Lösung A1

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeiten sind $p_{rot} = 0{,}1$, $p_{gelb} = 0{,}3$ und $p_{grün} = 0{,}6$. Die jeweiligen Mittelpunktwinkel errechnen sich aus $360° \cdot p$.

Klausuraufschrieb

a) $\alpha_{rot} = p_{rot} \cdot 360° = 36°$
$\beta_{gelb} = p_{gelb} \cdot 360° = 108°$
$\gamma_{grün} = p_{grün} \cdot 360° = 216°$

b) $P(rot; gelb; grün) = p_{rot} \cdot p_{gelb} \cdot p_{grün} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}018$

c) $P(zweimal\ dieselbe\ Farbe) = P(rot; rot) + P(gelb; gelb) + P(grün; grün)$
$P(zweimal\ dieselbe\ Farbe) = 0{,}1^2 + 0{,}3^2 + 0{,}6^2 = 0{,}46$

Lösung A2

Lösungslogik

a) Es erfolgt zunächst die Wahl der Keksdosen mit $p_{Dose} = 0{,}5$ und danach die Auswahl eines Schokoladenkekses mit $p_I = \frac{12}{20}$ und $p_{II} = \frac{4}{20}$.

b) Wir haben insgesamt 40 Kekse, wovon 16 Schokoladenkekse sind. Wir bezeichnen die Anzahl Schokoladenkekse in Dose I mit x und die Anzahl in Dose II mit $16 - x$.

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{20} + \frac{12}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

b) Anzahl Schokoladenkekse in Dose I sei x.
Anzahl Schokoladenkekse in Dose II ist dann $16 - x$.
$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{20} + \frac{16-x}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+16-x}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
Die berechnete Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von der unterschiedlichen Verteilung der 16 Schokoladenkekse.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeiten sind $p_{weiß} = \frac{3}{8}$, $p_{schwarz} = \frac{5}{8}$. „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist weiß" ist das Gegenereignis von „keine Kugel ist weiß".
Für Teilaufgabe b) ist mir der Zahl x weiße Kugeln zu rechnen.

Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens eine Kugel ist weiß"
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$

b) $P(A) = \frac{8}{9} = 1 - \left(\frac{5}{5+x}\right)^2$
$\left(\frac{5}{5+x}\right)^2 = \frac{1}{9}$
$\frac{5}{5+x} = \frac{1}{3}$
$15 = 5 + x \quad \Longrightarrow \quad x = 10$
Es müssen 7 weiße Kugeln zusätzlich in die Urne getan werden.

Lösung A4

Lösungslogik

Die Ereignisse seien: G: „Kunde zieht Gewinn",
N: „Kunde zieht Niete".

Es ist der Ereignisraum aufzustellen und die jeweiligen Ereignisse gemäß erster und zweiter Pfadregel zu multiplizieren bzw. zu addieren.
Es handelt sich um Ziehen „**ohne**" Zurücklegen.

Klausuraufschrieb

G: „Kunde zieht Gewinn" N: „Kunde zieht Niete"

$P(2\ Gewinne\ bei\ höchstens\ vier\ Käufen) =$

$P(GG) + P(GNG) + P(GNNG) + P(NGG) + P(NGNG) + P(NNGG) =$

$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}\cdot 6 = 0{,}4$

Die Wahrscheinlichkeit mit höchstens vier Käufen alle Gewinnlose zu ziehen beträgt $40\ \%$.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Ziehen mit Zurücklegen mit $p_{rot} = \frac{2}{6}$ und $p_{schwarz} = \frac{4}{6}$.

b) Ziehen ohne Zurücklegen. Mindestens eine Kugel ist rot ist das Gegenereignis zu keine Kugel ist rot.

Klausuraufschrieb

a) A: „Beide Kugeln haben die gleiche Farbe."

$P(A) = \{(rot; rot), (schwarz; schwarz)\}$

$P(A) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

b) A: „Mindestens eine Kugel ist rot."

$\overline{A}$: „Keine Kugel ist rot."

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Lösung A6

Lösungslogik

a) Ziehen mit Zurücklegen mit $p_6 = \frac{1}{6}$ und $p_{\overline{6}} = \frac{5}{6}$. Mindestens eine 6 ist das Gegenereignis zu keine 6.

b) Wir stellen den Ereignisraum für „Augenzahl beim zweiten Wurf ist größer" auf. Die Anzahl multipliziert mit $\frac{1}{36}$ ist dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens eine 6" $\overline{A}$: „Keine 6"

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

b) B: „Die Augenzahl beim zweiten Wurf ist größer als beim ersten."

