Aufgabenblatt zu Urnenmodellen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Dokument mit 16 Aufgaben

Aufgabe A1

Die Flächen eines Tetraederwürfels sind mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet. Als gewürfelt gilt die Zahl, auf der der Würfel zu liegen kommt. Der Würfel wird viermal geworfen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man viermal die gleiche Zahl?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine Zahl größer 2 zu werfen?

c) Die Ergebnisse in der gewürfelten Reihenfolge bilden einer vierstellige Zahl. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl größer als 1144?

Aufgabe A2

In einem Behälter liegen fünf blaue, drei weiße und zwei rote Kugeln. Mona zieht eine Kugel, notiert die Farbe und legt die Kugel wieder zurück. Danach zieht sie eine zweite Kugel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden gezogenen Kugeln eine rot und eine weiß ist?

Aufgabe A3

In einem Gefäß befinden sich eine weiße, vier rote und fünf blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine der gezogenen Kugeln rot ist?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine der gezogenen Kugeln rot ist?

Aufgabe A4

In einem Behälter befinden sich drei blaue und drei rote Kugeln. Viola führt zwei Zufallsexperimente durch:

Experiment 1: Sie zieht zwei Kugeln mit Zurücklegen.

Experiment 2: Sie zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen.

Sie vermutet: "In beiden Experimenten ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, fünfzig Prozent."

Überprüfe diese Vermutung.

Aufgabe A5

Für eine Geburtstagsparty werden 20 Glückskekse gebacken, unterschiedlich gefüllt und in einen Korb gelegt:
12 Kekse enthalten jeweils ein Sprichwort.
6 Kekse enthalten jeweils einen Witz, die restlichen werden mit jeweils einem Kinogutschein gefüllt.

a) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "mit einem Zug ein Sprichwort ziehen"?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Glückskeksen unterschiedliche Füllungen erhalten"?

Aufgabe A25

Seit dem Jahr 2007 können Städte und Kommunen Umweltzonen zur Reduzierung des Schadstoffausstoßes durch Fahrzeuge einrichten.
Zur Kennzeichnung werden grüne, gelbe und rote Plaketten verwendet.
In einem Parkhaus stehen 51 Autos mit einer grünen, 23 Autos mit einer gelben und 11 Autos mit einer roten Umweltplakette.
An der Ausfahrt fahren zwei Autos nacheinander aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden ausfahrenden Autos Plaketten mit gleicher Farbe?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden ausfahrenden Autos eine grüne Plakette hat?

Aufgabe A6

In einer Schale liegen gleich aussehende Schokowürfel.
Sechs Schokowürfel sind mit Marzipan, vier mit Nougat und zwei mit Karamell gefüllt. Anastasia zieht gleichzeitig zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen?

In einer anderen Schale liegen von jeder Sorte halb so viele Schokowürfel (dreimal Marzipan, zweimal Nougat, einmal Karamell). Leon zieht ebenfalls zwei Schokowürfel mit einem Griff.

b) Er behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen zu ziehen bleibt gleich.“
Hat Leon recht? Begründe durch Rechnung.

Lösung A1

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. Pro Teilaufgabe wird der Ereignisraum aufgestellt und daraus die Wahrscheinlichkeit berechnet.

Klausuraufschrieb

a) Ereignisraum:
$E = \{(1111); (2222); (3333); (4444)\}$
A: „Viermal die gleiche Zahl würfeln".
$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64}$.

b) A: „Mindestens einmal eine Zahl größer 2."
B: „Eine Zahl größer 2 werfen."
C: „Eine Zahl kleiner 3 werfen."
Für einen einzigen Wurf gilt:
$P(B) = \frac{1}{2} = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Für vier Würfe gilt:
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

c) A: „Eine Zahl größer als 1144 werfen."
Bis zur Zahl 1144 existieren 4^2 Kombinationen. Insgesamt gibt es 4^4 Kombinationen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist somit
$P(A) = \frac{4^4 - 4^2}{4^4} = 1 - \frac{4^2}{4^4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Kugel rot und eine Kugel weiß.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{5}{10}$ $\quad P(weiß) = \frac{3}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{2}{10}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P\{(b;b), (w;w), (r,r)\}$

$P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ $\quad P(w;w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ $\quad P(r;r) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P(b;b) + P(w;w) + P(r;r)$
$= \frac{25}{100} + \frac{9}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = 38\ \%$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P\{(w;r), (r;w)\}$

$P(w;r) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$ $\quad P(r;w) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P(w;r) + P(r;w) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{12}{100} = 12\ \%$

Lösung A3

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln. Zwei verschiedenfarbige Kugeln ist das Gegenereignis zu zwei gleichfarbige Kugeln. Da nur eine einzige Kugel weiß ist, ist das Gegenereignis mit $P(r;r)$ und $P(w;w)$ sehr schnell ermittelt.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Kugel rot. Höchstens eine Kugel rot bedeutet eine oder keine rote Kugel. Das Gegenereignis hierzu sind zwei rote Kugeln.

