Einleitung

Im Kapitel ***Ratensparen*** haben wir Berechnungsformeln für die Berechnungen von Ratensparverträgen kennengelernt. In diesem Kapitel lernen wir nun eine andere und umfangreichere Berechnung dieser „Ratensparverträge" kennen.
Haben wir unter ***Ratensparen*** stets nur berechnet, nach wie vielen Raten eine bestimmtes Endkapital erreicht wird und haben dabei immer nur Einzahlungen am Anfang eines Jahres angenommen, ist es in der Rentenrechnung auch möglich, Einzahlungen am Ende eines Jahres vorzunehmen. Es entstehen dadurch zwei neue Begriffe, nämlich

- Vorschüssige Rentenzahlungen sowie
- Nachschüssige Rentenzahlungen

Weiterhin ist in der Rentenrechnung auch von Interesse, wie lange ein vorhandenes Kapital ausreicht, wenn man sich Jahr für Jahr einen bestimmten Betrag auszahlen lässt. Rentenrechnung ist also Ratensparen auf der einen Seite sowie Entnahmeplan auf der anderen Seite.

Die wichtigsten Begriffe der Rentenrechnung – im folgenden Schritt für Schritt erläutert – sind somit:

- Berechnung des Rentenendwertes, vorschüssig und nachschüssig
- Berechnung des Rentenbarwertes, vorschüssig und nachschüssig
- Regelmäßige Ein- bzw. Auszahlungen, vorschüssig und nachschüssig
- Ewige Renten

Der Rentenendwert

Rentenendwerte sind die Werte, die nach Ablauf von regelmäßigen Einzahlungen (bzw. Auszahlungen) als effektiver Geldbetrag verfügbar sind.
Wir merken uns:
Ein- bzw. Auszahlungen zu Beginn eines Jahres werden „vorschüssige Zahlungen" genannt.
Ein- bzw. Auszahlungen am Ende eines Jahres werden „nachschüssige Zahlungen" genannt.

Folgende Formelzeichen gelten bei der Verzinsung regelmäßiger Zahlungen:

K_0: Anfangskapital
K_n: Endkapital
$p\,\%$: Zinssatz
q: Zinsfaktor mit $q = 1 + \frac{p\,\%}{100}$
R: Rate
n: Anzahl der jährlichen Zahlungen

Hinweis:
Diese Formelzeichen haben wir bereits im Kapitel „**Ratensparen**" kennen gelernt.

Der Rentenendwert mit nachschüssiger Zahlung

Für den Endwert regelmäßiger nachschüssiger Zahlungen gilt:

$$K_n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Beispiel 1: Herr Maier zahlt 10 Jahre lang am **Ende** des Jahres $5\,000$ € auf ein Konto ein. Die Bank bietet einen Zinssatz von $4\,\%$.
Wie hoch ist das Endkapital nach dieser Zeit?

Lösung 1: Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 4\,\%,\ n = 10$
Gesucht: K_{10}
$K_{10} = \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{5000 \cdot (1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1} = 60030{,}54$
Der Rentenendwert beträgt $60\,030{,}54$ €.

Beispiel 2: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $12\,000$ €. Es werden 8 Jahre lang **am Ende** des Jahres $5\,000$ € eingezahlt. Die Bank gewährt $5\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren angewachsen?

Lösung 2: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch nachschüssige Einzahlungen vermehrt, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 5\,\%,\ n = 8,\ K_0 = 12000\,€$
Gesucht: K_8
$K_8 = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 12000 \cdot 1{,}05^8 + \frac{5000 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{1{,}05 - 1} = 65475{,}00$
Der Rentenendwert beträgt $65\,475$ €.

Beispiel 3: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $65\,000$ €. Es werden 8 Jahre lang **am Ende** des Jahres $5\,000$ € abgehoben. Die Bank gewährt $4\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren gesunken?

Lösung 3: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch nachschüssige Abhebungen **vermindert**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 4\,\%,\ n = 8,\ K_0 = 65000\,€$
Gesucht: K_8
$K_8 = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 65000 \cdot 1{,}04^8 - \frac{5000 \cdot (1{,}04^8 - 1)}{1{,}04 - 1} = 42885{,}86$
Der Rentenendwert beträgt $42\,885{,}86$ €.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Der Rentenendwert mit vorschüssiger Zahlung

Für den Endwert regelmäßiger vorschüssiger Zahlungen gilt:

$$K_n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Beispiel 4: Herr Maier zahlt 10 Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € auf ein Konto ein. Die Bank bietet einen Zinssatz von $4\,\%$.
Wie hoch ist das Endkapital nach dieser Zeit?

Lösung 4: Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 4\,\%,\ n = 10$
Gesucht: K_{10}
$K_{10} = \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{5000 \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1} = 62431{,}76$
Der Rentenendwert beträgt $62\,431{,}76$ €.

Hinweis:
Diese Berechnung hätte auch mit den Formeln aus dem Kapitel **Ratensparen** ausgeführt werden können. Wir erinnern uns an die Formel mit

$$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q)$$

Die Berechnung mit dieser Formel bringt:
$K_{10} = 5000 \cdot (1{,}04^{10} + 1{,}04^9 + 1{,}04^8 + \cdots + 1{,}04) = 5000 \cdot 12{,}48635 = 62431{,}76$
Es ergibt sich derselbe Rentenendwert.

Beispiel 5: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $12\,000$ €. Es werden 8 Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € eingezahlt. Die Bank gewährt $5\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren angewachsen?

