

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 01

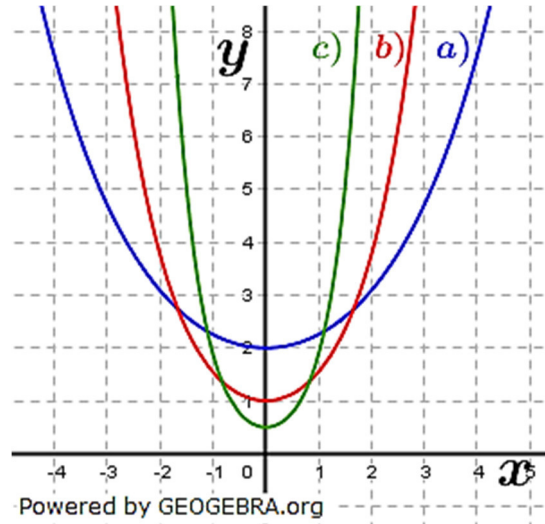
Aufgabe M01A1



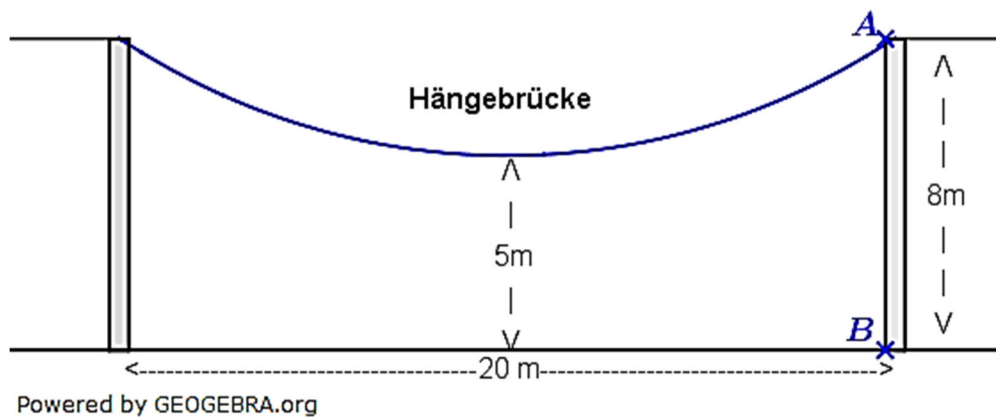
Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k festgelegt durch

$$f_k(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Die Grafik zeigt die Schaubilder für $k = 0,5$; $k = 1$ und $k = 2$. Bestimmen Sie zu jedem Schaubild den entsprechenden Wert für k . Begründen Sie, dass f_1 achsensymmetrisch zur y -Achse ist. Bestimmen Sie den Tiefpunkt von f_1 .
- b) Das Schaubild von f_k schließt mit der x -Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = \frac{1}{k}$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.



Eine Hängebrücke in einem Klettergarten wird durch die untere Skizze dargestellt.



- c) Das Profil der Brücke soll durch das Schaubild der Funktion $g(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$ (x und y in m) beschrieben werden. Bestimmen Sie a und k .
- d) Bestimmen Sie unter welchem Winkel die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft.
- e) Zur Stabilisierung der Brücke wird im Punkt B ein Halteseil am Boden befestigt und senkrecht im Punkt P an die Brücke angebracht. Begründen Sie, dass sich die x -Koordinate von P durch die Gleichung

$$\frac{1}{0,2625(e^{0,105x} - e^{-0,105x})} = \frac{2,5(e^{0,105x} - e^{-0,105x})}{x - 10}$$

bestimmen lässt.

Aufgabe M01A2

Ein Kegel mit dem Radius r und der Höhe h entsteht, indem das Schaubild einer Funktion k um die x -Achse rotiert.

Bestimmen sie die Funktionsgleichung von k .

