Lösung A1

Klausuraufschrieb

a) $B_{20;0,3}(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{15}\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}1789$

b) $B_{20;0,3}(X\leq 3)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 20^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 20^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 20^{18}$
$+\binom{20}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 20^{17}\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}107$

c) $B_{20;0,3}(X<8)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 20^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 20^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 20^{18}$
$+\binom{20}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 20^{17}+\binom{20}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 20^{16}+\binom{20}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 20^{15}$
$+\binom{20}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 20^{14}+\binom{20}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 20^{13}\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}7723$

d) $B_{20;0,3}(X\geq 10)=1-B_{20;0,3}(X\leq 9)\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}048$

e) $B_{20;0,3}(X>15)=1-B_{20;0,3}(X\leq 15)\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}00000555$

f) $B_{20;0,3}(8\leq X\leq 12)=B_{20;0,3}(X\leq 12)-B_{20;0,3}(X\leq 7)\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}2264$

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit $n=200$ Schrauben und $p=0{,}02$ für nicht normgerechte Schrauben. Gesucht ist der Wert der Zufallsvariablen $X\geq k$ für die gilt: $B_{200;0,02}(X\geq k)=\leq 0{,}05$.

Hinweis:
Aus dem Text der Aufgabe heraus musst du erkennen, dass $p\neq 0{,}98$ sondern $p=1-0{,}98=0{,}02$ ist, da ja nach **nicht** normgerechten Schrauben gefragt ist.

Klausuraufschrieb GTR

$B_{200;0,02}$-verteilt.

$B_{200;0,02}(X\geq k)=1-B_{200;0,02}(X\leq k-1)\leq 0{,}05\overset{\text{GTR}}{=}k=8$
Die Lieferung sollte zurückgewiesen werden, wenn mehr als 7 Schrauben nicht normgerecht sind.

Klausuraufschrieb WTR

$B_{200;0,02}$-verteilt.
$B_{200;0,02}(X\geq k)=1-B_{200;0,02}(X\leq k-1)\leq 0{,}05$
$-B_{200;0,02}(X\leq k-1)\leq -0{,}95\qquad |\quad \cdot(-1)$
$B_{200;0,02}(X\leq k-1)\geq 0{,}95$
Erwartungswert μ:
$\mu=n\cdot p=200\cdot 0{,}02=4$
Standardabweichung σ:
$\sigma=\sqrt{\mu\cdot(1-p)}=\sqrt{4\cdot 0{,}98}=1{,}9798\approx 2$
Die Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}95$ liegt etwa im rechtsseitigen $1{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu+1{,}5\sigma=4+3=7$
Wir beginnen die Suche der Wahrscheinlichkeit mit $B_{200;0,02}(X\leq 6)$

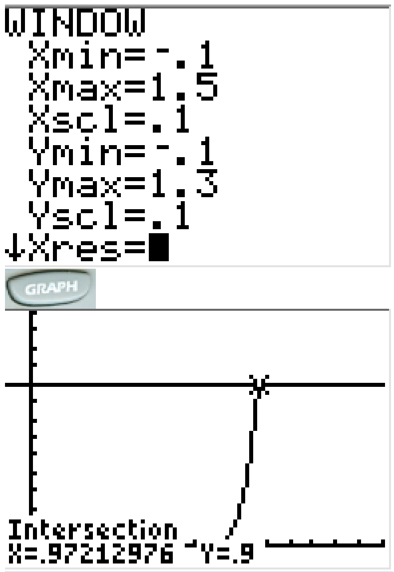
$B_{200;0,02}(X\leq 6)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}8914\qquad B_{200;0,02}(X\leq 7)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}95066$
Die Lieferung sollte zurückgewiesen werden, wenn mehr als 7 Schrauben nicht normgerecht sind.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl fehlerfreier Glühlampen an. Gesucht ist der Prozentsatz p einwandfreier Glühlampen, für den bei einem Stichprobenumfang $n = 40$ $k = 38$ oder mehr einwandfreie Glühlampen eine Wahrscheinlichkeit von $90\,\%$ und mehr ergeben.

Klausuraufschrieb GTR



$B_{40;p}$-verteilt.

