebraucht werden soll?

Lösung A1

Gegeben: $K_{12} = 15049{,}12$ €, $n = 12$, $R = 2400$ € nachschüssig, $p\,\% = 5{,}5\,\%$
Gesucht: K_0

$K_{12} = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$15049{,}12 = K_0 \cdot 1{,}055^{12} - \frac{2400\cdot(1{,}055^{12}-1)}{1{,}055-1}$

$15049{,}12 = 1{,}901207486 \cdot K_0 - 39325{,}42 \quad | \quad +39325{,}42$

$54374{,}54 = 1{,}901207486 \cdot K_0 \quad | \quad : 1{,}901207486$

$K_0 = 28600$

Das Anfangsguthaben betrug 28 600 €.

Lösung A2

Gegeben: $K_0 = 8365$ €, $n = 5$, $K_5 = 20000$ €, $p\,\% = 4{,}5\,\%$
Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$20000 = 8365 \cdot 1{,}045^5 + \frac{R\cdot(1{,}045^5-1)}{1{,}045-1}$

$20000 = 10424{,}31 + 5{,}47071 \cdot R \quad | \quad -10424{,}31$

$9575{,}69 = 5{,}47071 \cdot R \quad | \quad : 5{,}47071$

$R = 1750{,}36$

Am Jahresende sind jeweils 1 750,36 € *einzuzahlen.*

Lösung A3

Gegeben: $K_0 = 11840$ €, $n = 8$, $K_8 = 30000$ €, $p\,\% = 5{,}25\,\%$
Gesucht: R vorschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$30000 = 11840 \cdot 1{,}0525^8 + \frac{R\cdot 1{,}0525\cdot(1{,}0525^8-1)}{1{,}0525-1}$

$30000 = 17829{,}06 + 10{,}14075 \cdot R \quad | \quad -17829{,}06$

$12170{,}94 = 10{,}14075 \cdot R \quad | \quad : 10{,}14075$

$R = 1200{,}20$

Am Jahresanfang sind jeweils 1 200,20 € *einzuzahlen.*

Lösung A4

Gegeben: $K_0 = 25090$ €, $n = 10$, $K_{10} = 10000$ €, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$10000 = 25090 \cdot 1{,}06^{10} - \frac{R\cdot(1{,}06^{10}-1)}{1{,}06-1}$

$10000 = 44932{,}37 - 13{,}180795 \cdot R \quad | \quad -44932{,}37$

$-34932{,}37 = -13{,}180795 \cdot R \quad | \quad : (-13{,}180795)$

$R = 2650{,}25$

Herr Weber kann jährlich 2 650,25 € *abheben.*

Lösung A5

Gegeben: $K_0 = 38000\ €$, $n = 15$, $K_{15} = 0\ €$, $p\,\% = 5{,}5\ \%$
Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 38000 \cdot 1{,}055^{15} - \frac{R\cdot(1{,}055^{15}-1)}{1{,}055-1}$

$0 = 84834{,}11 - 22{,}40866358 \cdot R \qquad | \quad -84831{,}11$

$-84834{,}11 = -22{,}40866358 \cdot R \qquad | \quad :(-22{,}40866358)$

$R = 3785{,}77$

Herr Gutekunst kann jährlich 3 785,77 € *abheben.*

Lösung A6

Gegeben: $K_0 = 15660\ €$, $R = 6000\ €$ nachschüssig, $K_n = 50000\ €$, $p\,\% = 6{,}5\ \%$
Gesucht: n

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$50000 = 15660 \cdot 1{,}03^n + \frac{6000\cdot(1{,}03^n-1)}{1{,}03-1}$

$50000 = 15660 \cdot 1{,}03^n + 200000 \cdot 1{,}03^n - 200000$

$50000 = 1{,}03^n \cdot (15660 + 200000) - 200000$

$50000 = 215660 \cdot 1{,}03^n - 200000 \qquad | \quad +200000$

$250000 = 215660 \cdot 1{,}03^n \qquad | \quad :215660$

$1{,}15923213 = 1{,}03^n \qquad | \quad ln$

$ln(1{,}15923213) = n \cdot ln\,(1{,}03) \qquad | \quad :ln\,(1{,}03)$

$n = 5$

Es müssen 5 *Jahre lang jeweils am Jahresende* 6 000 € *eingezahlt werden.*

Lösung A7

$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad | \quad :q^n$

$K_0 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)}$

a) $K_0 = \frac{7500\cdot(1{,}055^{10}-1)}{1{,}055^{10}\cdot(1{,}055-1)} = 56532{,}19\ €$ b) $K_0 = \frac{4800\cdot(1{,}06^{15}-1)}{1{,}06^{15}\cdot(1{,}06-1)} = 46618{,}80\ €$

c) $K_0 = \frac{9000\cdot(1{,}05^{12}-1)}{1{,}05^{12}\cdot(1{,}05-1)} = 79769{,}26\ €$ b) $K_0 = \frac{2700\cdot(1{,}065^{20}-1)}{1{,}065^{20}\cdot(1{,}065-1)} = 29749{,}97\ €$

