Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2019 BW

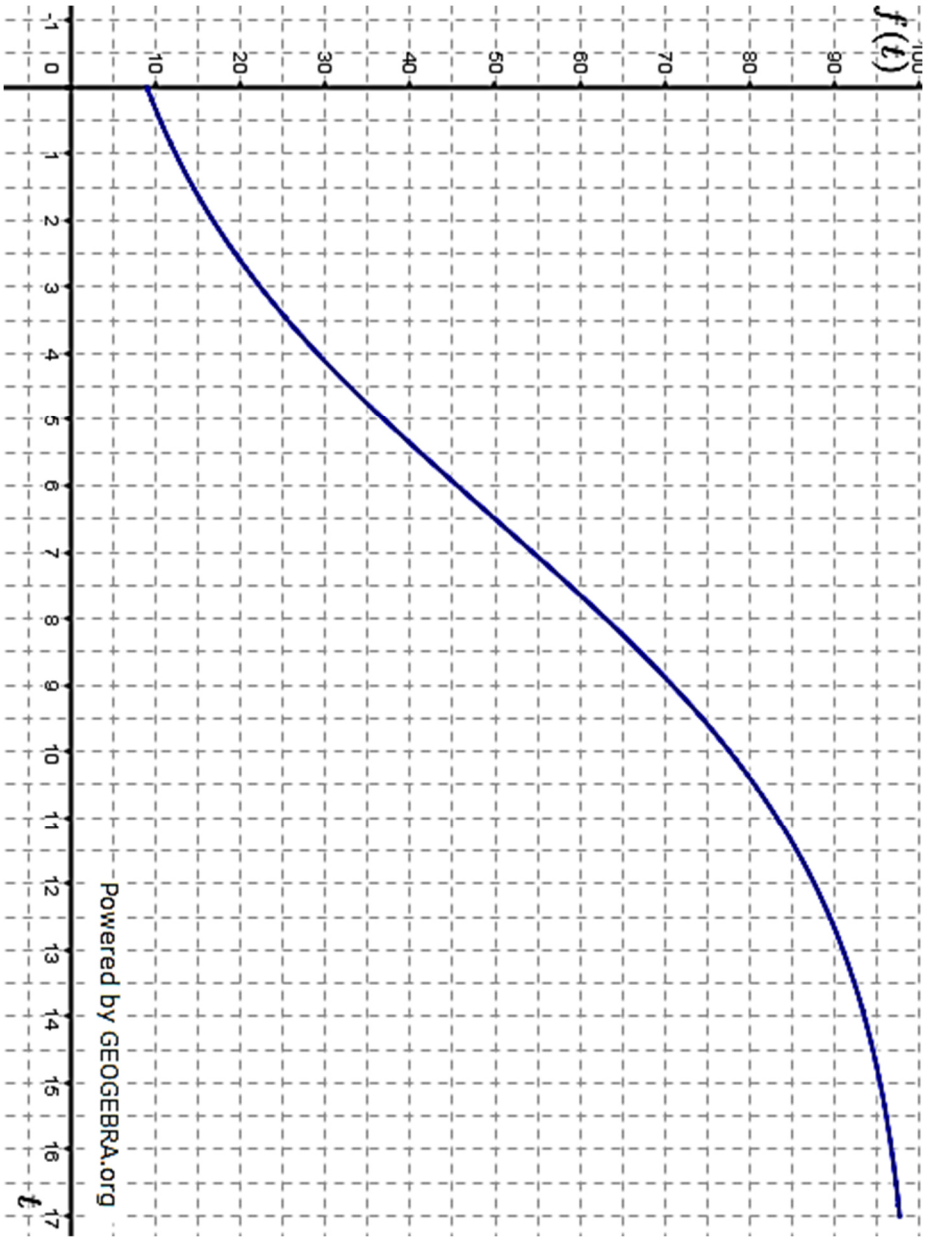
Aufgabe A1.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 17$ die Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen und $f(t)$ die Höhe in Zentimetern.

a) Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von $20\ cm$ auf $40\ cm$ zunimmt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe $3{,}5$ Wochen nach Beobachtungsbeginn.
Die Funktion f hat bei $t = 6{,}5$ eine Wendestelle. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.

b) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ eine Fragestellung im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

Abbildung zur Aufgabe A1.1

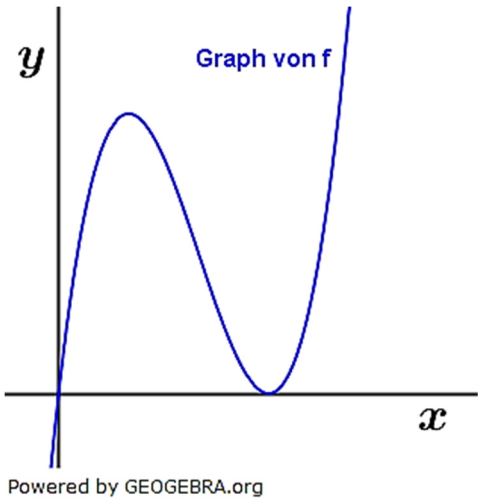


© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2019 BW

Aufgabe A1.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen.



a) Weisen Sei nach, dass der Punkt $T(6|0)$ Tiefpunkt des Graphen ist.
Betrachtet wird die Strecke OH zwischen $O(0|0)$ und dem Hochpunkt $H(2|8)$ des Graphen von f. Diese Strecke und der Graph von f begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

b) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -3 \cdot f(x) - 6$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht. Bestimmen Sie damit die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von g.

c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ liegt, berührt den Graphen von f im Punkt $P(4|4)$. Berechnen Sie die Koordinaten von M.

d) Für jedes k mit $k \neq 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx.$$

Berechnen Sie die Werte von k, für die die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $P(1|f_k(1))$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 8x + 3$ ist.

Aufgabe A2.1

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in mm^2).

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

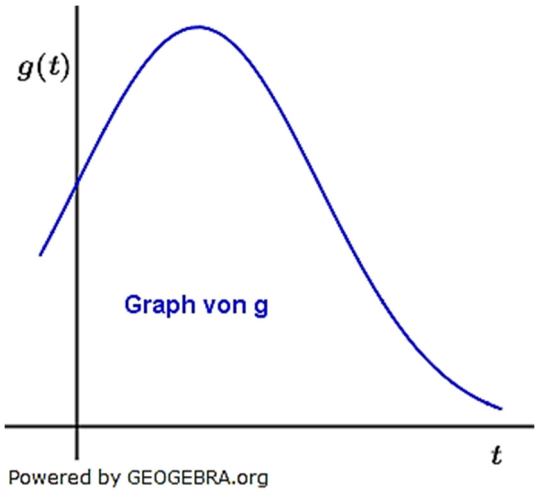
b) Berechnen Sie $\frac{1}{4}\int_5^9 f(t)\,dt$
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Versuchsreihe 2

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit

$g(t) = 20 \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$
(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in mm^2)

Die Abbildung zeigt den Graphen von g.



c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechnen Sie diesen Wert.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

d) Betrachtet wird die Funktion h mit
$h(t) = g(t + 10)$. Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$.
Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von h damit begründet werden kann.

Aufgabe A2.2

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$. Der Graph der Funktion f_t ist G_t.

a) Bestimmen Sie t so, dass der Punkt $P(1|4)$ auf dem Graphen G_t liegt.

b) Jeder Graph G_t hat an der Stelle $x = \sqrt{t}$ einen Tiefpunkt.
Berechnen Sie denjenigen Wert von t, für den dieser Tiefpunkt möglichst hoch liegt.

c) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die sämtliche Graphen G_t verlaufen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2019 BW

