Aufgabe A1

Berechne die fehlenden Größen bei **nachschüssigen** Zahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R		2400 €	7500 €	1200 €		5000 €
p %	3,5 %	5 %	4,5 %	3,9 %	3 %	4,2 %
n	$9\ J$				$10\ J$	$4\ J$
K_n	13479 €	38201 €	155888 €	11017 €	74515 €	

Aufgabe A2

Berechne die fehlenden Größen bei **vorschüssigen** Zahlungen.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	550 €		12000 €		580 €	
p %	3 %	5,5 %	6 %	3,6 %	4,2 %	2,8 %
n		$10\ J$		$8\ J$		$5\ J$
K_n	4341 €	20357 €	88726 €	37643 €	9185 €	9377 €

Aufgabe A3

Zur Finanzierung der späteren Berufsausbildung zahlen die Eltern bei der Geburt ihres Kindes 2 000 € auf ein Sparkonto ein und zu jedem Geburtstag weitere 2 000 €. Die letzte Zahlung erfolgt am 18. Geburtstag (Vollendung des 18. Lebensjahres). Wie hoch ist das Guthaben am 18. Geburtstag bei einer jährlichen Verzinsung von 5,5 %?
Hinweis zur Lösung: Stelle die Einzahlungen auf der Zeitgeraden dar.

Aufgabe A4

Herr Weber will in 8 Jahren 50 000 € durch gleichgroße Einzahlungen sparen.

a) Wie viel muss er am Ende jeden Jahres einzahlen, damit bei 6,5 % Verzinsung am Ende des 8. Jahres 50 000 € zur Verfügung stehen?

b) Wie hoch sind die jährlichen Einzahlungen, wenn in 10 Jahren bei 7 % Verzinsung 100 000 € gespart werden sollen?

Aufgabe A5

Zur Finanzierung des Studiums seines Sohnes will ein Vater bis zum Ende von 7 Jahren 40 000 € sparen. Er beabsichtigt, 7 gleich große Beträge zu Beginn eines jeden Jahres auf ein Sparkonto einzuzahlen.
Wie hoch ist jede Einzahlung bei einem Zinssatz von 6,75 %?
Wie hoch ist die jährliche Einzahlung bei einem Zinssatz von 7,25 %?

Aufgabe A6
Herr Kunze will am Ende jeden Jahres $2\,500$ € auf ein Sparkonto so lange einzahlen, bis $30\,000$ € Guthaben überschritten werden. Wie viele Jahre muss er bei einem Zinssatz von $4{,}5\,\%$ sparen?

Aufgabe A7
Wie viele Jahre muss man am Anfang jeden Jahres $4\,250$ € auf ein Sparkonto einzahlen, bis am Ende des Jahres der letzten Einzahlung $100\,000$ € Guthaben überschritten werden? Die Bank gewährt einen Zinssatz von $5{,}5\,\%$.

Aufgabe A8
Herr Kugler zahlt 10 Jahre lang am Ende jeden Jahres $3\,800$ € auf ein Sparkonto. Bis zum Ende des 4. Jahres beträgt der Zinssatz $6\,\%$, ab Beginn des 5. Jahres $6{,}5\,\%$. Wie viel € beträgt das Guthaben am Ende des 10. Jahres?

Aufgabe A9
Es werden 15 Jahre lang jeweils am Beginn eines Jahres $2\,700$ € auf ein Konto eingezahlt. Die Verzinsung beträgt bis zum Ende des 8. Jahres $6\,\%$, ab Beginn des 9. Jahres $5{,}5\,\%$. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 15. Jahres?

Aufgabe A10
Herr Meister möchte sich in fünf Jahren ein Auto für $50\,000$ € kaufen. Am Anfang des ersten Jahres zahlt er $1\,200$ € bei seiner Bank ein, die ihm $3{,}5\,\%$ Zinsen gewährt. Wie hoch sind die Raten, die er jeweils am Ende des 1. bis zum Ende des 5. Jahres einzahlen muss, wenn er danach über die $50\,000$ € verfügen will?

Aufgabe A11
Eine Sparerin legt 12 Jahre lang am Ende eines Jahres $9\,000$ € zu $4\,\%$ auf Zinseszinsen. Wie hoch ist die Gesamtsumme am Ende des 12. Jahres?

