Aufgabe A1

a) Die Nullhypothese $H_0\colon p_0 = 0{,}6$ soll gegen die Alternativhypothese $H_1\colon p_1 > 0{,}6$ bei einem Stichprobenumfang $n = 100$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\,\%$ getestet werden.
Bestimme den Ablehnungsbereich.

b) Die Nullhypothese $H_0\colon p_0 = 0{,}4$ soll gegen die Alternativhypothese $H_1\colon p_1 < 0{,}4$ bei einem Stichprobenumfang $n = 200$ und einem Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$ getestet werden.
Bestimme den Ablehnungsbereich.

Aufgabe A2

Ein Fußballspieler behauptet, beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von $95\,\%$ zu erreichen. Um seiner Behauptung zu untermauern, schießt er 50 Elfmeter.

a) Wie viele Treffer muss er erzielen, damit seine Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% glaubhaft ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man, wenn seine Behauptung bei 45 Treffern verworfen wird?

Aufgabe A3

Eine Person behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu haben. Um die Aussage zu überprüfen, wird 1000 mal gewürfelt und die Person muss die richtige Augenzahl vorhersagen. Wie viele richtige Vorhersagen muss die Person machen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $99{,}5\,\%$ diese Fähigkeiten tatsächlich akzeptiert werden?

Aufgabe A4

Auf einer Straße überschritten bisher $25\,\%$ der Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit. Nachdem zusätzliche Warnschilder angebracht wurden, konnte man beobachten, dass von 100 Fahrern nur noch 17 zu schnell unterwegs waren.

a) Kann man mit $95\,\%$-iger Sicherheit davon ausgehen, dass die Maßnahme Erfolg hatte?

b) Wie viele Fahrer hätten höchstens zu schnell fahren dürfen, um mit mindestens $98\,\%$-iger Sicherheit von einer Abnahme der Raserei sprechen zu können?

Aufgabe A5

Ein Medikament A ist laut Untersuchungen in $98\,\%$ aller Fälle wirksam. Ein vergleichbares, aber günstigeres Medikament B darf nur dann auf den Markt gebracht werden, wenn es eine bessere Wirkung wie das Medikament A besitzt.

Das Medikament B wird an 300 Personen getestet. Bei wie vielen dieser Personen muss das Medikament B Wirkung zeigen, damit ihm mit einer Sicherheit von $95\,\%$ eine bessere Wirkung wie das Medikament A attestiert werden kann?

Lösung A1

Lösungslogik

a) Rechtsseitiger Test
b) Linksseitiger Test

Klausuraufschrieb GTR

a) GTR-Einstellung:
Y1: $1 - binomcdf(100, .6, X)$
H_0: $p_0 = 0{,}6$; H_1: $p_1 > 0{,}6$ $\alpha = 0{,}02$; $n = 100$
$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{100;0,6}(X \geq k) = 1 - B_{100;0,6}(X \leq k - 1) \leq 0{,}02$
$k \overset{GTR}{=} 71$
$\overline{A} = [71; 72; \dots; 100]$

GTR-Ansicht zu a)

X	Y1
67	.09125
68	.0615
69	.03985
70	.02478
71	.01478
72	.00843
73	.0046

X=71

b) GTR-Einstellung:
Y1: $binomcdf(200, .4, X)$
H_0: $p_0 = 0{,}4$; H_1: $p_1 < 0{,}4$ $\alpha = 0{,}05$; $n = 200$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{200;0,4}(X \leq k) \leq 0{,}05$
$k \overset{GTR}{=} 68$
$\overline{A} = [0; 1; \dots; 68]$

GTR-Ansicht zu b)

X	Y1
64	.01187
65	.01731
66	.02472
67	.03459
68	.04748
69	.0639
70	.0844

X=68

Klausuraufschrieb WTR

a) H_0: $p_0 = 0{,}6$; H_1: $p_1 > 0{,}6$ $\alpha = 0{,}02$; $n = 100$
$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{100;0,6}(X \geq k) = 1 - B_{100;0,6}(X \leq k - 1) \leq 0{,}02$
$-B_{100;0,6}(X \leq k - 1) \leq -0{,}98$ | $\cdot(-1)$
$B_{100;0,6}(X \leq k - 1) \geq 0{,}98$
$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}6 = 60$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{60 \cdot 0{,}4} \approx 5$
$B_{100;0,6}(X \leq k - 1) \geq 0{,}98$ liegt etwa im $1{,}6\sigma$-Bereich.
$\mu + 1{,}6\sigma = 60 + 8 = 68$ | rechtsseitiger Test ist $\mu + 1{,}6\sigma$
Wir starten mit $k = 68$
$B_{100;0,6}(X \leq 68) = 0{,}96015$ $B_{100;0,6}(X \leq 69) = 0{,}97052$
$B_{100;0,6}(X \leq 70) = 0{,}98522$
$k - 1 = 70$
$k = 71$
$\overline{A} = [71; 72; \dots; 100]$