Lösung A1.1

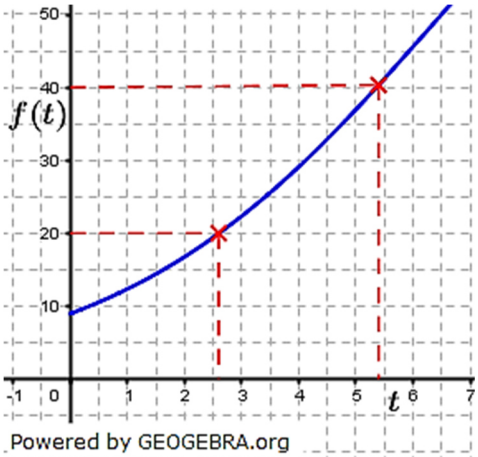
Lösungslogik

In dieser Aufgabe ist keinerlei Funktionsgleichung gegeben, sodass alle Lösungsschritte ausschließlich über die vorgegebene Grafik erarbeitet werden müssen.

Klausuraufschrieb

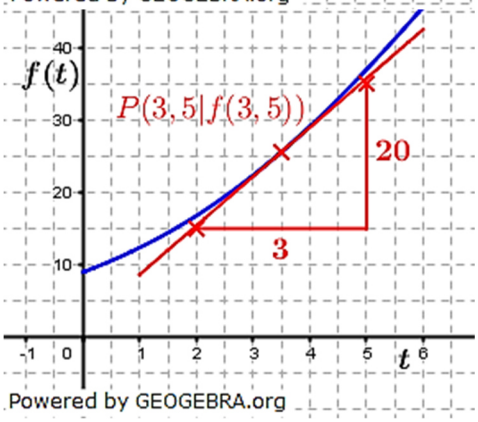
a) *Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von* $20\ cm$ *auf* $40\ cm$ *zunimmt:*

Hohe $20\ cm$ zum Zeitpunkt $t = 2{,}6$
Höhe $40\ cm$ zum Zeitpunkt $t = 5{,}4$
$\Delta t = 5{,}4 - 2{,}6 = 2{,}8$
Im Zeitraum zwischen $2{,}6$ *und* $5{,}4$ *Wochen nach Beobachtungsbeginn nimmt die Höhe der Pflanze von* $20\ cm$ *auf* $40\ cm$ *zu.*



Momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe $3{,}5$ *Wochen nach Beobachtungsbeginn:*

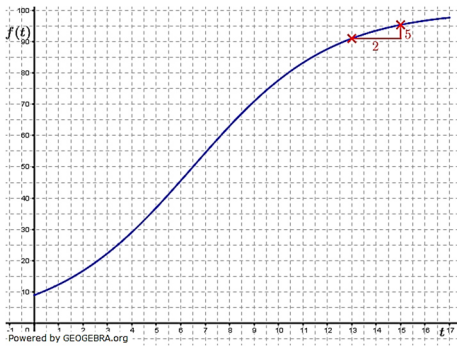
Das Steigungsdreieck der Tangente im Punkt $P(3{,}5|f(3{,}5))$ ergibt $\Delta y = 20\ cm$ und $\Delta x = 3$ Wochen.
Die momentane Änderungsrate $3{,}5$ *Wochen nach Beobachtungsbeginn beträgt* $f'(3{,}5) = \frac{20}{3}\ cm/Woche.$



Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang:
Zu diesem Zeitpunkt ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze maximal.

b) *Fragestellung:*
Bei der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ ist der Zwei-Wochen-Zeitraum gesucht, in dem die Pflanze um $5\ cm$ wächst.

Lösung der Gleichung:
Über die Grafik stellen wir fest, dass zwischen der $13.$ und $15.$ Woche nach Beobachtungsbeginn die Pflanze etwa $5\ cm$ wächst.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2019 BW

Lösung A1.2

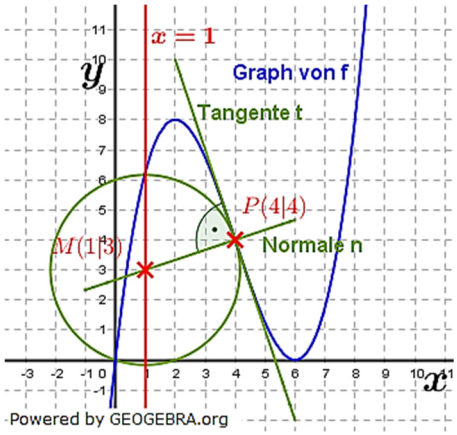
Lösungslogik

a) Wir prüfen, ob $f'(6) = 0$ ist und $f''(6) > 0$.
Flächenintegral zwischen oberer und unterer Kurve.