Lösung A8

$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad | \quad :q^n$

$K_0 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)}$

a) $K_0 = \frac{15000\cdot 1{,}07\cdot(1{,}07^{8}-1)}{1{,}07^{8}\cdot(1{,}07-1)} = 95839{,}34\ €$ b) $K_0 = \frac{7800\cdot 1{,}065\cdot(1{,}065^{15}-1)}{1{,}065^{15}\cdot(1{,}065-1)} = 78107{,}97\ €$

c) $K_0 = \frac{3300\cdot 1{,}075\cdot(1{,}075^{12}-1)}{1{,}075^{12}\cdot(1{,}075-1)} = 27440{,}90\ €$ b) $K_0 = \frac{5400\cdot 1{,}075\cdot(1{,}055^{20}-1)}{1{,}055^{20}\cdot(1{,}055-1)} = 68081{,}33\ €$

Lösung A9

Gegeben: $R = 10\,000\,€$ nachschüssig, $n = 10$, $p\,\% = 5{,}5\,\%$
Gesucht: K_0

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad | \quad :q^n$$

$$K_0 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)} = \frac{10000\cdot(1{,}055^{10}-1)}{1{,}055^{10}\cdot(1{,}055-1)} = 75376{,}26$$

Es sind 75 376,26 € *einmalig einzuzahlen.*

Lösung A10

Gegeben: $R = 8\,000\,€$ vorschüssig, $n = 15$, $p\,\% = 6{,}75\,\%$
Gesucht: K_0

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad | \quad :q^n$$

$$K_0 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)} = \frac{8000\cdot1{,}0675\cdot(1{,}0675^{15}-1)}{1{,}0675^{15}\cdot(1{,}0675-1)} = 79024{,}84$$

Es sind 79 024,84 € *einmalig einzuzahlen.*

Lösung A11

Gegeben: $R = 6\,000\,€$ nachschüssig, $n = 20$, $p\,\% = 5{,}5\,\%$
Gesucht: K_0

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad | \quad :q^n$$

$$K_0 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)} = \frac{6000\cdot(1{,}055^{20}-1)}{1{,}055^{20}\cdot(1{,}055-1)} = 71702{,}29$$

Es sind 71 702,29 € *sofort auszuzahlen.*

Lösung A12

Gegeben: $K_0 = 80000\,€$, $p\,\% = 4{,}5\,\%$
Gesucht: R vorschüssig

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad | \quad :q^n$$

$$K_0 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)}$$

a) $n = 15$

$$80000 = \frac{R\cdot1{,}045\cdot(1{,}045^{15}-1)}{1{,}045^{15}\cdot(1{,}045-1)}$$

$$80000 = 11{,}222825\cdot R \qquad | \quad :11{,}222825$$

$$R = 7128{,}33$$

b) $n = 20$

$$80000 = \frac{R\cdot1{,}045\cdot(1{,}045^{20}-1)}{1{,}045^{20}\cdot(1{,}045-1)}$$

$$80000 = 13{,}59329\cdot R \qquad | \quad :13{,}59329$$

$$R = 5885{,}26$$

Lösung A13

Gegeben: $K_0 = 35000$ €, $R = 4400$ € nachschüssig, $K_n = 0$ €, $p\,\% = 7\,\%$

Gesucht: n

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 35000 \cdot 1{,}07^n - \frac{4400\cdot(1{,}07^n-1)}{1{,}07-1}$