$B_{40;p}(X \geq 38) = 1 - B_{40;p}(X \leq 37) \geq 0{,}9$

GTR-Einstellungen:

Y1$=1 - binomcdf(40, X, 37)$

Y2$=0{,}9$

$p \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}972$ da $B_{40;0{,}972}(X \geq 38) \geq 0{,}9$

Der Prozentsatz einwandfreier Glühlampen der Gesamtproduktion müsste mindestens etwa $97{,}2\,\%$ *betragen.*

Klausuraufschrieb WTR

$B_{40;p}$-verteilt.

$B_{40;p}(X \geq 38) = 1 - B_{40;p}(X \leq 37) \geq 0{,}9$

$-B_{40;p}(X \leq 37) \geq -0{,}1 \qquad | \quad \cdot(-1)$

$B_{40;p}(X \leq 37) \leq 0{,}1$

Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Prozentsatz p variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.

Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte“ p die Wahrscheinlichkeiten $B_{40;p}(X \leq 37)$.

p	$B_{40;p}(X \leq 37)$	Kommentar
$0{,}5$	$0{,}99999$	Wert $> 0{,}1$
$0{,}8$	$0{,}99206$	Wert $> 0{,}1$
$0{,}9$	$0{,}7719$	Wert $> 0{,}1$
$0{,}99$	$0{,}0075$	Wert $< 0{,}1$, der gesuchte Wert liegt somit zwischen $0{,}9 < p < 0{,}99$
$0{,}95$	$0{,}32326$	Wert $> 0{,}1$, der gesuchte Wert liegt somit $0{,}95 < p < 0{,}99$
$0{,}96$	$0{,}2145$	Wert $> 0{,}1$, der gesuchte Wert liegt somit $0{,}96 < p < 0{,}99$
$0{,}97$	$0{,}1178$	Wert $> 0{,}1$, aber nahe an $0{,}1$. Ab hier Schritte mit $> 0{,}01$
$0{,}972$	$0{,}1011$	Wert $> 0{,}1$
$0{,}973$	$0{,}0931$	Wert $< 0{,}1$. Wir erklären $p = 0{,}973$ als gsuchten Wert.

$p \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}973$, denn $B_{40;0{,}973}(X \geq 38) = 0{,}9069$

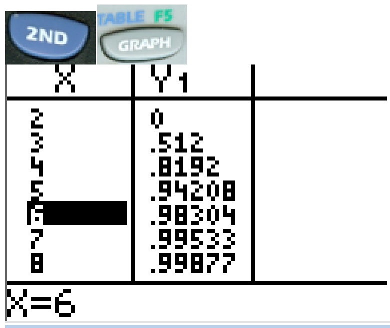
Der Prozentsatz einwandfreier Glühlampen der Gesamtproduktion müsste mindestens etwa $97{,}3\,\%$ *betragen.*

Lösung A4

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Patienten mit Karies an. Gesucht ist der Stichprobenumfang n, für den 3 oder mehr Karteikarten von Kariespatienten bei $p = 0{,}8$ für Karieserkrankung eine Wahrscheinlichkeit von $95\,\%$ und mehr ergeben.

Klausuraufschrieb GTR



$B_{n;0,8}$-verteilt.
$B_{n;0,8}(X \geq 3) = 1 - B_{n;0,8}(X \leq 2) \geq 0{,}95$
GTR-Einstellungen:
Y1$=1 - binomcdf(X, 0.8{,}2)$
$n \overset{\text{GTR}}{=} 6$ da $B_{6;0,8}(X \geq 3) \approx 0{,}9834$
Es müssen 6 Patientenkarten der Kartei entnommen werden.

Klausuraufschrieb WTR

$B_{n;0,8}$-verteilt.
$B_{n;0,8}(X \geq 3) = 1 - B_{n;0,8}(X \leq 2) \geq 0{,}95$
$-B_{n;0,8}(X \leq 2) \geq -0{,}05 \quad | \quad \cdot (-1)$
$B_{n;0,8}(X \leq 2) \leq 0{,}05$
Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Stichprobenumfang n variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.
Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte" n die Wahrscheinlichkeiten $B_{n;0,8}(X \leq 2)$.

n	$B_{n;0,8}(X \leq 2)$	Kommentar
3	$0{,}488$	Wert $> 0{,}05$
4	$0{,}1808$	Wert $> 0{,}05$
5	$0{,}0579$	Wert $> 0{,}05$
6	$0{,}0169$	Wert $< 0{,}05$. Wir erklären $n = 6$ zum gesuchten Wert.