Aufgabe A12
Herr Schneider hat ein Sparguthaben von $15\,000$ €, das zu $4{,}75\,\%$ verzinst wird. Am Ende des 3. Jahres beginnt er, jährlich $1\,200$ € jeweils am Jahresende abzuheben. Wie hoch ist sein Guthaben am Ende des 12. Jahres?

Aufgabe A13
Zu einem Kapital K_0 werden 8 Jahre lang am Jahresende jeweils 600 € zugezahlt. Am Ende des 8. Jahres beträgt das Guthaben $12\,371{,}38$ €. Wie hoch war das Anfangskapital K_0 bei einem Zinssatz von $4\,\%$?

Aufgabe A14
Frau Lehmann zahlt 10 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres $1\,500$ € zu ihrem Sparguthaben K_0. Am Ende des 10. Jahres ist das Guthaben bei $6\,\%$ Verzinsung auf $43\,343{,}06$ € angewachsen. Berechne das Anfangskapital K_0.

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{R\cdot(1{,}035^9-1)}{1{,}035-1} = 10{,}36849581 \cdot R$

$13479 = 10{,}36849581 \cdot R \quad | \quad : 10{,}36849581$

$R = 1300$

Detaillierte Lösung für b)

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{2400\cdot(1{,}05^n-1)}{1{,}05-1} = 48000 \cdot (1{,}05^n - 1) = 48000 \cdot 1{,}05^n - 48000$

$38201 = 48000 \cdot 1{,}05^n - 48000 \quad | \quad +48000$

$86201 = 48000 \cdot 1{,}05^n \quad | \quad : 48000$

$1{,}05^n = 1{,}765851467 \quad | \quad ln$

$n \cdot ln\,(1{,}05) = ln\,(1{,}765851467) \quad | \quad : ln\,(1{,}05)$

$n = 12$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	1 300 €	2400 €	7500 €	1200 €	6 500 €	5000 €
p %	3,5 %	5 %	4,5 %	3,9 %	3 %	4,2 %
n	9 J	12 J	15 J	8 J	10 J	4 J
K_n	13479 €	38201 €	155888 €	11017 €	74515 €	21 295,65 €

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a)

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{550\cdot 1{,}030\cdot(1{,}03^n-1)}{1{,}03-1} = 18883{,}33 \cdot (1{,}03^n - 1)$

$4341 = 18883{,}33 \cdot 1{,}03^n - 18883{,}33 \quad | \quad +18883{,}22$

$23224{,}33 = 18883{,}33 \cdot 1{,}03^n \quad | \quad : 18883{,}33$

$1{,}03^n = 1{,}2299 \quad | \quad ln$

$n \cdot ln\,(1{,}03) = ln\,(1{,}2299) \quad | \quad : ln\,(1{,}03)$

$n = 7$

Detaillierte Lösung für b)

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{R\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^{10}-1)}{1{,}055-1} = 13{,}5835 \cdot R$

$20357 = 13{,}5835 \cdot R \quad | \quad : 13{,}5835$

$R = 1498{,}67$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
R	550 €	1500 €	12000 €	4000 €	580 €	1725 €
p %	3 %	5,5 %	6 %	3,6 %	4,2 %	2,8 %
n	7 J	10 J	6 J	8 J	12 J	5 J
K_n	4341 €	20375 €	88726 €	37643 €	9185 €	9377 €

Lösung A3

18 vorschüssige, jährliche Einzahlung zu den jeweiligen Geburtstagen zuzüglich einer weiteren Einzahlung bei Vollendung des Lebensjahres, die unverzinst bleibt.

Gegeben: $n = 18$, $R = 2000$ € vorschüssig, $p\,\% = 5{,}5\,\%$

Gesucht: $K_{ges} = K_{18} + 2000$

$K_{ges} = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} + R = \frac{2000\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^{18}-1)}{1{,}055-1} + 2000 = 64205{,}34$

Das Guthaben beträgt bei Vollendung des 18. Lebensjahres 64 205,34 €

Lösung A4

a) Gegeben: $n = 8$, $K_8 = 50000$ €, $p\,\% = 6{,}5\,\%$ nachschüssig

Gesucht: R

$K_8 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$50000 = \frac{R\cdot(1{,}065^8-1)}{1{,}065-1} \quad | \cdot 0{,}065$

$50000\cdot 0{,}065 = 0{,}655\cdot R \quad | : 0{,}655$

$R = 4961{,}83$

Herr Weber muss jeweils 4 961,83 € einzahlen.

b) Gegeben: $n = 10$, $K_{10} = 100000$ €, $p\,\% = 7\,\%$ nachschüssig

Gesucht: R

$K_{10} = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$100000 = \frac{R\cdot(1{,}07^{10}-1)}{1{,}07-1} \quad | \cdot 0{,}07$

$100000\cdot 0{,}07 = 0{,}96715\cdot R \quad | : 0{,}96715$

$R = 7237{,}75$

Herr Weber muss jeweils 7 237,75 € einzahlen.