b) H_0: $p_0 = 0{,}4$; H_1: $p_1 < 0{,}4$ $\alpha = 0{,}05$; $n = 200$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{200;0,4}(X \leq k) \leq 0{,}05$
$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}4 = 80$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{80 \cdot 0{,}6} \approx 7$
$B_{200;0,4}(X \leq) \leq 0{,}05$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu - 1{,}5\sigma = 80 - 11 = 69$ | linksseitiger Test ist $\mu - 1{,}5\sigma$
Wir starten mit $k = 69$
$B_{200;0,4}(X \leq 69) = 0{,}0639$ $B_{200;0,4}(X \leq 68) = 0{,}0475$
$k = 68$
$\overline{A} = [0; 1; \dots; 68]$

Lösung A2

Lösungslogik

a) Linksseitiger Test
b) Siehe Klausuraufschrieb

Klausuraufschrieb GTR

GTR-Einstellung:
Y1: $binomcdf(50, .95, X)$

X	Y1
40	1.6E-4
41	7.6E-4
42	.00319
43	.01179
44	.03778
45	.10362
46	.23959

X=44

a) H_0: $p_0 = 0{,}95$; H_1: $p_1 < 0{,}95$ $\alpha = 0{,}05$; $n = 50$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{50;0{,}95}(X \leq k) \leq 0{,}02$
$k \overset{GTR}{=} 43$
$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 43]$
Der Spieler muss mindestens 44 Treffer erzielen, damit seine Behauptung glaubhaft ist.

b) $B_{50;0{,}95}(X \leq 43) \overset{GTR}{\approx} 0{,}01179$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit für die Ablehnung bei nur bis zu 44 Treffern beträgt etwa 1,2 %.

Klausuraufschrieb WTR

a) H_0: $p_0 = 0{,}95$; H_1: $p_1 < 0{,}95$ $\alpha = 0{,}05$; $n = 50$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{50;0{,}95}(X \leq k) \leq 0{,}02$
$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}95 = 47{,}5$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{47{,}5 \cdot 0{,}05} \approx 1{,}5$
$B_{50;0{,}95}(X \leq k) \leq 0{,}02$ liegt etwa im $1{,}6\sigma$-Bereich.
$\mu - 1{,}6\sigma = 47{,}5 - 2{,}4 = 45$ | linksseitiger Test ist $\mu - 1{,}6\sigma$
Wir starten mit $k = 45$
$B_{50;0{,}95}(X \leq 45) = 0{,}1036$ $B_{50;0{,}95}(X \leq 44) = 0{,}0377$
$B_{50;0{,}95}(X \leq 43) = 0{,}0117$
$k = 43$
$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 43]$
Der Spieler muss mindestens 44 Treffer erzielen, damit seine Behauptung glaubhaft ist.

b) $B_{50;0{,}95}(X \leq 43) \overset{WTR}{\approx} 0{,}0117$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit für die Ablehnung bei nur bis zu 43 Treffern beträgt etwa 1,2 %.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit, die richtige Augenzahl beim Würfeln zu raten beträgt $p_0 = \frac{1}{6}$. Diese Wahrscheinlichkeit wird bezweifelt, sodass $p_1 < \frac{1}{6}$ ist. Wegen $p_1 < p_0$ ist ein linksseitiger Test durchzuführen.

Klausuraufschrieb GTR

GTR-Einstellung:

Y1: $binomcdf(1000, \frac{1}{6}, X)$

X	Y1
132	.00146
133	.00195
134	.00258
135	.0034
136	.00443
137	.00574
138	.00737

X=136

H_0: $p_0 = \frac{1}{6}$; H_1: $p_1 < \frac{1}{6}$; $n = 1000$

$p_1 < p_0 \Rightarrow$ linksseitiger Test

$B_{1000;\frac{1}{6}}(X \leq k) \leq 0{,}005$

$k \overset{GTR}{=} 136$

$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 136]$

Der Wahrsager muss mindestens 137 *richtige Voraussagen machen.*

Klausuraufschrieb WTR

H_0: $p_0 = \frac{1}{6}$; H_1: $p_1 < \frac{1}{6}$; $n = 1000$

$p_1 < p_0 \Rightarrow$ linksseitiger Test

$B_{1000;\frac{1}{6}}(X \leq k) \leq 0{,}005$

$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166{,}7$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{166{,}7 \cdot \frac{5}{6}} \approx 12$

$B_{1000;\frac{1}{6}}(X \leq k-1) \geq 0{,}995$ liegt etwa im $2{,}5\sigma$-Bereich.