Ereignisraum:

$(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)$
$(2,3); (2,4); (2,5); (2,6)$
$(3,4); (3,5); (3,6)$
$(4,5); (4,6); (5,6)$

Der Ereignisraum von B umfasst insgesamt 15 Einzelereignisse, somit:

$P(B) = 15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Lösung A7

Lösungslogik

Wir müssen beachten, dass es sich um Ziehen mit Zurücklegen handelt, wenn als erstes die rote Kugel gezogen wird und um Ziehen ohne Zurücklegen, wen im ersten Zug die blaue Kugel gezogen wird. Das verändert die Wahrscheinlichkeit der Einzelziehung.

$p_{1rot} = \frac{2}{5}$, und $p_{1blau} = \frac{3}{5}$, jedoch $p_{2rot}(p_{1rot}) = \frac{2}{5}$,. $p_{2rot}(p_{1blau}) = \frac{2}{4}$, $p_{2blau}(p_{1rot}) = \frac{3}{5}$, $p_{2blau}(p_{1blau}) = \frac{2}{4}$.

Klausuraufschrieb

A: „Die zweite Kugel ist rot."

Ereignisraum: (rot, rot); $(blau, rot)$

$P(A) = P(rot; rot) + P(blau; rot) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{25} + \frac{6}{20} = \frac{46}{100} = \frac{23}{50}$

B: „Die zweite Kugel ist blau."

Ereignisraum: $(rot, blau)$; $(blau, blau)$

$P(B) = P(rot; blau) + P(blau; blau) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{25} + \frac{6}{20} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$

C: „Die zwei Kugeln haben verschiedene Farben."

Ereignisraum: $(rot, blau)$; $(blau, rot)$

$P(C) = P(rot; blau) + P(blau; rot) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{25} + \frac{6}{20} = \frac{54}{100} = \frac{27}{25}$

Lösung A8

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

$p_{10} = \frac{1}{2}$, $p_{15} = \frac{1}{4}$, $p_5 = \frac{1}{4}$ und $p_{ungerade} = p_{15} + p_5 = \frac{1}{2}$.

Klausuraufschrieb

A: „Es erscheint immer die Zahl 10."

Ereignisraum: $(10; 10; 10)$

$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

B: „Genau zweimal erschein eine ungerade Zahl."

Ereignisraum: $(p_{10}, p_{ung}, p_{ung})$; $(p_{ung}, p_{10}, p_{ung})$; $(p_{ung}, p_{ung}, p_{10})$

$P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

C: „Die Summe der Zahlen ist höchstens 20"

Ereignisraum: $(5; 5; 5)$; $(5,5,10)$; $(5,10,5)$; $(10,5,5)$

$P(C) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} = \frac{7}{64}$

Lösung A9
Lösungslogik
Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. $p_{Felix} = \frac{2}{3}$, $p_{Max} = \frac{1}{3}$.

Klausuraufschrieb
a) A: „Das Match dauert nur 2 Sätze."
Ereignisraum: $(p_{Felix}; p_{Felix}); (p_{Max}; p_{Max})$
$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

b) B: „Max gewinnt."
Ereignisraum: $(p_{Max}, p_{Max}); (p_{Felix}, p_{Max}, p_{Max}); (P_{Max}, p_{Felix}, p_{Max})$
$P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{7}{27}$

Lösung A10
Klausuraufschrieb
a) „In der Kürze liegt die Würze" hat 6 Worte. Ein Wort mit zwei Buchstaben, zwei Worte mit drei Buchstaben und 3 Worte mit fünf Buchstaben. Die Zufallsvariable X kann somit die Werte $X \in [1; 2; 5]$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist dann:

X	1	2	5
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) Da es insgesamt drei Worte gibt, die weniger als Buchstaben enthalten, muss spätestens beim vierten Zug ein Wort mit fünf Buchstaben gezogen werden. Y kann somit die Wert von 1 bis 4 annehmen.
Hinweis: $Y = 0$ kann nicht vorkommen, denn dann würde ja nicht gezogen.
$P(Y \leq 2)$ bedeutet entweder ein Wort mit fünf Buchstaben im ersten Zug oder im zweiten Zug. Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
$P(Y \leq 2) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{9}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.