Analytische Geometrie|Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 01

Lösung A1

a) *Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$:*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+(-2) \\ 2+(-1) \\ 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinaten des Mittelpunktes lauten $M(-0{,}5|0{,}5|0)$

b) *Parametergleichung von g:*

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2-1 \\ -1-2 \\ -3-3 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) *Bestimmung eines Punktes P mit Abstand $2\,LE$ von A:*

Dieser Punkt liegt im Abstand $2\,LE$ in einer beliebigen Richtung von A, außer in Richtung des Richtungsvektors von g.

Die einfachste Lösung wäre eine Verschiebung von A mit den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+0 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{alternativ}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2+2 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{alternativ}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2+0 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) *Einheitsvektor von $\overrightarrow{AB}$:*

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, siehe Aufgabenteil b)

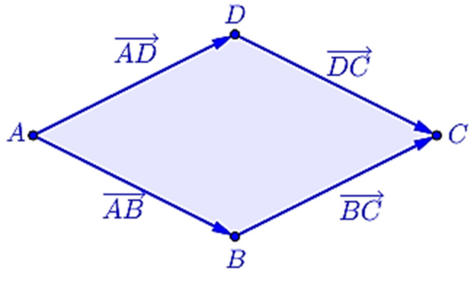
$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) *Punkte C und D, damit $ABCD$ eine Raute ist.*

Da lediglich die Punkte A und B gegeben sind, kann die Raute im eine beliebige Lage in $R3$ haben, es muss lediglich dafür gesorgt werden, dass gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \ \wedge \ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$



Powered by GEOGEBRA.org

Analytische Geometrie|Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 01

Bestimmung eines von $\overrightarrow{AB}$ linear unabhängigen Vektors $\overrightarrow{AD}$ mit der Länge $|\overrightarrow{AB}|$:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{54}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}; \; |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} = \sqrt{54}$

Wir haben eine Gleichung mit drei Unbekannten, wählen zwei Unbekannte frei und berechnen daraus die dritte Unbekannte:

$d_1 = 6; \; d_2 = 3$

$\sqrt{36 + 9 + d_3^2} = \sqrt{54} \quad ==> \quad d_3 = 3$

Koordinaten von D:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Koordinaten von C:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Punkte $C(4|2|0)$ und $D(7|5|6)$ ergänzen die Punkte A und B zur Raute $ABCD$.

Lösung A2

a) *Abstand von Tatooine zu Naboo:*

$\overrightarrow{TN} = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OT})$

$\overrightarrow{TN} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -2-6 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{TN}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96} = 4 \cdot \sqrt{6}$

Der Abstand der beiden Planeten beträgt $4 \cdot \sqrt{6}$ Sternenkilometer.

b) *Flugbahn von Luke:*

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{TN} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ für t in 4 Stunden.

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{TN} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für t in einer Stunde.

c) Punkt M als Mittelpunkt der Strecke $\overline{TN}$:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{ON})$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6+2 \\ -2+6 \\ 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit von Luke:

$|\overrightarrow{v_L}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6}$ Sternenkilometer / Stunde

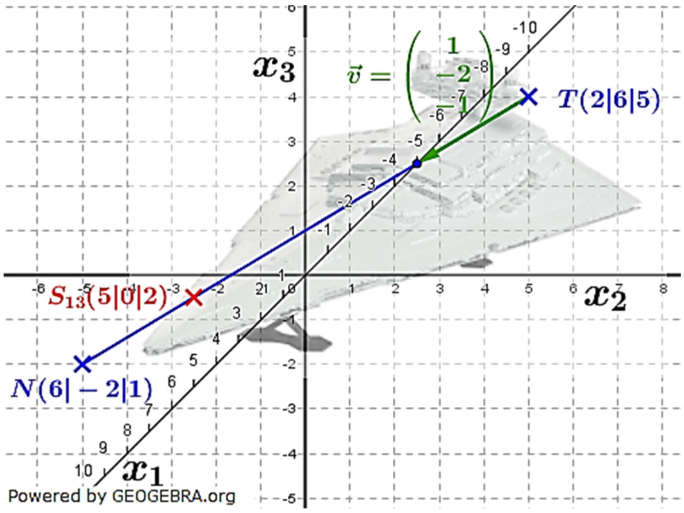
Parametergleichung der Nachricht:

$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

h beschreibt dieselbe Gerade wie g, da der Aufpunkt von h auf g liegt und der Richtungsvektor von h ein Vielfaches des Richtungsvektors von g ist.

Ankunftszeit der Nachricht:
Da die Nachricht viermal schneller ist als Luke, Luke aber bereits 2 Sternstunden unterwegs ist und nochmals 2 Sternstunden bis zur Ankunft benötigt, wird die Nachricht somit $0{,}5$ Sternstunden benötigen bis zu ihrer Ankunft auf Naboo.

d) siehe Grafik rechts.
Luke muss durch die x_1x_3-Ebene fliegen, da in dieser Ebene die x_2-Koordinate 0 ist, die x_2-Koordinate von Tatooine ist 6 und die von Naboo ist -2 und da Luke von Tatooine nach Naboo fliegt.



e) Spurpunkt $S_{13}(s_1|0|s_3)$:
Aus Lukes fluggerade folgt:
$6 - 2t = 0$
$2t = 6$
$t = 3$
$\overrightarrow{OS_{13}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
$S_{13}(5|0|2)$

f) Aus Teilaufgabe e) ergibt sich, dass Luke nach $t = 3$ Stunden Flugzeit an der Sonde vorbeifliegt. Die Nachricht der Sonde benötigt dann noch $0{,}5$ Stunden bis zum Sternenkreuzer von Darth Vader. Der Droiden-Sternjäger startet also Stunden nach Likes Abflug von Tatooine von Punkt $D(0|0|5)$.
Flugbahn des Droiden-Sternjägers:
$n\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Nachweis, dass Naboo auf der Flugbahn des Droiden-Sternjägers liegt:
Die Position von Naboo muss Element von n sein.
$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
(1) $6 = 3r ==> r = 2$
(2) $-2 = -r ==> r = 2$
(3) $1 = 5 - 2r ==> r = 2$
Geschwindigkeit des Droiden-Sternjägers:
$|\overrightarrow{v_D}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$ Sternenkilometer / Stunde
$|\overrightarrow{v_L}| = \sqrt{6}$ Sternenkilometer / Stunde
Die Geschwindigkeit des Droiden-Sternjägers ist größer als die von Luke.
Fluchtzeit für Luke und Leia:
Luke benötigt noch $0{,}5$ Stunden bis Naboo
Der Droiden-Sternjäger benötigt noch 2 Stunden bis Naboo (siehe $r = 2$ zuvor).
Luke und Leia verbleibt noch genügend Zeit zur Flucht.