Level 1 – Grundlagen – Blatt 1
Dokument mit 19 Aufgaben

Aufgabe A1

Ein Glücksrad hat drei Sektoren mit den Farben Rot, Gelb und Grün. Das Rad bleibt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}1$ so stehen, dass der Zeiger in den roten Sektor zeigt, und mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}3$ so, dass der Zeiger in den gelben Sektor zeigt.

a) Bestimme die Mittelpunktwinkel der drei Sektoren.

b) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim dreimaligen Drehen die Farbfolge rot-gelb-grün auftritt.

c) Berechne auch, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zweimaligem Drehen dieselbe Farbe auftritt.

Aufgabe A2

In einem Karton sind zwei Dosen mit je 20 Keksen. Dose I enthält 12 Kekse mit Schokolade, Dose II nur vier. Es wird zufällig eine Dose ausgewählt und ein Keks herausgenommen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: "Der gewählte Keks ist ein Schokoladenkeks".

b) Beweise, dass $P(A)$ gleich bleibt, wenn die vorhandenen Kekse anders auf die beiden Dosen verteilt werden, wobei aber jede Dose nach wie vor insgesamt 20 Kekse enthält.

Aufgabe A3

In einer Urne befinden sich drei weiße und fünf schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens eine der gezogenen Kugeln weiß ist.

b) Ermittle, wie viele weiße Kugeln zusätzlich in die Urne getan werden müssen, damit die in Aufgabenteil a) berechnete Wahrscheinlichkeit auf den Wert $\frac{8}{9}$ ansteigt.

Aufgabe A4

In einer Lostrommel sind vier Nieten und zwei Gewinnlose. Ein Kunde kauft so lange Lose, bis er alle Gewinnlose besitzt. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass er höchstens vier Käufe tätigen muss.

Aufgabe A5

In einem Behälter befinden sich zwei rote und vier schwarze Kugeln.

a) Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Kugeln die gleiche Farbe?

b) Es werden nun nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln rot ist.

Aufgabe A6

Mit einem idealen Würfel wird zweimal gewürfelt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 fällt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augenzahl beim zweiten Wurf größer als beim ersten?

Aufgabe A7

In einer Urne liegen zwei rote und drei blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln wie folgt gezogen:

Ist die erste Kugel rot, wird sie in die Urne zurückgelegt.
Ist die erste Kugel blau, so wird sie nicht zurückgelegt.

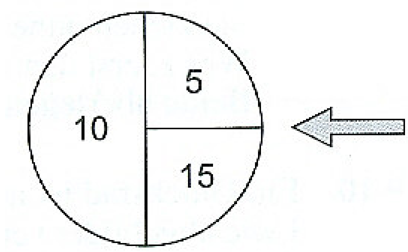
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

a) A: "Die zweite Kugel ist rot."
b) B: "Die zweite Kugel ist blau."
c) C: "Die zwei Kugeln haben verschiedene Farben."

Aufgabe A8

Das nebenstehende Glücksrad wird dreimal gedreht.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: "Es erscheint immer die Zahl 10."
B: "Genau zweimal erscheint eine ungerade Zahl."
C: "Die Summe der Zahlen ist höchstens 20."



Aufgabe A9

Ein Tennismatch besteht aus maximal drei Sätzen. Das Match gewinnt der Spieler, der zuerst zwei Sätze für sich entscheidet. Erfahrungsgemäß gewinnt Felix gegen Max zwei von drei Sätzen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit dauert das Match nur zwei Sätze?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Max das Match für sich entscheiden?

Aufgabe A10

In einer Schachtel liegen sechs gleiche Zettel, auf denen je ein Wort es Satzes „*In der Kürze liegt die Würze*“ steht.

a) Aus der Schachtel wird zufällig ein Zettel gezogen.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Buchstaben des gezogenen Wortes an. Welche Werte kann X annehmen?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
b) Es werden nun so lange Zettel ohne Zurücklegen aus der Schachtel gezogen, bis man ein Wort mit fünf Buchstaben erhält. Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der Ziehungen an.
Welche Werte kann Y annehmen? Berechne $P(Y \leq 2)$.

Lösung A1

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeiten sind $p_{rot} = 0{,}1$, $p_{gelb} = 0{,}3$ und $p_{grün} = 0{,}6$. Die jeweiligen Mittelpunktwinkel errechnen sich aus $360\,° \cdot p$.