b) Beschreibung der Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung und Verschiebung in y-Richtung.
Wegen der Spiegelung an der x-Achse wird der Hochpunkt von f zum Tiefpunkt von g.

c) Der Mittelpunkt des Kreises ist der Schnittpunkt der Normalen an f in $P(4|4)$ mit der Geraden mit der Gleichung $x = 1$.

d) Gesucht ist k, für das $f_k'(1) = 8$ ist; Parallele Geraden müssen gleiche Steigung haben. Die Tangente soll parallel sein zur Geraden mit $y = 8x + 3$. Diese Gerade hat die Steigung $m = 8$.



Klausuraufschrieb

a) *Nachweis des Tiefpunktes:*

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$

$f'(6) = \frac{3}{4} \cdot 36 - 6 \cdot 6 + 9 = 36 - 36 = 0$

$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 9 - 6 = 3$

Wegen $f'(6) = 0$ und $f''(6) > 0$ ist der Punkt $T(6|0)$ ein Tiefpunkt.

Inhalt einer Fläche:

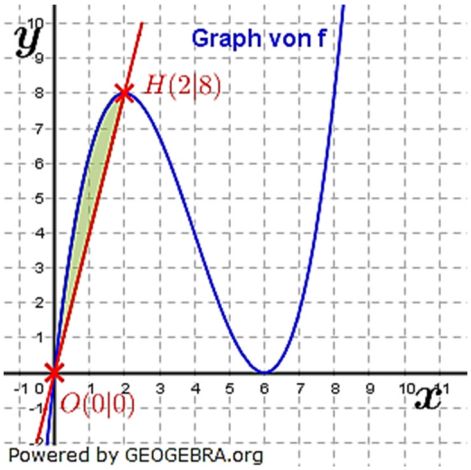
Fläche zwischen der Funktion f und der Geraden g durch O und H.

$g(x) = 4x$

$A = \int_0^2 f(x) - g(x) = \int_0^2 \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 5x\,dx$

$A = \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^2 = 1 - 8 + 10 = 3$

Die gesuchte Fläche ist $3\,FE$ groß.



b) Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor durch:

1. Spiegelung an der x-Achse;
2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3;
3. Verschiebung in y-Richtung um 6 Einheiten nach unten.

Tiefpunkt von g:

Wegen der Spiegelung von f an der x-Achse, wird H von f zu T von g.
Nach der Spiegelung ist $T_g(2|-8)$.
Nach der Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3 ist $T_g(2|-24)$.
Nach der Verschiebung in y-Richtung um 6 Einheiten nach unten ist $T_g(2|-30)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) *Mittelpunkt eines Kreises:*
Der Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Normalen an f in $P(4|4)$ mit der Geraden $x = 1$.
Normale an f:
$n(x) = -\frac{1}{f'(4)}(x-4) + f(4)$
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$
$f'(4) = \frac{3}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = -3$
$f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 4$
$n(x) = -\frac{1}{-3}(x-4) + 4$
$n(x) = \frac{1}{3}(x-4) + 4 = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$
$n(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{8}{3} = 3$
Der Mittelpunkt des Kreises hat die Koordinaten $M(1|3)$.

d) *Berechnung eines Parameters k.*
Gemäß Aufgabenstellung soll $f_k'(1) = 8$ sein.
$f_k'(x) = \frac{3}{2k}x^2 - 6x + \frac{9}{2}k$
$f_k'(1) = 8 = \frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k$
$\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k - 8 = 0 \quad | \quad \cdot 2k$
$3 - 28k + 9k^2 = 0$
$9k^2 - 28k + 3 = 0 \quad | \quad :9$
$k^2 - \frac{28}{9}k + \frac{1}{3} = 0$
$k_{1,2} = \frac{14}{9} \pm \sqrt{\frac{196}{81} - \frac{27}{81}} = \frac{14}{9} \pm \frac{1}{9} \cdot \sqrt{169} = \frac{14}{9} \pm \frac{13}{9}$
$k_1 = 3; \quad k_2 = \frac{1}{9}$
Für $k = 3$ oder $k = \frac{1}{9}$ ist $f_k'(1) = 8$.

