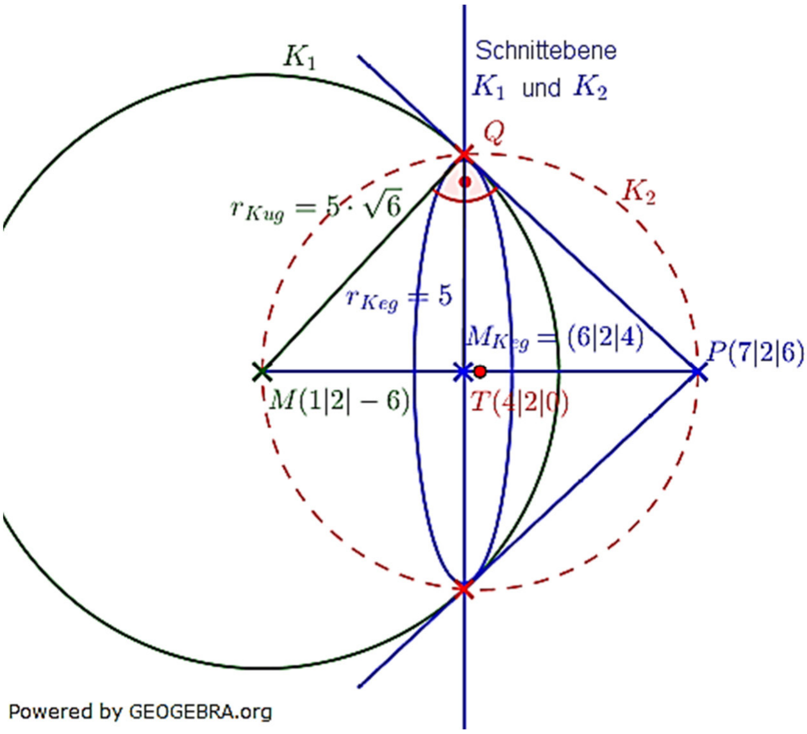
Lösung A1

Lösungslogik

Die nachfolgende Grafik mit dem Schnitt durch die Achse $\overline{MP}$ verdeutlicht die Situation. Die angezeigten Werte sind aus Teilaufgabe a) entnommen.



Gesucht sind die Koordinaten des Punktes M_{Keg} sowie der Radius $|\overrightarrow{QM_{Keg}}|$ des Grundkreises des Tangentialkegels. Die Seitenlinie des Kegels $\overline{PQ}$ tangiert die gegebene Kugel K_1 im Punkt Q. Somit muss der Radius der Kugel $r_{Kug} = 5 \cdot \sqrt{6}$ im Punkt Q senkrecht auf der Seitenlinie stehen. Damit ist das Dreieck PMQ in Q rechtwinklig und ist ein Dreieck unter dem Thales Kreis. Der Mittelpunkt T des Thales Kreises ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PM}$.

Die Punkt Q ist somit Schnittpunkt eines Kreises mit Mittelpunkt $M(1|2|-6)$ und Radius $r = 5 \cdot \sqrt{6}$ mit einem Kreis mit Mittelpunkt $T(4|2|0)$ und Radius $r_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM}$.

Da wir uns aber im dreidimensionalem Raum bewegen, haben wir es nicht mit Kreisen, sondern mit Kugeln zu tun.

Die Lösung dieser Aufgabe führt somit zur Berechnung der Schnittebene der gegebenen Kugel K_1 und der Kugel des Thales-Kreises K_2 mit Mittelpunkt $T(4|2|0)$ und Radius $r_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{PM}$.

Nach Aufstellung der beiden Kugelgleichungen schneiden wir diese und erhalten die Koordinatengleichung der Schnittebene S.

Wir stellen die Geradengleichung g durch die Punkte M und P auf und schneiden diese mit der Ebene S. Dadurch erhalten wir die Koordinaten des Schnittpunktes von g und S. Diese sind die Koordinaten des gesuchten Mittelpunktes.

Der Radius r_{Keg} bestimmt sich über den Satz des Pythagoras im Dreieck $MM_{Keg}Q$ aus $r_{Keg} = |\overline{M_{Keg}Q}| = \sqrt{{r_{Kug}}^2 - |\overline{MM_{Keg}}|^2}$

Klausuraufschrieb

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{PM}$ und dessen Länge $|\overrightarrow{PM}|$:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 1-7 \\ 2-2 \\ -6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{6^2 + (2\cdot 6)^2} = \sqrt{5\cdot 6^2} = 6\cdot\sqrt{5}$$