$0 = 35000 \cdot 1{,}07^n - 62857{,}14 \cdot 1{,}07^n + 62857{,}14$

$0 = 1{,}07^n \cdot (35000 - 62857{,}14) + 62857{,}14$

$0 = -27857{,}14 \cdot 1{,}07^n + 62857{,}14 \quad | \quad -62857{,}14$

$-62857{,}14 = -27857{,}14 \cdot 1{,}07^n \quad | \quad :(-27857{,}14)$

$2{,}25641 = 1{,}07^n \quad | \quad ln$

$ln(2{,}25641) = n \cdot ln\,(1{,}07) \quad | \quad :ln\,(1{,}07)$

$n = 12$

Die Rente kann 12 *Jahre lang bezahlt werden.*

Lösung A14

Gegeben: $K_0 = 70000$ €, $R = 6300$ € vorschüssig, $K_n = 0$ €, $p\,\% = 6{,}5\,\%$

Gesucht: n

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 70000 \cdot 1{,}065^n - \frac{6300\cdot 1{,}065\cdot(1{,}065^n-1)}{1{,}065-1}$

$0 = 70000 \cdot 1{,}065^n - 103223{,}08 \cdot 1{,}065^n + 103223{,}08$

$0 = 1{,}065^n \cdot (70000 - 103223{,}08) + 103223{,}08$

$0 = -33223{,}08 \cdot 1{,}065^n + 103223{,}08 \quad | \quad -103223{,}08$

$-103223{,}08 = -33223{,}08 \cdot 1{,}065^n \quad | \quad :(-33223{,}08)$

$3{,}106969 = 1{,}065^n \quad | \quad ln$

$ln(3{,}106969) = n \cdot ln\,(1{,}065) \quad | \quad :ln\,(1{,}065)$

$n = 18$

Frau Günther kann die Rente 18 *Jahre lang beziehen.*

Lösung A15

Gegeben: $K_0 = 30000$ €, $n = 12$; $K_n = 0$ €, $p\,\% = 6{,}5\,\%$

a) Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 30000 \cdot 1{,}065^{12} - \frac{R\cdot(1{,}065^{12}-1)}{1{,}065-1}$

$0 = 63872{,}89 - 17{,}37071141 \cdot R$

$17{,}37071141 \cdot R = 63872{,}89 \quad | \quad :17{,}37071141$

$R = 3677{,}06$ €

b) Gesucht: R vorschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 30000 \cdot 1{,}065^{12} - \frac{R\cdot 1{,}065\cdot(1{,}065^{12}-1)}{1{,}065-1}$

$0 = 63872{,}89 - 18{,}49980765 \cdot R$

$18{,}49980765 \cdot R = 63872{,}89 \quad | \quad :18{,}49980765$

$R = 3452{,}62$ €

Aufgabe A1
Welches Kapital K_0 bringt bei p % Jahreszinsen eine nachschüssige ewige Rente R:

a) $R = 15000$ €, $p\,\% = 6\,\%$ b) $R = 18000$ €, $p\,\% = 7{,}5\,\%$
c) $R = 24000$ €, $p\,\% = 5\,\%$ d) $R = 9000$ €, $p\,\% = 4{,}5\,\%$

Aufgabe A2
Wie hoch muss ein Kapital K_0 sein, damit man bei p % Jahreszinsen eine vorschüssige, ewige Rente R beziehen kann?

a) $R = 10000$ €, $p\,\% = 5\,\%$ b) $R = 20000$ €, $p\,\% = 6{,}25\,\%$
c) $R = 12000$ €, $p\,\% = 7{,}5\,\%$ d) $R = 6600$ €, $p\,\% = 5{,}5\,\%$

Aufgabe A3
Herr Meyerding bezieht eine vorschüssige ewige Jahresrente von 18 000 €. Wie hoch ist der Barwert bei einem Jahreszins von 6 %?

Aufgabe A4
Frau Glückselig möchte einen Teil ihres Lotteriegewinnes zum Bezug einer nachschüssigen ewigen Rente von jährlich 10 000 € verwenden. Wie viel € muss sie bereitstellen, wenn der Jahreszinssatz $6\frac{2}{3}$ % beträgt?

Aufgabe A5
Aus einer Stiftung in Höhe von 500 000 € soll am Jahresende der Zinsertrag als ewige Rente für Ausbildungszwecke ausgezahlt werden. Wie viele € stehen jährlich bei 5,75 % Verzinsung zur Verfügung?

Aufgabe A6
Welche vorschüssige ewige Rente kann Frau Kugler aus 191 700 € Kapital bei einem Jahreszinssatz von 6,5 % beziehen?

Aufgabe A7
Herr Gärtner erhält aus 168 800 € Kapital eine vorschüssige ewige Jahresrente in Höhe von 8 800 €. Berechne den Jahreszinssatz.