Lösung 5: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch vorschüssige Einzahlungen **vermehrt**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 5\,\%,\ n = 8,\ K_0 = 12000\,€$
Gesucht: K_8
$K_8 = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 12000 \cdot 1{,}05^8 + \frac{5000 \cdot 1{,}05 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{1{,}05 - 1} = 67862{,}29$
Der Rentenendwert beträgt $67\,862{,}29$ €.

Beispiel 6: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $45\,000$ €. Es werden 7 Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € abgehoben. Die Bank gewährt $4\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 7 Jahren gesunken?

Lösung 6: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch vorschüssige Abhebungen **vermindert**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000\,€;\ p\,\% = 4\,\%,\ n = 7,\ K_0 = 45000\,€$
Gesucht: K_8
$K_7 = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 45000 \cdot 1{,}04^7 - \frac{5000 \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04 - 1} = 18145{,}80$
Der Rentenendwert beträgt $18\,145{,}80$ €.

Der Rentenbarwert

Unter dem Rentenbarwert verstehen wir den einmalige Betrag K_0, der bei einer Rentenanstalt einzuzahlen ist, um n Jahre lang entweder **am Ende** (nachschüssig) oder **am Anfang** (vorschüssig) eines jeden Jahres eine Rente von R € beziehen zu können bei einem festen Zinssatz von p %.

Der Rentenbarwert mit nachschüssiger Auszahlung

Den nachschüssigen Barwert K_0 erhalten wir durch Abzinsung des nachschüssigen Rentenendwertes K_n.
Wir berechnen zunächst den Rentenendwert K_n über die Formeln der Kapitalentwicklung mit festem Zinssatz:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Den so ermittelten Rentenendwert setzen wir dem Rentenendwert der nachschüssigen Zahlungen gleich.

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Jetzt dividieren wir noch entsprechend den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen noch mit q^n und erhalten dadurch die Rentenbarwert

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Beispiel 7: Welcher einmalige Betrag (Barwert) ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, um bei einem Zinssatz von $6\,\%$ 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von $5\,000$ € beziehen zu können?

Lösung 7: Gegeben: $R = 5000$ €, $n = 15$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: Rentenbarwert K_0
$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q-1)} = \frac{5000 \cdot (1{,}06^{15} - 1)}{1{,}06^{15} \cdot (1{,}06 - 1)} = 48561{,}24$
Es muss ein Barwert in Höhe von $48\,561{,}24$ € bei der Rentenanstalt eingezahlt werden.

Der Rentenbarwert mit vorschüssiger Auszahlung

Den vorschüssigen Barwert K_0 erhalten wir durch Abzinsung des vorschüssigen Rentenendwertes K_n.
Auch hier berechnen wir zunächst den Rentenendwert K_n über die Formeln der Kapitalentwicklung mit festem Zinssatz:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Den so ermittelten Rentenendwert setzen wir dem Rentenendwert der vorschüssigen Zahlungen gleich.

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Jetzt dividieren wir noch entsprechend den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen noch mit q^n und erhalten dadurch die Rentenbarwert

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$

Beispiel 8: Welcher einmalige Betrag (Barwert) ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, um bei einem Zinssatz von $6\,\%$ 15 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres eine Rente von $5\,000$ € beziehen zu können?

Lösung 8: Gegeben: $R = 5000\,€$, $n = 15$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: Rentenbarwert K_0
$K_0 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q^{n-1}\cdot(q-1)} = \frac{5000\cdot(1{,}06^{15}-1)}{1{,}06^{14}\cdot(1{,}06-1)} = 51474{,}92$
Es muss ein Barwert in Höhe von $51\,474{,}92\,€$ *bei der Rentenanstalt eingezahlt werden.*

Die ewige Rente

Unter einer ewigen Rente verstehen wir die jährliche bzw. monatliche Kapitalentnahme von einem bestehenden Guthaben nur in Höhe der Verzinsung des Guthabens. De facto bleibt der anfänglich eingezahlte Grundbetrag unberührt und lediglich die Zinsen werden abgehoben. Die ewige Rente ist defacto der Zinsertrag einer Kapitalanlage, so wie wir sie im Kapitel ***Zinsrechnung*** kennen gelernt haben.

Die ewige nachschüssige Rente

Es wird das Kapital K_0 gesucht, welches in einem Jahr bei einem Zinssatz von $p\,\%$ Zinsen in Höhe der Rate R der ewigen Rente bringt.

$$K_0 = \frac{R}{q-1}$$

Beispiel 9: Welches Kapital K_0 ist anzulegen, damit bei $6\,\%$ Jahreszinsen eine nachschüssige ewige Rente von $15\,000\,€$ gezahlt werden kann?

Lösung 9: Gegeben: $R = 15\,000\,€$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: K_0
$K_0 = \frac{R}{q-1} = \frac{15000}{1{,}06-1} = 250000$
Es ist ein Betrag von $250\,000\,€$ *bei der Bank anzulegen.*

Die ewige vorschüssige Rente

Es wird das Kapital K_0 gesucht, welches in einem Jahr bei einem Zinssatz von $p\,\%$ Zinsen in Höhe der Rate R der ewigen Rente zuzüglich einer ersten Rate zu Beginn der ewigen Rente bringt.

$$K_0 = \frac{R\cdot q}{q-1}$$

Beispiel 10: Welches Kapital K_0 ist anzulegen, damit bei $6\,\%$ Jahreszinsen eine vorschüssige ewige Rente von $15\,000\,€$ gezahlt werden kann?

Lösung 10: Gegeben: $R = 15\,000\,€$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: K_0
$K_0 = \frac{R\cdot q}{q-1} = \frac{15000\cdot 1{,}06}{1{,}06-1} = 265000$
Es ist ein Betrag von $265\,000\,€$ *bei der Bank anzulegen.*