$n \overset{\text{WTR}}{=} 6$, denn $1 - B_{6;0,8}(X \geq 2) = 0{,}9831$
Es müssen 6 Patientenkarten der Kartei entnommen werden.

Lösung A5

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der der defekten Chips.

a) Gesucht ist der Stichprobenumfang n, für den 1 oder mehr defekte Chips bei $p = 0{,}1$ für defekte Chips eine Wahrscheinlichkeit von $90\,\%$ und mehr ergeben.

b) Gesucht ist der Prozentsatz p defekter Chips an der Gesamtproduktion, für die bei einem Stichprobenumfang $n = 50$ $k = 2$ oder mehr defekte Chips eine Wahrscheinlichkeit von etwa $80\,\%$ sich ergibt.

Klausuraufschrieb GTR

$B_{50;p}$-verteilt.

$B_{50;p}(X \geq 2) = 1 - B_{50;p}(X \leq 2) \approx 0{,}8$

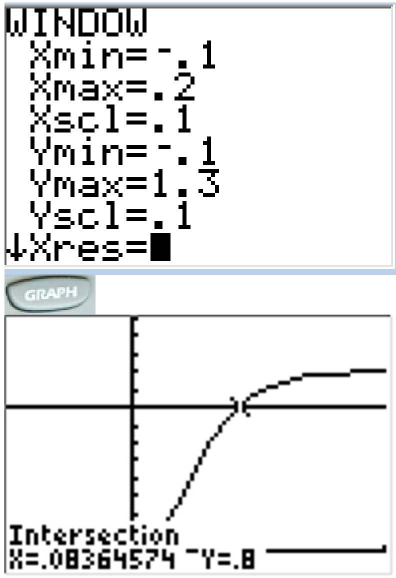
GTR-Einstellungen:

Y1$=1 - binomcdf(50, X, 2)$

Y2$=0{,}8$

$p \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0796$ da $B_{50;0{,}0796}(X \geq 2) = 0{,}7956$

Der Prozentsatz defekter Chips an der Gesamtproduktion darf etwa $8{,}3\,\%$ *nicht übersteigen.*



Klausuraufschrieb WTR

$B_{50;p}$-verteilt.

$B_{50;p}(X \geq 2) = 1 - B_{50;p}(X \leq 2) \approx 0{,}8$

$-B_{50;p}(X \leq 2) \approx -0{,}2 \qquad | \quad \cdot(-1)$

$B_{50;p}(X \leq 2) \approx 0{,}2$

Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Prozentsatz p variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.

Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte" p die Wahrscheinlichkeiten $B_{50;p}(X \leq 2)$.

p	$B_{50;p}(X \leq 2)$	Kommentar
$0{,}1$	$0{,}1117$	Wert $< 0{,}2$
$0{,}2$	$0{,}0012$	Wert $< 0{,}2$, der gesuchte Wert liegt somit kleiner $p = 0{,}1$
$0{,}05$	$0{,}5405$	Wert $> 0{,}2$
$0{,}06$	$0{,}4162$	Wert $> 0{,}2$
$0{,}065$	$0{,}3606$	Wert $> 0{,}2$
$0{,}07$	$0{,}3107$	Wert $> 0{,}2$
$0{,}08$	$0{,}2260$	Wert $> 0{,}2$, aber nahe bei
$0{,}085$	$0{,}1191$	Wert $< 0{,}1$, gesuchter Wert ist $0{,}08 < p < 0{,}085$
$0{,}083$	$0{,}2044$	Wert $\approx 0{,}2$. Wir erklären $p = 0{,}083$ als gesuchten Wert.

$p \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}083$, denn $1 - B_{50;0{,}083}(X \leq 2) = 0{,}7956$

Der Prozentsatz defekter Chips an der Gesamtproduktion darf etwa $8{,}3\,\%$ *nicht übersteigen.*

Lösung A6

Lösungslogik

a) Es handelt sich um eine Bernoullikette mit $B_{10;0{,}096}$-Verteilung.

b) Sei x der Prozentsatz der von Hersteller A gelieferten defekten Lampen, dann ist $1 - x$ der Prozentsatz der von Hersteller B gelieferten defekten Lampen. Danach hat Hersteller A $0{,}096 \cdot x$ und Hersteller B $0{,}046 \cdot (1 - x)$ defekte Lampen geliefert. In der Summe sollen diese nach Aufgabenstellung $6\,\%$ sein.