Lösung A5

Gegeben: $n = 7$, $K_7 = 40000$ €, $p\,\% = 6{,}75\,\%$ vorschüssig

Gesucht: R

$K_7 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$40000 = \frac{R\cdot 1{,}0675\cdot(1{,}0675^7-1)}{1{,}0675-1} \quad | \cdot 0{,}0675$

$40000\cdot 0{,}0675 = 0{,}6188\cdot R \quad | : 0{,}6188$

$R = 4363{,}28$

Der Vater muss jeweils 4 363,28 € einzahlen (bei 6,75 % Zinssatz).

Lösung für 7,25 % Zinssatz:

$K_7 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$40000 = \frac{R\cdot 1{,}0725\cdot(1{,}0725^7-1)}{1{,}0725-1} \quad | \cdot 0{,}0725$

$40000\cdot 0{,}0725 = 0{,}6781\cdot R \quad | : 0{,}6781$

$R = 4276{,}66$

Der Vater muss jeweils 4 276,66 € einzahlen (bei 7,25 % Zinssatz).

Lösung A6

Gegeben: $R = 2500$, $K_n > 30000$ €, $p\,\% = 4{,}5\,\%$ nachschüssig

Gesucht: n

$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$30000 < \frac{2500\cdot(1{,}045^n-1)}{1{,}045-1} \quad | \cdot 0{,}045$

$30000 \cdot 0{,}045 < 2500 \cdot 1{,}045^n - 2500 \quad | +2500$

$3850 < 2500 \cdot 1{,}045^n \quad | :2500$

$1{,}54 > 1{,}045^n \quad | \ ln$

$ln(1{,}54) < n \cdot ln\,(1{,}045) \quad | \cdot ln\,(1{,}045)$

$n > \frac{ln\,(1{,}54)}{ln\,(1{,}045)} = 9{,}8$

Herr Kunze muss 10 *Jahre lang sparen.*

Lösung A7

Gegeben: $R = 4250$, $K_n > 100000$ €, $p\,\% = 5{,}5\,\%$ vorschüssig

Gesucht: n

$K_n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$100000 < \frac{4250\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^n-1)}{1{,}055-1} \quad | \cdot 0{,}055$

$100000 \cdot 0{,}055 < 4483{,}75 \cdot 1{,}055^n - 4483{,}75 \quad | +4483{,}75$

$9983{,}75 < 4483{,}75 \cdot 1{,}055^n \quad | :4483{,}75$

$2{,}226652 > 1{,}055^n \quad | \ ln$

$ln(2{,}226652) < n \cdot ln\,(1{,}055) \quad | \cdot ln\,(1{,}055)$

$n > \frac{ln\,(2{,}226652)}{ln\,(1{,}055)} = 14{,}95$

Man muss 15 *Jahre lang einzahlen.*

Lösung A8

Gegeben: $R = 3800$, $n_1 = 4$, $p_1\,\% = 6\,\%$ nachschüssig, $n_2 = 6$, $p_2\,\% = 6{,}5\,\%$

Gesucht: K_{10}

1. Berechnung des Guthabens : K_4

   $K_4 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{3800\cdot(1{,}06^4-1)}{1{,}06-1} = 16623{,}54$

2. Berechnung K_{10} aus 6 Jahren Verzinsung K_4 und weiteren 6 nachschüssigen Einzahlungen mit $6{,}5\,\%$ Zinssatz.

   $K_{10} = K_4 \cdot q_2^6 + \frac{R\cdot(q_2^n-1)}{q_2-1} = 16623{,}54 \cdot 1{,}065^6 + \frac{3800\cdot(1{,}065^6-1)}{1{,}065-1} = 51098{,}28$

Das Guthaben am Ende des $10.$ *Jahres beträgt* $51\,098{,}28$ €.