$\mu - 2{,}5\sigma = 166{,}7 - 30 = 137$ | linksseitiger Test ist $\mu - 2\sigma$

Wir starten mit $k = 137$

$B_{1000;\frac{1}{6}}(X \leq 137) = 0{,}0057$ $\quad B_{1000;\frac{1}{6}}(X \leq 136) = 0{,}0010$

$k = 136$

$\overline{A} = [0; 1; 2; \ldots; 136]$

Der Wahrsager muss mindestens 137 *richtige Voraussagen machen.*

Lösung A4

Lösungslogik

a) Wenn nur noch 17 Fahrer zu schnell unterwegs waren, dann haben mehr als 18 Fahrer die Geschwindigkeit eingehalten.

b) Linksseitiger Test

Klausuraufschrieb GTR

a) $B_{100;0,25}(X \geq 18) = 1 - B_{100;0,25}(X \leq 17) \overset{GTR}{\approx} 0{,}9624$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 17 *Fahrer die Geschwindigkeits-begrenzung einhielten beträgt etwa* $96{,}2\,\%$*. Man kann also mit* $95\,\%$*-iger Sicherheit davon ausgehen dass die Maßnahme Erfolg hatte.*

b) GTR-Einstellung:

Y1: $binomcdf(100, .25, X)$

X	Y1
12	.00103
13	.00246
14	.00542
15	.01108
16	.02111
17	.03763
18	.06301

X=15

H_0: $p_0 = 0{,}25$; H_1: $p_1 < 0{,}25$; $n = 100$; $\alpha = 0{,}02$

$p_1 < p_0 \Rightarrow$ linksseitiger Test

$B_{100;0,25}(X \leq k) \leq 0{,}02$

$k \overset{GTR}{=} 15$

$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 15]$

Es hätten höchstens 15 *Fahrer zu schnell fahren dürfen.*

Klausuraufschrieb WTR

a) $B_{100;0,25}(X \geq 18) = 1 - B_{100;0,25}(X \leq 17) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9624$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 17 *Fahrer die Geschwindigkeitsbegrenzung einhielten beträgt etwa* $96{,}2\ \%$. *Man kann also mit* $95\ \%$*-iger Sicherheit davon ausgehen dass die Maßnahme Erfolg hatte.*

b) $H_0\colon\ p_0 = 0{,}25;\quad H_1\colon p_1 < 0{,}25;\ \ n = 100;\ \ \alpha = 0{,}02$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{100;0,25}(X \leq k) \leq 0{,}02$
$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}25 = 25$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{25 \cdot 0{,}75} \approx 4{,}3$
$B_{100;0,25}(X \leq k) \leq 0{,}02$ liegt etwa im 2σ-Bereich.
$\mu - 2\sigma = 25 - 8{,}6 = 17$ | linksseitiger Test ist $\mu - 2\sigma$
Wir starten mit $k = 17$
$B_{100;0,25}(X \leq 17) = 0{,}0376$ $\quad B_{100;0,25}(X \leq 16) = 0{,}0211$
$B_{100;0,25}(X \leq 15) = 0{,}0110$
$k = 15$
$\overline{A} = [0; 1; \dots; 15]$
Es hätten höchstens 15 *Fahrer zu schnell fahren dürfen.*

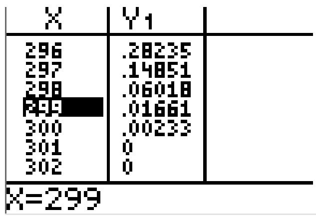
Lösung A5

Lösungslogik

Rechtsseitiger Test

Klausuraufschrieb GTR

GTR-Einstellung:
Y1: $1 - binomcdf(300, .98, X)$
$H_0\colon\ p_0 = 0{,}98;\quad H_1\colon p_1 > 0{,}98;\ \ n = 300;\ \ \alpha = 0{,}05$
$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{300;0,98}(X \geq k) = 1 - B_{300;0,98}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$
$k \overset{\text{GTR}}{=} 299$
$\overline{A} = [299; 300]$
Das neue Medikament muss bei mindestens 299 *Personen Wirkung zeigen.*



Klausuraufschrieb WTR

$H_0\colon\ p_0 = 0{,}98;\quad H_1\colon p_1 > 0{,}98;\ \ n = 300;\ \ \alpha = 0{,}05$
$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{300;0,98}(X \geq k) = 1 - B_{300;0,98}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$
$-B_{300;0,98}(X \leq k-1) \leq -0{,}95$ | $\cdot(-1)$
$B_{300;0,98}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$
$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}98 = 294$ $\quad \sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{294 \cdot 0{,}02} \approx 2{,}4$
$B_{300;0,98}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu + 1{,}5\sigma = 294 + 3{,}6 = 297$ | rechtsseitiger Test ist $\mu + 1{,}5\sigma$
Wir starten mit $k - 1 = 297$
$B_{300;0,98}(X \leq 297) = 0{,}9398$ $\quad B_{300;0,98}(X \leq 298) = 0{,}9833$
$k - 1 = 298 \implies k = 299$
$\overline{A} = [299; 300]$
Das neue Medikament muss bei mindestens 299 *Personen Wirkung zeigen.*