WIKI zur Wurzelrechnung

Einführung

In der Mathematik versteht man unter ***Wurzelziehen*** oder ***Radizieren*** die Bestimmung der Unbekannten x in der Potenz

$$a = x^n$$

Hierbei ist n eine natürliche Zahl größer als 1 und a eine nichtnegative reelle Zahl. Das Ergebnis des Wurzelziehens bezeichnet man als ***Wurzel*** oder ***Radix*** (von lat. *radix* „Wurzel"). Das Radizieren ist eine Umkehrung des Potenzierens. Im Fall $n = 2$ spricht man von ***Quadratwurzeln***, bei $n = 3$ von ***Kubikwurzeln***.

Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine *nichtnegative* Lösung. Diese wird als *n-te Wurzel* aus a bezeichnet. Man schreibt dafür

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Hierbei bezeichnet man $\sqrt[n]{a}$ als *Wurzel* oder *Radix*, n als *Wurzelexponent*, a als *Radikand* oder *Wurzelbasis*. Üblicherweise wird die zweite Wurzel als Quadratwurzel oder einfach nur als *die* Wurzel bezeichnet und der Wurzelexponent weggelassen:

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$

Die Wurzeln mit dem Wurzelexponenten 3 (dritte Wurzeln) bezeichnet man auch als Kubikwurzeln.

$$\sqrt[3]{\mathbf{8}} = \mathbf{2}$$

(Sprich: *Die dritte Wurzel aus 8 ist 2* oder *Die Kubikwurzel aus 8 ist 2*).

Das Operatorsymbol $\sqrt{\ }$ stammt von dem kleinen Buchstaben *r* ab und steht für radizieren. Er wurde erstmalig 1525 vom deutschen Mathematiker Christoph Rudolff verwendet. Die Verlängerung des *r* über den vollständigen Term wurde erst später eingeführt.


Christoff Rudolff
Mathematiker (16. Jahrhundert)

Beispiel 1: Es ist eine Zahl x gesucht, die dreimal mit sich selbst multipliziert den Wert 8 ergibt.
Wir schreiben:

$x \cdot x \cdot x = 8$
$x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{8}$
$x = 2$, denn
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Merksatz

Wurzelziehen *oder* ***Radizieren*** *ist die Umkehrrechenart des* ***Potenzierens****, sofern die Basis des Potenzierens die Unbekannte x ist.*
Der Wert a ist bekannt (z. b. 8) sowie die Potenz n (z. B. 3) zur Basis x und wir suchen den Wert von x.

Beispiel 2: Es ist eine Zahl x gesucht, die zweimal mit sich selbst multipliziert den Wert 25 ergibt. Wir schreiben:

$x \cdot x = 25$
$x^2 = 25$
$x = \sqrt{25}$
$x = 5$, denn
$5 \cdot 5 = 25$

Jetzt fällt uns aber ein, dass $(-5) \cdot (-5)$ ebenfalls 25 ist. Also hat eine Quadratwurzel offensichtlich zwei Lösungen, da $- \cdot -= +$ gibt.

Merksatz

Ist der Wurzelexponent n von $x = \sqrt[n]{a}$ eine gerade Zahl mit $a > 0$, so gibt es zwei Lösungen für x, eine positive und eine negative Lösung. Soll die negative Lösung mitberücksichtigt werden, so muss $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden.
Lautet eine Aufgabe nur $x = \sqrt[n]{a}$, so wird nur die ***positive*** *Lösung gesucht. $x = \sqrt{49}$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{7\}$. Lautet die Aufgabenstellung hingegen $x^2 = 49$, so werden diejenigen* ***positiven*** *und* ***negativen*** *Zahlen gesucht, deren Quadrat 49 ist. Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \{-7; 7\}$.*

Beispiel 3: Es ist eine Zahl x gesucht, die fünfmal mit sich selbst multipliziert den Wert -32 ergibt. Wir schreiben:

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = -32$
$x^5 = -32$
$x = \sqrt[5]{(-32)}$ STOP!!!!!! Diese Schreibweise ist falsch!!!
$x = -\sqrt[5]{32}$, denn
$-(2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot (2) = -32$

Merksatz

Ist der Wurzelexponent n von $x = \sqrt[n]{a}$ eine ungerade Zahl, so gibt es nur eine Lösungen für x. Die Lösung ist positiv, für $a > 0$ und negativ für $a < 0$.
Ist $a < 0$, so muss das Minuszeichen vor die Wurzel geschrieben werden. Die Wurzelregeln besagen, dass ***negative Werte unter einer Wurzel*** *einen* ***nicht lösbaren*** *Ausdruck darstellen.*

Beispiel 4: Es ist eine Zahl x gesucht, die viermal mit sich selbst multipliziert den Wert -81 ergibt. Wir schreiben:

$x \cdot x \cdot x \cdot x = -81$
$x^4 = -81$
$x = \sqrt[4]{-81}$ | **negative Werte unter einer Wurzel**
$\mathbb{L} = \{\}$ | **sind nicht erlaubt!**

Merksatz

Ist der Wurzelexponent n von $x = \sqrt[n]{a}$ eine gerade Zahl mit $a < 0$, so gibt es keine Lösungen für x, da eine gerade Anzahl von „$-$"-Multiplikationen immer "$+$" gibt. Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist leer.