Lösung A9

Gegeben: $R = 2700$, $n_1 = 8$, $p_1\,\% = 6\,\%$ vorschüssig, $n_2 = 7$, $p_2\,\% = 5{,}5\,\%$

Gesucht: K_{15}

1. Berechnung des Guthabens : K_8

   $K_8 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{2700\cdot 1{,}06\cdot(1{,}06^8-1)}{1{,}06-1} = 28326{,}55$

2. Berechnung K_{15} aus 7 Jahren Verzinsung K_8 und weiteren 7 vorschüssigen Einzahlungen mit $5{,}5\,\%$ Zinssatz.

   $K_{15} = K_8 \cdot q_2^7 + \frac{R\cdot q_2\cdot(q_2^7-1)}{q_2-1} = 28326{,}55 \cdot 1{,}055^7 + \frac{2700\cdot 1{,}055\cdot(1{,}055^7-1)}{1{,}055-1} = 64754{,}29$

Das Guthaben am Ende des $15.$ *Jahres beträgt* $64\,754{,}29$ €.

Lösung A10

Gegeben: $K_0 = 1200$ €, $K_5 = 50000$ €, $n = 5$, $p\,\% = 3{,}5\,\%$ nachschüssig
Gesucht: R

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$$

$$50000 = 1200 \cdot 1{,}035^5 + \frac{R\cdot(1{,}035^5-1)}{1{,}035-1} = 1425{,}22 + \frac{R\cdot(1{,}035^5-1)}{1{,}035-1}$$

$$50000 - 1425{,}22 = \frac{R\cdot(1{,}035^5-1)}{1{,}035-1} \quad | \cdot 0{,}035$$

$$1700{,}18 = 0{,}187686 \cdot R \quad | : 0{,}187686$$

$$R = 9058{,}63$$

Herr Meister muss jeweils am Ende des 1. bis zum Ende des 5. Jahres 9 058,63 € einzahlen.

Lösung A11

Gegeben: $R = 9000$ €, $n = 12$, $p\,\% = 4\,\%$ nachschüssig
Gesucht: K_{12}

$$K_n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = \frac{9000\cdot(1{,}04^{12}-1)}{1{,}04-1} = 135232{,}25$$

Die Gesamtsumme am Ende des 12. Jahres beträgt 135 232,25 €.

Lösung A12

Zunächst Berechnung der Verzinsung von 15 000 € im ersten und zweiten Jahr:

$$K_2 = K_0 \cdot q^2 = 15000 \cdot 1{,}0475^2 = 16458{,}84$$

Dieses Kapital wird nun zum Anfangskapital für die Jahre mit Abhebungen.
Gegeben: $K_0 = 16458{,}84$ €, $R = 1200$ €, $n = 10$, $p\,\% = 4{,}75\,\%$ nachschüssig
Gesucht: K_n

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} = 16458{,}84 \cdot 1{,}0475^{10} - \frac{1200\cdot(1{,}0475^{10}-1)}{1{,}0475-1} = 11259{,}68$$

Das Guthaben am Ende des 12. Jahres beträgt 11 259,68 €.

Lösung A13

Gegeben: $K_8 = 12371{,}38$ €, $R = 600$ €, $n = 8$, $p\,\% = 4\,\%$ nachschüssig
Gesucht: K_0

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$$

$$12371{,}38 = K_0 \cdot 1{,}04^8 + \frac{600\cdot(1{,}04^8-1)}{1{,}04-1}$$

$$12371{,}38 = K_0 \cdot 1{,}04^8 + 5528{,}535756 \quad | -5528{,}535756$$

$$6842{,}84 = 1{,}36856905 \cdot K_0 \quad | : 1{,}36856905$$

$$K_0 = 5000$$

Das Anfangskapital K_0 betrug 5 000 €.

Lösung A14

Gegeben: $K_{10} = 43343{,}06$ €, $R = 1500$ €, $n = 10$, $p\,\% = 6\,\%$ vorschüssig
Gesucht: K_0

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1}$$

$$43343{,}06 = K_0 \cdot 1{,}06^{10} + \frac{1500\cdot 1{,}06\cdot(1{,}06^{10}-1)}{1{,}06-1}$$

$$43343{,}06 = 1{,}790847697 \cdot K_0 + 250957{,}46 \quad | -250957{,}46$$

$$22385{,}60 = 1{,}790847697 \cdot K_0 \quad | : 1{,}790847697$$

$$K_0 = 12500$$

Das Anfangskapital K_0 betrug 12 500 €.