Klausuraufschrieb

$P(weiß) = \frac{1}{10}$ $\quad$ $P(rot) = \frac{4}{10}$ $\quad$ $P(blau) = \frac{5}{10}$

Zwei verschiedenfarbige Kugeln:

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - P\{(r;r),(b;b)\}$

$P(r;r) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$ $\quad P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - \big(P(r;r) + P(b;b)\big)$

$= 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{58}{90}$

$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) \approx 64{,}4\ \%$

Höchstens eine Kugel ist rot:

$P(höchstens\ eine\ rote\ Kugel) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\ \%$

Lösung A4

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln getrennt nach mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Vergleich der beiden sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{3}{6}$ $\quad$ $P(rot) = \frac{3}{6}$

Mit Zurücklegen:

$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$

$P(b;r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$ $\quad P(r;b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$

$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\ \%$

Ohne Zurücklegen:

$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$

$P(b;r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad P(r;b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$

$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{6}{30} + \frac{6}{30} = \frac{12}{30} = 40\ \%$

Violas Vermutung ist falsch.

Lösung A5

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Keksfüllungen für den ersten Zug.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mit einem Zug ein Sprichwort" ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „unterschiedliche Füllung beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Keksen".
Hinweis: Gleichzeitiges Ziehen von zwei Keksen muss als Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen betrachtet werden.

Klausuraufschrieb

$P(Witz) = \frac{6}{20}$ $\quad P(Sprichwort) = \frac{12}{20}$ $\quad P(Gutschein) = \frac{2}{20}$

A: *„Mit einem Zug ein Sprichwort"*

$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\ \%$

B: *„Unterschiedliche Füllungen beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kekse"*

$P(B) = \{(W;S),(S;W),(W;G),(G;W),(S;G),(G;S)\}$

$P(W;S) = \frac{6}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380}$ $\quad P(S;W) = \frac{12}{20}\cdot\frac{6}{19} = \frac{72}{380}$

$P(W;G) = \frac{6}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{12}{380}$ $\quad P(G;W) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380}$

$P(S;G) = \frac{12}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{24}{380}$ $\quad P(G;S) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{24}{380}$

$P(B) = 2\cdot\left(\frac{72+12+24}{380}\right) = \frac{108}{190} = \frac{54}{95} \approx 56{,}8\ \%$

Lösung A6

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die erste Ausfahrt eines Autos pro Plakette.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „beide Autos haben Plaketten mit gleicher Farbe".
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mindestens eines der beiden Autos hat eine grüne Plakette". Hierzu erklären wir die gelben und roten Plaketten zu „nicht grün" und berechnen die Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis.

Klausuraufschrieb

$P(grün) = \frac{51}{85}$ $\quad P(gelb) = \frac{23}{85}$ $\quad P(rot) = \frac{11}{85}$

A: *„beide ausfahrenden Autos haben gleichfarbige Plaketten"*

$P(A) = P\{(gr;gr);(ge;ge);(ro;ro)\}$

$P(gr;gr) = \frac{51}{85}\cdot\frac{50}{84} = \frac{2550}{7140}$ $\quad P(ge;ge) = \frac{23}{85}\cdot\frac{22}{84} = \frac{506}{7140}$ $\quad P(ro;ro) = \frac{11}{85}\cdot\frac{10}{84} = \frac{110}{7140}$

$P(A) = \frac{2550+506+110}{7140} = \frac{3166}{7140} \approx 44{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Autos gleichfarbige Plaketten haben, beträgt $44{,}3\ \%$.

B: „mindestens eines der ausfahrenden Autos hat eine grüne Plakette"

$P(B) = 1 - P(\overline{gr};\overline{gr})$

$P(\overline{gr};\overline{gr}) = \frac{34}{85}\cdot\frac{33}{84} = \frac{1122}{7140}$

$P(B) = 1 - \frac{1122}{7140} = \frac{6018}{7140} = \frac{59}{70} \approx 84{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Autos eine grüne Plakette hat, beträgt $84{,}3\ \%$.

Lösung A7

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Schokowürfeln ist zu behandeln wir Ziehen nacheinander von zwei Schokowürfeln ohne Zurücklegen.
Die möglichen Ereignisse „Zwei unterschiedliche Füllungen“ sind:
„Marzipan; Nougat“, „Marzipan; Karamell“, „Nougat; Marzipan“, „Karamell; Marzipan“, Nougat; Karamell“ und „Karamell; Nougat“.
Wir müssen also sechs Einzelwahrscheinlichkeiten ermitteln und diese dann aufsummieren.
Wesentlich weniger Rechenaufwand entsteht, wenn wir über das Gegenereignis gehen. Das Gegenereignis von „Zwei unterschiedliche Füllungen“ ist „Zwei gleiche Füllungen“. Diese Einzelwahrscheinlichkeiten sind dann:
„Marzipan; Marzipan“, „Nougat; Nougat“ und „Karamell; Karamell“
Aus $1 -$ „Zwei gleiche Füllungen“ erhalten wir dann das Endergebnis.
Leon hat nicht Recht, Nachweis siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P(unterschiedliche\ ) = 1 - P(gleiche)$
$P(gleiche) = P(M;M) + P(N;N) + P(K;K)$
$P(M;M) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132}$ $\quad P(N;N) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$ $\quad P(K;K) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$
$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{30}{132} + \frac{12}{132} + \frac{2}{132}\right) = 1 - \frac{44}{132} = \frac{88}{132} = \frac{2}{6} = 66{,}7\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen zu ziehen beträgt $66{,}7\ \%$*.*
Leon hat nicht recht, denn:
$P(M;M) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad P(N;N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$
$P(K;K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0$
$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{2}{30} + 0\right) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} = 73{,}3\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen aus der zweiten Schale zu ziehen beträgt $73{,}3\ \%$*.*