Rechenoperationen mit Wurzeln

Addition und Subtraktion

Beispiel 5:

$\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Es dürfen nur Wurzeln mit gleicher Wurzelbasis und gleichem Wurzelexponenten addiert werden.

Beispiel 6:

$3\sqrt[3]{2{,}5} - 1{,}5\sqrt[3]{2{,}5} - \sqrt[4]{2{,}5} = 1{,}5\sqrt[3]{2{,}5} - \sqrt[4]{2{,}5}$

Es dürfen nur Wurzeln mit gleicher Wurzelbasis und gleichem Wurzelexponenten subtrahiert werden.

Beispiel 7:

$\sqrt{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}\sqrt{b} - 0{,}5\sqrt{c} + 2{,}5\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a}\sqrt{b} + 2\sqrt{c}$

Es dürfen nur Wurzeln mit gleicher Wurzelbasis und gleichem Wurzelexponenten addiert bzw. subtrahiert werden.

Multiplikation

Beispiel 8:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden multipliziert, indem die Wurzelbasen multipliziert werden und der Wurzelexponent beibehalten wird.

Beispiel 9:

$\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{9}$

Wurzeln mit unterschiedlichem Wurzelexponenten können bei Multiplikation nicht vereinfacht werden.

Beispiel 10:

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{7} = \left(\sqrt[4]{7}\right)^4 = 7$

Bei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten und gleicher Wurzelbasis hebt die Multiplikation die Wurzel auf, sofern die Wurzel sooft wie der Wurzelexponent angibt, mit sich selbst multipliziert wird.

Beispiel 11:

$\sqrt{7^2} = 7$

$\sqrt[3]{a^3} = a$

$\sqrt[n]{y^m} = y$ für $n = m$.

Ein ^{2} unter der Quadratwurzel, hebt die Wurzel auf.
Ein ^{3} unter der Kubikwurzel, hebt die Wurzel auf.
Stimmen Wurzelexponent n und die Potenz m der Wurzelbasis a überein, so hebt m die n–te Wurzel auf.

Division

Beispiel 12:

$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, indem die Wurzelbasen dividiert und der Wurzelexponent beibehalten wird.

Beispiel 13:

$\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

Beim Dividieren von Wurzeln gilt das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) nicht!!!

Beispiel 14:

$\sqrt{9} : \sqrt[3]{9} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{9}}$

Wurzeln mit unterschiedlichem Wurzelexponenten können bei Division nicht vereinfacht werden.

Faktorisieren, Vereinfachen, Zusammenfassen

Beispiel 15:

$3\sqrt[3]{x} - 1{,}5\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 1{,}5\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$

Aus Summen und Differenzen können Wurzeln mit unterschiedlichem Wurzelexponenten nicht faktorisiert (ausgeklammert) werden.

Beispiel 16:

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$

Oftmals lassen sich Werte unter der Wurzel in einzelne Faktoren aufteilen, wobei aus einem der aufgeteilten Faktoren dann die Wurzel gezogen werden kann.

Beispiel 17:

$3 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{9x}$

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

$-a \cdot \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$

Werte vor einer Wurzel lassen sich unter das Wurzelzeichen bringen, indem man die Vorzahl mit dem Wurzelexponenten potenziert.

Beispiel 18:

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} \cdot c} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot c} = \frac{a+2b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot c} = \frac{a+2b}{\sqrt{a \cdot b \cdot c}}$

Addition und Subtraktion von Brüchen mit Wurzeln folgen den Regeln der Bruchrechnung (hier: gemeinsamer Nenner $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot c$ mit entsprechender Erweiterung der Zähler).

Beispiel 19:

$3\sqrt[4]{x} - 12\sqrt{x} = \left(\sqrt{3}\sqrt[8]{x} + \sqrt{12}\sqrt[4]{x}\right)\left(\sqrt{3}\sqrt[8]{x} - \sqrt{12}\sqrt[4]{x}\right)$

Bei Summen oder Differenzen von Wurzeln gelten die binomischen Formeln entsprechend deren Regeln.

Radizieren (Wurzelziehen)

Beispiel 20:

$\sqrt[3]{\sqrt{s}} = \sqrt[6]{s}$

Wurzeln werden radiziert, indem die Wurzelexponenten multipliziert und die Wurzelbasis beibehalten wird.

Potenzieren

Beispiel 21:

$\left(\sqrt[3]{2{,}75}\right)^5 = \sqrt[3]{2{,}75^5}$

Wurzeln werden potenziert, indem der Wurzelexponent beibehalten und die Wurzelbasis potenziert wird.

Potenzdarstellung von Wurzeln

Beispiel 22:

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Wurzeln können als Potenz dargestellt werden, indem die Wurzelbasis mit dem Quotienten aus Basisexponent und Wurzelexponent potenziert wird.

Beispiel 23:

$\sqrt[-3]{5} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{5^{-1}}$

$\sqrt[-n]{a^m} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$

Werden Wurzeln mit neagtivem Wurzelexponent oder Basisexponent als Potenz dargestellt, so entspricht die Darstellung dem Kehrwert der positiven Darstellung gemäß Beispiel 22.