Klausuraufschrieb

a) $\alpha_{rot} = p_{rot} \cdot 360\,° = 36\,°$
$\beta_{gelb} = p_{gelb} \cdot 360\,° = 108\,°$
$\gamma_{grün} = p_{grün} \cdot 360\,° = 216\,°$

b) $P(rot; gelb; grün) = p_{rot} \cdot p_{gelb} \cdot p_{grün} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}018$

c) $P(zweimal\ dieselbe\ Farbe) = P(rot; rot) + P(gelb; gelb) + P(grün; grün)$
$P(zweimal\ dieselbe\ Farbe) = 0,1^2 + 0,3^2 + 0,6^2 = 0{,}46$

Lösung A2

Lösungslogik

a) Es erfolgt zunächst die Wahl der Keksdosen mit $p_{Dose} = 0{,}5$ und danach die Auswahl eines Schokoladenkekses mit $p_I = \frac{12}{20}$ und $p_{II} = \frac{4}{20}$.

b) Wir haben insgesamt 40 Kekse, wovon 16 Schokoladenkekse sind. Wir bezeichnen die Anzahl Schokoladenkekse in Dose I mit x und die Anzahl in Dose II mit $16 - x$.

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{20} + \frac{12}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

b) Anzahl Schokoladenkekse in Dose I sei x.
Anzahl Schokoladenkekse in Dose II ist dann $16 - x$.
$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{20} + \frac{16-x}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+16-x}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
Die berechnete Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von der unterschiedlichen Verteilung der 16 Schokoladenkekse.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeiten sind $p_{weiß} = \frac{3}{8}$, $p_{schwarz} = \frac{5}{8}$. „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist weiß“ ist das Gegenereignis von „keine Kugel ist weiß“.
Für Teilaufgabe b) ist mir der Zahl x weiße Kugeln zu rechnen.

Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens eine Kugel ist weiß“
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$

b) $P(A) = \frac{8}{9} = 1 - \left(\frac{5}{5+x}\right)^2$
$\left(\frac{5}{5+x}\right)^2 = \frac{1}{9}$
$\frac{5}{5+x} = \frac{1}{3}$
$15 = 5 + x \quad \Longrightarrow \quad x = 10$
Es müssen 7 weiße Kugeln zusätzlich in die Urne getan werden.

Lösung A4

Lösungslogik

Die Ereignisse seien: G: „Kunde zieht Gewinn“,
N: „Kunde zieht Niete“.

Es ist der Ereignisraum aufzustellen und die jeweiligen Ereignisse gemäß erster und zweiter Pfadregel zu multiplizieren bzw. zu addieren.
Es handelt sich um Ziehen „**ohne**“ Zurücklegen.

Klausuraufschrieb

G: „Kunde zieht Gewinn“ N: „Kunde zieht Niete“

$P(2\ Gewinne\ bei\ höchstens\ vier\ Käufen) =$

$$P(GG) + P(GNG) + P(GNNG) + P(NGG) + P(NGNG) + P(NNGG) =$$

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \cdot 6 = 0{,}4$$

Die Wahrscheinlichkeit mit höchstens vier Käufen alle Gewinnlose zu ziehen beträgt $40\ \%$*.*

Lösung A5

Lösungslogik

a) Ziehen mit Zurücklegen mit $p_{rot} = \frac{2}{6}$ und $p_{schwarz} = \frac{4}{6}$.

b) Ziehen ohne Zurücklegen. Mindestens eine Kugel ist rot ist das Gegenereignis zu keine Kugel ist rot.

Klausuraufschrieb

a) A: „Beide Kugeln haben die gleiche Farbe.“

$P(A) = \{(rot; rot), (schwarz; schwarz)\}$

$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

b) A: „Mindestens eine Kugel ist rot.“

$\overline{A}$: „Keine Kugel ist rot.“

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Lösung A6

Lösungslogik

a) Ziehen mit Zurücklegen mit $p_6 = \frac{1}{6}$ und $p_{\overline{6}} = \frac{5}{6}$. Mindestens eine 6 ist das Gegenereignis zu keine 6.

b) Wir stellen den Ereignisraum für „Augenzahl beim zweiten Wurf ist größer“ auf. Die Anzahl multipliziert mit $\frac{1}{36}$ ist dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens eine 6“ $\overline{A}$: „Keine 6“