Lösung A2.1

Lösungslogik

Versuchsreihe 1:

a) *Fläche 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
Wir berechnen $f(3)$.
Zeitpunkt des verdreifachten Flächeninhaltes:
Wir berechnen zunächst $3 \cdot f(0)$, setzen dann $f(t)$ auf diesen Wert und ermitteln daraus t.
Momentane Änderungsrate 2 Stunden nach Beobachtungsbeginn:
Wir berechnen $f'(2)$.

b) Das angegebene und zu berechnende Integral ist ein Mittelwertintegral. Das Ergebnis ist der mittlere Flächeninhalt im Intervall von 5 bis 9 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Versuchsreihe 2:

c) *Zeitpunkt des größten Flächeninhaltes:*
Wir berechnen den Hochpunkt von $g(t)$.
Zeitpunkt nach Hochpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.
Wir setzen $g(t) = g(0)$ und bestimmen daraus t.

d) *Interpretation von* $h(-t) = h(t)$*:*
$g(t+10)$ ist eine Verschiebung von $g(t)$ um 10 Einheiten nach links. In Aufgabenteil c) ergibt sich die Stelle des Hochpunktes bei $x_0 = 10$. Durch die Verschiebung hat der Hochpunkt die x-Koordinate 0.
$h(-t) = h(t)$ bedeutet Achsensymmetrie zur y-Achse. $g(t+10)$ ist also y-achsensymmetrisch.

<u>Klausuraufschrieb</u>
<u>*Versuchsreihe 1:*</u>

a) *Fläche* 3 *Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
$f(3) = 20 \cdot e^{0,3} \approx 27$
Die Fläche 3 *Stunden nach Beobachtungsbeginn ist etwa* $27\,mm^2$ *groß.*
Zeitpunkt des verdreifachten Flächeninhaltes:
$f(0) = 20 \cdot e^0 = 20$
$3 \cdot f(0) = 60$
$f(t) = 60 = 20 \cdot e^{0,1t}$ | $:20$
$3 = e^{0,1t}$ | ln
$0,1t = ln(3)$ | $:0,1$
$t = 10 \cdot ln(3) \approx 10,9861$
Etwa 11 *Stunden nach Beobachtungsbeginn hat sich der Flächeninhalt verdreifacht.*
Momentane Änderungsrate 2 *Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
$f'(t) = 20 \cdot 0,1 \cdot e^{0,1t} = 2 \cdot e^{0,1t}$
$f'(2) = 2 \cdot e^{0,2} \approx 2,4428$
Die momentane Änderungsrate 2 *Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa* $2,4\,mm^2/\,Std.$

b) $\frac{1}{4}\int_5^9 20 \cdot e^{0,1t}\,dt = 5 \cdot \int_5^9 e^{0,1t}\,dt = 5 \cdot [10e^{0,1t}]_5^9 = 50 \cdot (e^{0,9} - e^{0,5}) \approx 40,5441$
Im Zeitraum zwischen 5 *und* 9 *Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt der Flächeninhalt durchschnittlich ca.* $40,5\,mm^2$*.*