Berechnung Mittelpunkt T der Strecke $\overline{PM}$:

$$\overrightarrow{OT} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 7+1 \\ 2+2 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung der gegebenen Kugel mit Mittelpunkt $M(1|2|-6)$ und Radius $r_{Kug} = 5\cdot\sqrt{6}$:

$$K_1:\quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right)^2 = \left(5\cdot\sqrt{6}\right)^2$$

$$x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_3^2 + 12x_3 + 36 = 150$$

$$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 + 12x_3 - 109 = 0$$

Gleichung der Kugel über dem Thales Kreis mit Mittelpunkt $T(4|2|0)$ und Radius $r = 3\cdot\sqrt{5}$:

$$K_2:\quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \left(3\cdot\sqrt{5}\right)^2$$

$$x_1^2 - 8x_1 + 16 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + x_3^2 = 45$$

$$x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 25 = 0$$

$K_1 \cap K_2$

(I) $\quad x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 + 12x_3 - 109 = 0$

(II) $\quad x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 25 = 0$

(I)-(II) $\quad 6x_1 + 12x_3 - 84 = 0 \qquad | \quad :6$

$\quad x_1 + 2x_3 - 14 = 0$

Die Schnittebene hat die Gleichung $S\colon\ x_1 + 2x_3 - 14 = 0$

Geradengleichung durch M und P:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OM} + r\cdot\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt M_{Keg} über Schnittpunkt von g mit S:

Aus g folgt:

$x_1 = 1 + 6r;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = -6 + 12r$

$x_1; x_2; x_3 \to S$:

$1 + 6r + 2(-6 + 12r) - 14 = 0$

$6r + 24r + 1 - 12 - 14 = 0$

$30r = +25$

$r = +\frac{5}{6}$

$r \to g$

$$\overrightarrow{OM_{Keg}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \tfrac{5}{6}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt des Grundkreises hat die Koordinaten $M_{Keg}(6|2|4)$.

Radius des Grundkreises über den Satz des Pythagoras:

$$|\overline{M_{Keg}Q}| = r_{Keg} = \sqrt{{r_{Kug}}^2 - |\overline{MM_{Keg}}|^2}$$

$$|\overline{MM_{Keg}}| = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2 + \big(4-(-6)\big)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125}$$

$$|\overline{MM_{Keg}}|^2 = 125$$

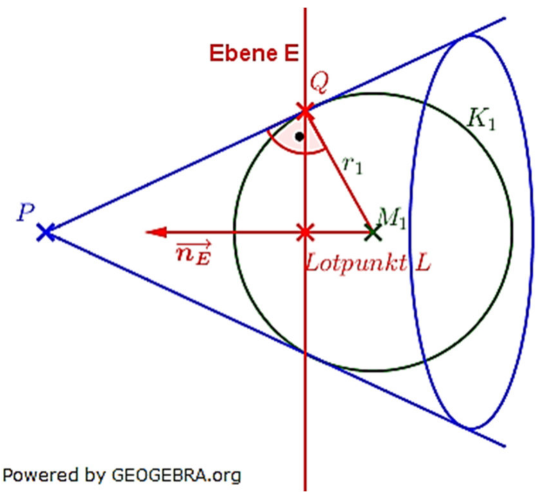
$$r_{Keg} = \sqrt{(5\cdot\sqrt{6})^2 - 125} = 5$$

Der Grundkreis des Kegels hat einen Radius von $r_{Keg} = 5\,LE$.

Lösung A2

Lösungslogik

Die nebenstehende Grafik mit dem Schnitt durch die Achse $\overline{M_1P}$ verdeutlicht die Situation.
Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes benötigen wir die Länge der Strecke $\overline{M_1P}$. Aus der Grafik ist (nach dem Kathetensatz) ersichtlich, dass:
$\overline{M_1Q}^2 = r_1^2 = |\overrightarrow{M_1L}| \cdot |\overrightarrow{M_1P}|$ und somit
$|\overrightarrow{M_1P}| = \frac{r_1^2}{|\overrightarrow{M_1L}|}$.
r_1 ist gegeben, $|\overrightarrow{M_1L}|$ berechnen wir über die HNF als Abstand des Punktes M_1 von der Ebene E.



Nachdem die Länge der Strecke $|\overrightarrow{M_1P}|$ bekannt ist, Stellen wir die Geradengleichung g durch M_1 mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E als Richtungsvektor auf. Die Koordinaten des Punktes P berechnen wir dann, indem wir vom Punkt M_1 aus die Strecke $\overline{M_1P}$ in Richtung des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ abtragen.

Klausuraufschrieb

a) *Aufstellung Ebene und deren Normalenvektor sowie die Gerade g:*

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$E:\; x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 30$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + r\cdot\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

HNF:

$$\frac{x_1+3x_2+3x_3-30}{\sqrt{1+9+9}} = 0$$

Nach dem Kathetensatz gilt:

$$\overline{M_1Q}^2 = r_1^2 = |\overrightarrow{M_1L}|\cdot|\overrightarrow{M_1P}| ==>$$

$$|\overrightarrow{M_1P}| = \frac{r_1^2}{|\overrightarrow{M_1L}|}$$

$|\overrightarrow{M_1L}|$ *über die HNF:*

$$|\overrightarrow{M_1L}| = \frac{|1\cdot2+3\cdot1+3\cdot3-30|}{\sqrt{19}} = \frac{|-16|}{\sqrt{19}} = \frac{16}{\sqrt{19}}$$