Klausuraufschrieb

a) $B_{10;0,096}$-verteilt mit :

$p = P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}096^0 \cdot (1 - 0{,}096)^{10} \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}3645$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $36{,}5\,\%$ sind in einer 10–er Packung von Hersteller A alle Lampen intakt.

b) Sei x der Prozentsatz der von Hersteller A gelieferten defekten Lampen.
Dann gilt:
Defekte Lampen von A: $0{,}096 \cdot x$
Defekte Lampen von B: $0{,}046 \cdot (1 - x)$
Defekte Lampen insgesamt: $6\,\% = 0{,}06$
$0{,}096 \cdot x + 0{,}046 \cdot (1 - x) = 0{,}06$
$0{,}05 \cdot x = 0{,}014 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}28$
$28\,\%$ der gelieferten Lampen stammen von Hersteller A, $72\,\%$ von Hersteller B.

Lösung A7

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X ist $B_{100;0,85}$-verteilt.
Höchstens 80 entspricht $P(X \leq 80)$.
Mindestens 40 und höchstens 90 entspricht $P(40 \leq X \leq 90)$.
Mindestens 85 entspricht $P(X \geq 85)$.
Bei „Wie groß darf die Gruppe höchstens sein“ ist n gesucht. Alle Patienten bedeutet dabei $B_{n;0,85}(X = k)$.

Klausuraufschrieb GTR

X ist $B_{100;0,85}$-verteilt.

$B_{100;0,85}(X \leq 80) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1065 \approx 10{,}7\,\%$

Mit ca. $10{,}7\,\%$ *Wahrscheinlichkeit werden höchstens* 80 *von* 100 *Patienten geheilt.*

$B_{100;0,85}(40 \leq X \leq 90) = P(X \leq 90) - P(X \leq 39) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}9449 \approx 94{,}5\,\%$

Mit ca. $94{,}5\,\%$ *Wahrscheinlichkeit werden mindestens* 40 *und höchstens* 90 *von* 100 *Patienten geheilt.*

$B_{100;0,85}(X \geq 85) = 1 - B_{100;0,85}(X \leq 84) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5683 \approx 56{,}8\,\%$

Mit ca. $56{,}8\,\%$ *Wahrscheinlichkeit werden mindestens* 85 *von* 100 *Patienten geheilt.*

Größe der Gruppe:

X ist $B_{n;0,85}$-verteilt.

$B_{n;0,85}(X = k) \geq 0{,}5 \quad \Rightarrow$

$n \overset{\text{GTR}}{=} 4$ denn $B_{4;0,85}(X = 4) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}5220$

Die Gruppe darf höchstens 4 *Patienten umfassen, damit mit mindestens* $50\,\%$ *Wahrscheinlichkeit alle geheilt werden.*

<u>Klausuraufschrieb WTR</u>

X ist $B_{100;0,85}$-verteilt.

$B_{100;0,85}(X \leq 80) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1065 \approx 10{,}7\ \%$

Mit ca. $10{,}7\ \%$ *Wahrscheinlichkeit werden höchstens* 80 *von* 100 *Patienten geheilt.*

$B_{100;0,85}(40 \leq X \leq 90) = P(X \leq 90) - P(X \leq 39) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9449 \approx 94{,}5\ \%$

Mit ca. $94{,}5\ \%$ *Wahrscheinlichkeit werden mindestens* 40 *und höchstens* 90 *von* 100 *Patienten geheilt.*

$B_{100;0,85}(X \geq 85) = 1 - B_{100;0,85}(X \leq 84) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}5683 \approx 56{,}8\ \%$

Mit ca. $56{,}8\ \%$ *Wahrscheinlichkeit werden mindestens* 85 *von* 100 *Patienten geheilt.*

Größe der Gruppe:

X ist $B_{n;0,85}$-verteilt.

$B_{n;0,85}(X = k) \geq 0{,}5$

Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Stichprobenumfang n variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.

Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte“ n die Wahrscheinlichkeiten $B_{n;0,8}(X \leq 2)$.

n/k	$B_{n;0,85}(X = k)$	Kommentar
2	$0{,}7225$	Wert $> 0{,}5$
3	$0{,}614125$	Wert $> 0{,}5$
4	$0{,}5220$	Wert $> 0{,}5$
5	$0{,}4437$	Wert $< 0{,}5$. Wir erklären $n = 4$ zum gesuchten Wert.