Aufgabe A8
Herr Lustig will seine vorschüssige ewige Jahresrente von 7 500 € in eine 20-jährige nachschüssige Jahresrente umwandeln. Wie viel € beträgt die nachschüssige Jahresrente bei 6 % Verzinsung, wenn das Kapital aufgebraucht werden soll?

Lösung A1

Gegeben: $n = 1$, R nachschüssig, $p\,\%$

Gesucht: K_0

$K_0 = \frac{R}{q-1}$

a) $K_0 = \frac{15000}{1{,}06-1} = 250000\ €$

b) $K_0 = \frac{18000}{1{,}075-1} = 240000\ €$

c) $K_0 = \frac{24000}{1{,}05-1} = 480000\ €$

d) $K_0 = \frac{9000}{1{,}045-1} = 200000\ €$

Lösung A2

Gegeben: $n = 1$, R vorschüssig, $p\,\%$

Gesucht: K_0

$K_0 = \frac{q \cdot R}{q-1}$

a) $K_0 = \frac{1{,}05 \cdot 10000}{1{,}05-1} = 210000\ €$

b) $K_0 = \frac{1{,}0625 \cdot 20000}{1{,}0625-1} = 340000\ €$

c) $K_0 = \frac{1{,}075 \cdot 12000}{1{,}075-1} = 172000\ €$

d) $K_0 = \frac{1{,}055 \cdot 6600}{1{,}055-1} = 126600\ €$

Lösung A3

Gegeben: $n = 1$, $R = 18000\ €$ vorschüssig, $p\,\% = 6\,\%$

Gesucht: K_0

$K_0 = \frac{q \cdot R}{q-1} = \frac{1{,}06 \cdot 18000}{1{,}06-1} = 318000\ €$

Der Barwert beträgt $318\,000\ €$.

Lösung A4

Gegeben: $n = 1$, $R = 10000\ €$ nachschüssig, $p\,\% = 6\frac{2}{3}\,\%$

Gesucht: K_0

$K_0 = \frac{R}{q-1} = \frac{10000}{\frac{6\frac{2}{3}}{100}-1} = 150000\ €$

Frau Glückselig muss $150\,000\ €$ *bereitstellen.*

Lösung A5

Gegeben: $n = 1$, $K_0 = 500000\ €$, $p\,\% = 5{,}75\,\%$

Gesucht: R nachschüssig

$K_0 = \frac{R}{q-1} \Rightarrow R = K_0 \cdot (q-1)$

$R = 500000 \cdot (1{,}0575 - 1) = R = 28750$

Es stehen jährlich $28\,750\ €$ *bereit.*

Lösung A6

Gegeben: $n = 1$, $K_0 = 191700\ €$, $p\,\% = 6{,}5\,\%$

Gesucht: R vorschüssig

$K_0 = \frac{q \cdot R}{q-1} \Rightarrow R = \frac{K_0 \cdot (q-1)}{q}$

$R = \frac{191700 \cdot (1{,}065-1)}{1{,}065} = 11700$

Frau Kugler kann eine vorschüssige ewige Jahresrente von $11\,700\ €$ *beziehen.*

Lösung A7

Gegeben: $n = 1$, $K_0 = 168800$ €, $R = 8800$ € vorschüssig
Gesucht: $p\ \%$

$K_0 = \frac{q \cdot R}{q-1} \Rightarrow q = \frac{K_0}{K_0 - R}$

$q = \frac{168800}{168800 - 8800} = 1{,}055$

$p\ \% = 5{,}5\ \%$

Der Jahreszinssatz ist $5{,}5\ \%$.

Lösung A8

Zunächst Berechnung von K_0 der ewigen Rente:

$K_0 = \frac{1{,}06 \cdot 7500}{1{,}06 - 1} = 132500$

Nachschüssige 20-jährige Rente mit Kapitalverzehr:

$0 = K_0 \cdot 1{,}06^{20} - \frac{R \cdot (1{,}06^{20} - 1)}{1{,}06 - 1}$

$K_0 \cdot 1{,}06^{20} = \frac{R \cdot (1{,}06^{20} - 1)}{1{,}06 - 1}$ | Schuldentilgungsformel

$3{,}2071355 \cdot 132500 = 36{,}7855912 \cdot R$ | $: 36{,}7855912$

$R = \frac{3{,}2071355 \cdot 132500}{36{,}7855912} = 11551{,}95$

Herr Lustig erhält eine 20-jährige nachschüssige Jahresrente von $11\,551{,}95$ €.