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

b) B: „Die Augenzahl beim zweiten Wurf ist größer als beim ersten.“

Ereignisraum:

$(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)$
$(2,3); (2,4); (2,5); (2,6)$
$(3,4); (3,5); (3,6)$
$(4,5); (4,6); (5,6)$

Der Ereignisraum von B umfasst insgesamt 15 Einzelereignisse, somit:

$P(B) = 15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Lösung A7

Lösungslogik

Wir müssen beachten, dass es sich um Ziehen mit Zurücklegen handelt, wenn als erstes die rote Kugel gezogen wird und um Ziehen ohne Zurücklegen, wen im ersten Zug die blaue Kugel gezogen wird. Das verändert die Wahrscheinlichkeit der Einzelziehung.

$p_{1rot} = \frac{2}{5}$, und $p_{1blau} = \frac{3}{5}$, jedoch $p_{2rot}(p_{1rot}) = \frac{2}{5}$,. $p_{2rot}(p_{1blau}) = \frac{2}{4}$, $p_{2blau}(p_{1rot}) = \frac{3}{5}$, $p_{2blau}(p_{1blau}) = \frac{2}{4}$.

Klausuraufschrieb

A: „Die zweite Kugel ist rot."
Ereignisraum: (rot, rot); $(blau, rot)$
$P(A) = P(rot; rot) + P(blau; rot) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{25} + \frac{6}{20} = \frac{46}{100} = \frac{23}{50}$

B: „Die zweite Kugel ist blau."
Ereignisraum: $(rot, blau)$; $(blau, blau)$
$P(B) = P(rot; blau) + P(blau; blau) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{25} + \frac{6}{20} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$

C: „Die zwei Kugeln haben verschiedene Farben."
Ereignisraum: $(rot, blau)$; $(blau, rot)$
$P(C) = P(rot; blau) + P(blau; rot) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{25} + \frac{6}{20} = \frac{54}{100} = \frac{27}{25}$

Lösung A8

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

$p_{10} = \frac{1}{2}$, $p_{15} = \frac{1}{4}$, $p_5 = \frac{1}{4}$ und $p_{ungerade} = p_{15} + p_5 = \frac{1}{2}$.

Klausuraufschrieb

A: „Es erscheint immer die Zahl 10."
Ereignisraum: $(10; 10; 10)$
$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

B: „Genau zweimal erschein eine ungerade Zahl."
Ereignisraum: $(p_{10}, p_{ung}, p_{ung})$; $(p_{ung}, p_{10}, p_{ung})$; $(p_{ung}, p_{ung}, p_{10})$
$P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

C: „Die Summe der Zahlen ist höchstens 20"
Ereignisraum: $(5; 5; 5)$; $(5,5,10)$; $(5,10,5)$; $(10,5,5)$
$P(C) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} = \frac{7}{64}$

Lösung A9

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. $p_{Felix}=\frac{2}{3}$, $p_{Max}=\frac{1}{3}$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Das Match dauert nur 2 Sätze."
Ereignisraum: $(p_{Felix};p_{Felix});(p_{Max};p_{Max})$
$P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

b) B: „Max gewinnt."
Ereignisraum: $(p_{Max},p_{Max});(p_{Felix},p_{Max},p_{Max});(P_{Max},p_{Felix},p_{Max})$
$P(B)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{4}{27}=\frac{7}{27}$

Lösung A10

Klausuraufschrieb

a) „In der Kürze liegt die Würze" hat 6 Worte. Ein Wort mit zwei Buchstaben, zwei Worte mit drei Buchstaben und 3 Worte mit fünf Buchstaben. Die Zufallsvariable X kann somit die Werte $X\in[1;2;5]$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist dann:

X	1	2	5
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) Da es insgesamt drei Worte gibt, die weniger als Buchstaben enthalten, muss spätestens beim vierten Zug ein Wort mit fünf Buchstaben gezogen werden. Y kann somit die Wert von 1 bis 4 annehmen.
Hinweis: $Y=0$ kann nicht vorkommen, denn dann würde ja nicht gezogen.
$P(Y\leq 2)$ bedeutet entweder ein Wort mit fünf Buchstaben im ersten Zug oder im zweiten Zug. Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
$P(Y\leq 2)=P(Y=1)+P(Y=2)=\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{9}{30}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$.