Lösung A1

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. Pro Teilaufgabe wird der Ereignisraum aufgestellt und daraus die Wahrscheinlichkeit berechnet.

Klausuraufschrieb

a) Ereignisraum:
$E = \{(1111); (2222); (3333); (4444)\}$
A: „Viermal die gleiche Zahl würfeln".
$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64}$.

b) A: „Mindestens einmal eine Zahl größer 2."
B: „Eine Zahl größer 2 werfen."
C: „Eine Zahl kleiner 3 werfen."
Für einen einzigen Wurf gilt:
$P(B) = \frac{1}{2} = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Für vier Würfe gilt:
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

c) A: „Eine Zahl größer als 1144 werfen."
Bis zur Zahl 1144 existieren 4^2 Kombinationen. Insgesamt gibt es 4^4 Kombinationen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist somit
$P(A) = \frac{4^4 - 4^2}{4^4} = 1 - \frac{4^2}{4^4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Kugel rot und eine Kugel weiß.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{5}{10}$ $\quad P(weiß) = \frac{3}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{2}{10}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P\{(b;b), (w;w), (r,r)\}$

$P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ $\quad P(w;w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ $\quad P(r;r) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P(b;b) + P(w;w) + P(r;r)$
$= \frac{25}{100} + \frac{9}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = 38\ \%$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P\{(w;r), (r;w)\}$

$P(w;r) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$ $\quad P(r;w) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P(w;r) + P(r;w) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{12}{100} = 12\ \%$

Lösung A3

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln. Zwei verschiedenfarbige Kugeln ist das Gegenereignis zu zwei gleichfarbige Kugeln. Da nur eine einzige Kugel weiß ist, ist das Gegenereignis mit $P(r;r)$ und $P(w;w)$ sehr schnell ermittelt.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Kugel rot. Höchstens eine Kugel rot bedeutet eine oder keine rote Kugel. Das Gegenereignis hierzu sind zwei rote Kugeln.

Klausuraufschrieb

$P(weiß) = \frac{1}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{4}{10}$ $\quad P(blau) = \frac{5}{10}$

Zwei verschiedenfarbige Kugeln:

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - P\{(r;r),(b;b)\}$$
$$P(r;r) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} \quad P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$
$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - \big(P(r;r) + P(b;b)\big)$$
$$= 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{58}{90}$$
$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) \approx 64{,}4\ \%$$

Höchstens eine Kugel ist rot:

$$P(höchstens\ eine\ rote\ Kugel) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\ \%$$

Lösung A4

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln getrennt nach mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Vergleich der beiden sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{3}{6}$ $\quad P(rot) = \frac{3}{6}$

Mit Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} \quad P(r;b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\ \%$$

Ohne Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} \quad P(r;b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{6}{30} + \frac{6}{30} = \frac{12}{30} = 40\ \%$$

Violas Vermutung ist falsch.

Lösung A5

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Keksfüllungen für den ersten Zug.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mit einem Zug ein Sprichwort" ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „unterschiedliche Füllung beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Keksen".
Hinweis: Gleichzeitiges Ziehen von zwei Keksen muss als Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen betrachtet werden.

Klausuraufschrieb

$P(Witz) = \frac{6}{20}$ $\quad P(Sprichwort) = \frac{12}{20}$ $\quad P(Gutschein) = \frac{2}{20}$

A: *„Mit einem Zug ein Sprichwort"*

$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\,\%$

B: *„Unterschiedliche Füllungen beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kekse"*

$P(B) = \{(W;S),(S;W),(W;G),(G;W),(S;G),(G;S)\}$

$P(W;S) = \frac{6}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{72}{380}$ $\quad P(S;W) = \frac{12}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{72}{380}$

$P(W;G) = \frac{6}{20} \cdot \frac{2}{19} = \frac{12}{380}$ $\quad P(G;W) = \frac{2}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{72}{380}$

$P(S;G) = \frac{12}{20} \cdot \frac{2}{19} = \frac{24}{380}$ $\quad P(G;S) = \frac{2}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{24}{380}$

$P(B) = 2 \cdot \left(\frac{72+12+24}{380}\right) = \frac{108}{190} = \frac{54}{95} \approx 56{,}8\,\%$

Lösung A6

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die erste Ausfahrt eines Autos pro Plakette.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „beide Autos haben Plaketten mit gleicher Farbe".
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mindestens eines der beiden Autos hat eine grüne Plakette". Hierzu erklären wir die gelben und roten Plaketten zu „nicht grün" und berechnen die Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis.

Klausuraufschrieb

$P(grün) = \frac{51}{85}$ $\quad P(gelb) = \frac{23}{85}$ $\quad P(rot) = \frac{11}{85}$

A: *„beide ausfahrenden Autos haben gleichfarbige Plaketten"*

$P(A) = P\{(gr;gr);(ge;ge);(ro;ro)\}$

$P(gr;gr) = \frac{51}{85} \cdot \frac{50}{84} = \frac{2550}{7140}$ $\quad P(ge;ge) = \frac{23}{85} \cdot \frac{22}{84} = \frac{506}{7140}$ $\quad P(ro;ro) = \frac{11}{85} \cdot \frac{10}{84} = \frac{110}{7140}$

$P(A) = \frac{2550+506+110}{7140} = \frac{3166}{7140} \approx 44{,}3\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Autos gleichfarbige Plaketten haben, beträgt $44{,}3\,\%$.

B: „mindestens eines der ausfahrenden Autos hat eine grüne Plakette"

$P(B) = 1 - P(\overline{gr};\overline{gr})$

$P(\overline{gr};\overline{gr}) = \frac{34}{85} \cdot \frac{33}{84} = \frac{1122}{7140}$

$P(B) = 1 - \frac{1122}{7140} = \frac{6018}{7140} = \frac{59}{70} \approx 84{,}3\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Autos eine grüne Plakette hat, beträgt $84{,}3\,\%$.

Lösung A7

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Schokowürfeln ist zu behandeln wir Ziehen nacheinander von zwei Schokowürfeln ohne Zurücklegen.
Die möglichen Ereignisse „Zwei unterschiedliche Füllungen" sind:
„Marzipan; Nougat", „Marzipan; Karamell", „Nougat; Marzipan", „Karamell; Marzipan", Nougat; Karamell" und „Karamell; Nougat".
Wir müssen also sechs Einzelwahrscheinlichkeiten ermitteln und diese dann aufsummieren.
Wesentlich weniger Rechenaufwand entsteht, wenn wir über das Gegenereignis gehen. Das Gegenereignis von „Zwei unterschiedliche Füllungen" ist „Zwei gleiche Füllungen". Diese Einzelwahrscheinlichkeiten sind dann:
„Marzipan; Marzipan", „Nougat; Nougat" und „Karamell; Karamell"
Aus $1 -$ „Zwei gleiche Füllungen" erhalten wir dann das Endergebnis.
Leon hat nicht Recht, Nachweis siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P(unterschiedliche\ ) = 1 - P(gleiche)$

$P(gleiche) = P(M;M) + P(N;N) + P(K;K)$

$P(M;M) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132}$ $\quad P(N;N) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$ $\quad P(K;K) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{30}{132} + \frac{12}{132} + \frac{2}{132}\right) = 1 - \frac{44}{132} = \frac{88}{132} = \frac{2}{6} = 66{,}7\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen zu ziehen beträgt $66{,}7\ \%$.
Leon hat nicht recht, denn:

$P(M;M) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad P(N;N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

$P(K;K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{2}{30} + 0\right) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} = 73{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen aus der zweiten Schale zu ziehen beträgt $73{,}3\ \%$.