$|\overrightarrow{M_1P}|$ über Kathetensatz:

$\left|\overrightarrow{M_1P}\right| = \frac{16}{\frac{16}{\sqrt{19}}} = \sqrt{19}$

Einheitsvektor von $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (= Richtungsvektor von g):

$\overrightarrow{n_{E_0}} = \frac{1}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnung der Koordinaten von P:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \left|\overrightarrow{PM_1}\right| \cdot \overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{19} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+3 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

P hat die Koordinaten $P(3|4|6)$

b) *Aufstellung Ebene und deren Normalenvektor sowie die Gerade g:*

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$E\colon\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4$

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + r \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

HNF:

$\frac{4x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 4}{\sqrt{16+16+25}} = 0$

Nach dem Kathetensatz gilt:

$\overline{M_1Q}^2 = r_1^2 = \left|\overrightarrow{M_1L}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_1P}\right|$ ==>

$|\overrightarrow{M_1P}| = \frac{r_1^2}{|\overrightarrow{M_1L}|}$

$|\overrightarrow{M_1L}|$ *über die HNF:*

$\left|\overrightarrow{M_1L}\right| = \frac{|4\cdot(-1) - 4\cdot 2 + 5\cdot(-4) - 4|}{\sqrt{16+16+25}} = \frac{|-36|}{\sqrt{57}} = \frac{36}{\sqrt{57}}$

$|\overrightarrow{M_1P}|$ über Kathetensatz:

$\left|\overrightarrow{M_1P}\right| = \frac{36}{\frac{36}{\sqrt{57}}} = \sqrt{57}$

Einheitsvektor von $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (= Richtungsvektor von g):

$\overrightarrow{n_{E_0}} = \frac{1}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{\sqrt{57}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechnung der Koordinaten von P:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \left|\overrightarrow{PM_1}\right| \cdot \overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \sqrt{57} \cdot \frac{1}{\sqrt{57}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 2-4 \\ -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

P hat die Koordinaten $P(3|-2|1)$

Lösung A3

Lösungslogik

In der Grafik der Aufgabenstellung sehen wir den Lösungstipp $\frac{a+|\overrightarrow{M_1M_2}|}{a}=\frac{r_2}{r_1}$. Das Verhältnis ergibt sich aus dem zweiten Strahlensatz.
Die Mittelpunkte sind in den Kugelgleichungen gegeben, ebenfalls die Radien. Die Länge des Vektors $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ ist berechenbar. Damit können wir a errechnen. Zur Ermittlung des Punktes P müssen wir dann mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ die Länge a vom Punkt M_1 aus abtragen. Dabei ist zu beachten, dass M_2 der Mittelpunkt der größeren Kugel und M_1 Mittelpunkt der kleineren Kugel ist.

Klausuraufschrieb

a) *Bestimmung der Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie der Radien r_1 und r_2:*

Kleine Kugel K_2: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right]^2=9 \quad M_1(2|0|2);\ r_1=3$

Große Kugel K_1: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right]^2=16 \quad M_2(3|1|4);\ r_2=4$

Bestimmung $|\overrightarrow{M_1M_2}|$:

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-2)^2+(1-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{6}$

Berechnung von a:

$\frac{a+\sqrt{6}}{a}=\frac{4}{3}$

$4a=3(a+\sqrt{6})$

$a=3\sqrt{6}$

Vektor $\overrightarrow{M_2M_1}$:

$\overrightarrow{M_2M_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Einheitsvektor $\overrightarrow{M_2M_1}_0$:

$\overrightarrow{M_2M_1}_0=\frac{1}{|\overrightarrow{M_2M_1}|}\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Berechnung der Koordinaten von P:

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM_1}+a\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-4\end{pmatrix}$

P hat die Koordinaten $P(-1|-3|-4)$

b) *Bestimmung der Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie der Radien r_1 und r_2:*

Große Kugel K_2: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}\right]^2=25 \quad M_2(3|5|9);\ r_2=5$

Kleine Kugel K_1: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]^2=4 \quad M_1(1|0|1);\ r_1=2$

Bestimmung $|\overrightarrow{M_1M_2}|$:

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-1)^2+(5-0)^2+(9-1)^2}=\sqrt{93}$

Berechnung von a:

$\frac{a+\sqrt{93}}{a}=\frac{5}{2}$

$5a = 2(a + \sqrt{93})$

$3a = 2\sqrt{93} \implies a = \frac{2}{3}\sqrt{93}$

Vektor $\overrightarrow{M_2M_1}$:

$\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

Einheitsvektor $\overrightarrow{M_2M_1}_0$:

$\overrightarrow{M_2M_1}_0 = \frac{1}{|\overrightarrow{M_2M_1}|} \cdot \overrightarrow{M_2M_1} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{93}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

Berechnung der Koordinaten von P:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + a \cdot \frac{3}{2 \cdot \sqrt{93}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

P hat die Koordinaten $P(-1|-5|-7)$