$n \overset{\text{WTR}}{=} 4$ denn $B_{4;0,85}(X = 4) = 0{,}5220$

Die Gruppe darf höchstens 4 *Patienten umfassen, damit mit mindestens* $50\ \%$ *Wahrscheinlichkeit alle geheilt werden.*

<u>Lösung A8</u>

<u>Lösungslogik</u>

a) Die Zufallsvariable X für defekte Chips ist $B_{50;0,05}$-verteilt.

b) Die Zufallsvariable X für intakte Chips ist $B_{50;p}$-verteilt.

<u>Klausuraufschrieb GTR</u>

a) X für defekte Chips ist $B_{50;0,05}$-verteilt.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}7206 \approx 72{,}1\ \%$

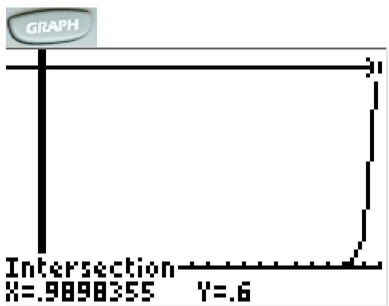
Mit ca. $72{,}1\ \%$ *Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung mehr als einen defekten Chip.*

b) X für intakte Chips ist $B_{50;p}$-verteilt.

$B_{50;p}(X = 50) \geq 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad p \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9898355$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Speicherchip aus der Gesamtproduktion intakt ist, beträgt jetzt mindestens ca. $99\ \%$.

GTR-Lösung für b)



Klausuraufschrieb WTR

a) X für defekte Chips ist $B_{50;0,05}$-verteilt.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}7206 \approx 72{,}1\,\%$

Mit ca. 72,1 % Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung mehr als einen defekten Chip.

b) X für intakte Chips ist $B_{50;p}$-verteilt.

$B_{50;p}(X = 50) \geq 0{,}6$

Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Prozentsatz p variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.

Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte“ p die Wahrscheinlichkeiten $B_{50;p}(X \leq 2)$.

p	$B_{50;p}(X = 50)$	Kommentar
0,8	0,000014	Wert $< 0{,}6$
0,9	0,00516	Wert $< 0{,}6$
0,98	0,3642	Wert $< 0{,}6$
0,99	0,6050	Wert $> 0{,}6$, wirt erklären $p = 0{,}99$ als gesuchten Wert.

$p \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}99$, denn $B_{50;0,99}(X = 50) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}6050$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Speicherchip aus der Gesamtproduktion intakt ist, beträgt jetzt mindestens ca. 99 %.

Lösung A9

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für Gewinn ist $B_{5;0,6}$-verteilt.

b) Die Zufallsvariable X für Gewinn ist $B_{20;p_a}$-verteilt.

Im 20. Spiel das sechste Mal gewinnen, bedeutet, dass in den vorigen 19 Spielen fünf Mal gewonnen werden musste. Die Wahrscheinlichkeit für $X = 5$ muss also noch einmal mit der Wahrscheinlichkeit für Gewinn multipliziert werden.

Klausuraufschrieb

a) $X \geq 4$ für Gewinn ist $B_{5;0,6}$-verteilt.

$B_{5;0,6}(X \geq 4) = 1 - B_{5;0,6}(X \leq 3) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}33696 \approx 33{,}7\,\%$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei diesem Spiel beträgt etwa 33,7 %.

b) $X \geq 6$ für Gewinn ist $B_{20;0,337}$-verteilt.

$B_{20;0,337}(X \geq 6) = 1 - B_{20;0,337}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}7147 \approx 71{,}5\,\%$

Mit ca. 71,5 % Wahrscheinlichkeit gewinnt Max mindestens 6 von 20 Spielen.

Im 20. Spiel das sechste Mal gewinnen:

$X = 5$ für 5 Mal Gewinn in den ersten 19 Spielen ist $B_{19;0,337}$-verteilt.

$p = B_{19;0,337}(X = 5) \cdot 0{,}337 \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}054 \approx 5{,}4\,\%$

Mit etwa 5,4 % Wahrscheinlichkeit gewinnt Max im 20. Spiel das sechste Mal.