Basis Rechenoperationen mit Wurzeln

Auf Wurzeln können die unterschiedlichsten Rechenoperationen angewandt werden, genauso wie mit Ausdrücken anderer mathematischer Bereiche. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit den Einzel-Operationen

- Teilweises Wurzelziehen
- Faktor unter die Wurzel bringen
- Wurzel Nenner rational machen
- Potenzdarstellung von Wurzeln

Teilweises Wurzelziehen

In bestimmten Fällen ist es möglich, nur von einem Teil des Radikanten die Wurzel zu ziehen. Dies ist immer dann möglich, wenn der Radikant in Faktoren zerlegt werden kann und einer dieser Faktoren ein quadratischer Ausdruck, ein Kubikausdruck bzw. eine Potenz des Wurzelexponenten ist.

Beispiel 1:

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Bei dieser Wurzel konnte die Zahl 12 in die beiden Faktoren 4 und 3 zerlegt werden, wobei der Faktor 4 eine Quadratzahl ist, von der die Wurzel gezogen werden kann.

$\sqrt[3]{a^3 b^2} = a\sqrt[3]{b^2}$

Diese Kubikwurzel besteht bereits aus einem Produkt. Aus a^3 kann die Kubikwurzel gezogen werden, aus b^2 eben nicht.

Beispiel 2:

$\sqrt[3]{a^3 \cdot b^6 \cdot c} = a \cdot b^2 \cdot \sqrt[3]{c}$

Die Regel besagt:

Sind ein oder mehrere Faktoren des Radikanten ein positives, ganzzahliges Vielfaches des Wurzelexponenten, so können diese Faktoren als Potenzen dieses Vielfachen vor die Wurzel geschrieben werden. Es gilt:

$\sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b^l} = a^m \sqrt[n]{b^l};\ \ n; m \in \mathbb{Z}^*$

Faktor unter die Wurzel bringen

In manchen Fällen ist es sinnvoll, zur Vereinfachung eines Wurzelterms eine Zahl, die vor einer Wurzel steht, unter die Wurzel zu schreiben.

Beispiel 3:

$3 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{27}$

$2 \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8 \cdot a}$

Die Regel besagt:

Soll ein vor einer Wurzel stehender Faktor unter die Wurzel geschrieben werden, so ist dieser Faktor zunmächst mit dem Wurzelexponenten zu potenzieren.

$r\sqrt[n]{s^m} = \sqrt[n]{r^n s^m}$

Wurzel Nenner rational machen

Im allgemeinen ist es unüblich bei einem Bruch eine Wurzel im Nenner stehen zu lassen. Mathematikern gefällt der Ausdruck $\frac{2}{\sqrt{2}}$ überhaupt nicht. Sie bemühen sich, die Wurzel im Nenner irgendwie zu beseitigen.

Das lässt sich einfach bewerkstelligen, indem wir den Bruch genau mit der im Nenner stehenden Wurzel erweitern.

Beispiel 4:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Zunächst wurde hier mit $\sqrt{2}$ erweitert, durch ausmultiplizieren des Nenners ergibt sich die Zahl 2, die dann abschließend noch mit der im Zähler stehenden 2 gekürzt wurde.

Beispiel 5:

$$\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}=\frac{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}}=\frac{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\frac{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}{x-2}=\sqrt{x-2}$$

Zunächst wurde hier mit $\sqrt{x-2}$ erweitert, durch ausmultiplizieren des Nenners ergibt sich der Ausdruck $x-2$, der dann abschließend noch mit dem im Zähler stehenden Ausdruck $x-2$ gekürzt wurde.

Die Regel besagt:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^m}}{\sqrt[n]{b^m}.\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^m}}{b^m}$$

In manchen Fällen steht nicht nur eine Wurzel im Nenner wie in den vorigen Beispielen, sondern ein Ausdruck aus zwei Gliedern, wie z. B. $4-\sqrt{x}$ oder $\sqrt{a}+b$. Wir können zwar nicht alle Wurzeln aus Ausdrücken durch Erweitern eliminieren, jedoch die genannten zwei Beispiele $4-\sqrt{x}$ bzw. $\sqrt{a}+b$. Bestehen die Nennerausdrücke nämlich aus einer Addition bzw. Subtraktion zweier Elemente, können solche Ausdrücke so erweitert werden, dass ein binomischer Ausdruck der 3. binomischen Formel entsteht. So ist ja z. B. $(4-\sqrt{x})\cdot(4+\sqrt{x})$ gemäß den Regeln der 3. binomischen Formel gleich $16-x$. Somit kann bei bestimmten Ausdrücken ein Nenner mit Hilfe der Regel der 3. binomischen Formel rational gemacht werden.

Beispiel 6:

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\frac{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\sqrt{x}+2$$

Zunächst wurde hier mit $\sqrt{x}+2$ erweitert, durch Anwendung der dritten binomischen Formel im Nenner ergibt sich dieser zu $x-4$, der dann abschließend noch mit dem im Zähler stehenden Ausdruck $x-4$ gekürzt wurde.

Potenzdarstellung von Wurzeln

In bestimmten Sitationen ist es erforderlich, eine Wurzel in die Potenzschreibweise zu überführen. (z. B. innerhalb der Differenzialrechnug in den Ableitungen).

Beispiel 7:

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Wurzeln können als Potenz dargestellt werden, indem die Wurzelbasis mit dem Quotienten aus Basisexponent und Wurzelexponent potenziert wird.

Beispiel 8:

$\sqrt[-3]{5} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

$\sqrt[-n]{a^m} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Werden Wurzeln mit negativem Wurzelexponent oder Basisexponent als Potenz dargestellt, so entspricht die Darstellung dem Kehrwert der positiven Darstellung.