Versuchsreihe 2:

c) *Zeitpunkt des größten Flächeninhaltes:*
$g'(t) = 20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$
$g'(t) = 0$:
$20e^{0,1t-0,005t^2} \cdot (0,1 - 0,01t) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$0,1 - 0,01t = 0$
$t = 10$
$g(10) = 20 \cdot e^{1-0,5} = 20 \cdot e^{0,5} \approx 32,9744$
Etwa 10 *Stunden nach Beobachtungsbeginn ist der Flächeninhalt mit etwa* $33\,mm^2$ *am größten.*
Zeitpunkt nach Hochpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.
$g(t) = g(0) = 20 \cdot e^0 = 20$
$20 = 20 \cdot e^{0,1t-0,005t^2}$ | $:20$
$1 = e^{0,1t-0,005t^2}$
$0,1t - 0,005t^2 = 0$
$t \cdot (0,1 - 0,005t) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$t_1 = 0; \quad t_2 = 20$
20 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist der Flächeninhalt wieder so groß wie am Anfang.

d) *Interpretation von $h(-t) = h(t)$:*
Mit $h(t) = g(t+10)$ wird $g(t)$ um 10 Stellen nach links verschoben. Wegen des Hochpunktes von $g(t)$ mit $H(10|33)$ liegt der verschobene Hochpunkt bei $H^*(0|33)$. Wenn nun für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $h(-t) = h(t)$, so ist $h(t) = g(t+10)$ achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung A2.2

Lösungslogik

a) *t für $P(1|4) \in G$:*
Wir machen mit $P(1|4)$ eine Punktprobe und berechnen daraus t.

b) *t für möglichst hoch liegenden Tiefpunkt mit Extremstelle $x = \sqrt{t}$:*
Wir berechnen den y-Wert des Tiefpunktes für $x = \sqrt{t}$. Dieser y-Wert ist damit eine Funktion von t. Das Maximum bestimmen wir über die erste Ableitung.

c) *Zwei gemeinsame Punkte aller Graphen G_t:*
Wir berechnen die Schnittpunkte von $f_{t_1}(x)$ mit $f_{t_2}(x)$.

Klausuraufschrieb

a) *t für $P(1|4) \in G_t$:*
$f_t(1) = 4 = 1^4 - 2t \cdot 1^2 + 8t$ | Punktprobe mit $P(1|4)$
$6t + 1 = 4$
$t = \frac{1}{2}$
$P(1|4) \in G_{\frac{1}{2}}$

b) *t für möglichst hoch liegenden Tiefpunkt mit Extremstelle $x = \sqrt{t}$:*
$f_t(\sqrt{t}) = y = \sqrt{t}^4 - 2t \cdot \sqrt{t}^2 + 8t = t^2 - 2t^2 + 8t$
$y(t) = -t^2 + 8t$
$y'(t) = -2t + 8$
$y''(t) = -2$
$y'(t) = 0 = -2t + 8$
$2t = 8$
$t = 4$
$y''(4) = -2 < 0$ ==> $t = 4$ ist Maximum
Der Graph der Funktion f_4 hat den am höchsten liegenden Tiefpunkt.

c) *Zwei gemeinsame Punkte aller Graphen G_t:*
$f_{t_1}(x) = x^4 - 2t_1x^2 + 8t_1$
$f_{t_2}(x) = x^4 - 2t_2x^2 + 8t_2$
$f_{t_1}(x) \cap f_{t_2}(x)$:
$x^4 - 2t_1x^2 + 8t_1 = x^4 - 2t_2x^2 + 8t_2$
$-2t_1x^2 + 8t_1 = -2t_2x^2 + 8t_2$
$2t_2x^2 - 2t_1x^2 = 8t_2 - 8t_1$
$2x^2(t_2 - t_1) = 8(t_2 - t_1)$ | $:(t_2 - t_1)$
$2x^2 = 8$ | $:2$
$x^2 = 4$ | $\sqrt{}$
$x_1 = 2;\quad x_2 = -2$
$f_t(2) = 2^4 - 2t \cdot 2^2 + 8t$
$f_t(2) = 16 - 8t + 8t = 16$
$f_t(-2) = (-2)^4 - 2t \cdot (-2)^2 + 8t = 16 - 8t + 8t = 16$
Die gemeinsamen Punkte aller Graphen G_t haben die Koordinaten $P_1(2|16)$ und $P_2(-2|16)$.