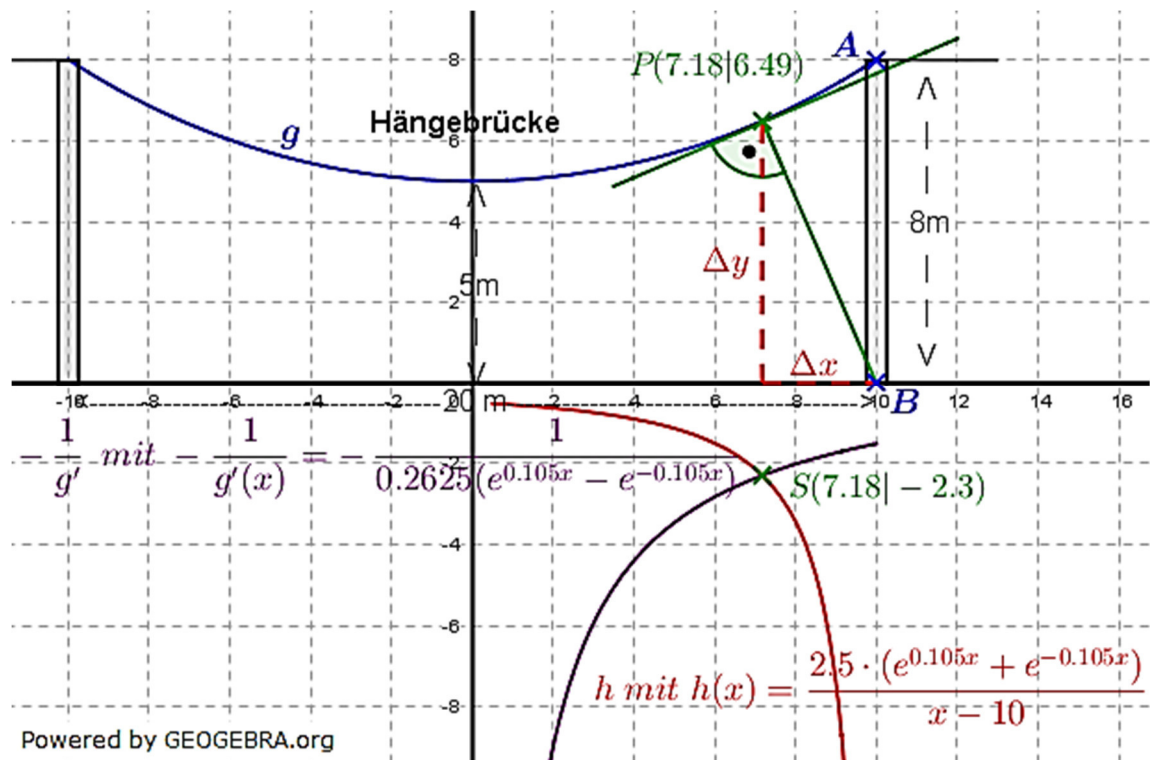
Berechnen Sie das Volumen V des Kegels mit Hilfe eines geeigneten Integrals und weisen Sie so die Richtigkeit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 01

Lösung M01A1

Lösungslogik

- a) *Zuordnung der Schaubilder.*
Wir machen mit den einzelnen $-$ -Werten eine Punktprobe mit dem Punkt $P(0|f_k(0))$.
Achsensymmetrie von f_1 :
Wir weisen nach, dass $f_1(x) = f_1(-x)$ ist.
Tiefpunkt von f_1 :
Wir bilden $f_1'(x)$ und setzen $f_1'(x) = 0$.
- b) *Fläche unter f_k :*
Wir bilden das Integral über $f_k(x)$ in Intervall $[0; \frac{1}{k}]$.
- c) *Berechnung der Parameter a und k :*
Mithilfe zweier Punktproben mit $P(0|5)$ und $P(10|8)$ errechnen wir die Parameter a und k .
- d) *Winkel, unter dem die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft:*
Wir bestimmen die Steigung $f'(10)$ des Graphen der Funktion im Punkt A und berechnen den Winkel über den $\tan(f'(10))$.
- e) *Nachweis einer Gleichung:*
Die nachfolgende Graphik beschreibt die Situation:



Wir bestimmen die Steigung der Normalen an $g(x)$, die durch den Punkt B verläuft mit $m_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = -\frac{1}{g'(x)}$.

In der Graphik sehen wir $-\frac{1}{g'}$ als negativen Reziprokwert der 1. Ableitung von g , sowie h aufgestellt über $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}$. Die beiden Graphen haben einen Schnittpunkt S , dessen x -Koordinate die x -Koordinate von P ist.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 01

Klausuraufschrieb

a) Zuordnung der Schaubilder.

$$P(0|f_{0,5}(0)); Q(0|f_1(0)); R(0|f_2(0))$$

Für $k = 0,5$ gilt:

$$f_{0,5}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2 \cdot 0,5} = 2$$

Der blaue Graph a) gehört zur Funktion $f_{0,5}$.

Für $k = 1$ gilt:

$$f_1(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$$

Der rote Graph b) gehört zur Funktion f_1 .

Für $k = 2$ gilt:

$$f_{1,5}(0) = \frac{e^0 + e^0}{4} = \frac{1}{2}$$

Der grüne Graph c) gehört zur Funktion f_2 .

Achsensymmetrie von f_1 :

$$f_1(x) = f_1(-x)$$

$$f_1(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f_1(x)$$

Tiefpunkt von f_1 :

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0$$

$$e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$$

$$f_1(0) = 1 \text{ (siehe Aufgabenteil a)}$$

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $TP(0|1)$.

b) **Fläche unter f_k :**

$$\begin{aligned} A_k &= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k} dx = \int_0^{\frac{1}{k}} \left(\frac{e^{kx}}{2k} + \frac{e^{-kx}}{2k} \right) dx \\ &= \left[\frac{e^{kx}}{2k^2} - \frac{e^{-kx}}{2k^2} \right]_0^{\frac{1}{k}} = \frac{e^1 - e^{-1}}{2k^2} - \frac{e^0 - e^0}{2k^2} = \frac{e - 1}{2k^2} = \frac{e^2 - 1}{2ek^2} \end{aligned}$$

c) **Berechnung der Parameter a und k :**

Die Graphik weist die Punkt $g(0) = 5$ und $g(10) = 8$ auf.

$$a \cdot \frac{e^0 + e^0}{2k} = 5$$

$$\frac{a}{k} = 5$$

$$a = 5k$$

$$a \cdot \frac{e^{10k} + e^{-10k}}{2k} = 8$$

$$\frac{5k}{2k} \cdot (e^{10k} + e^{-10k}) = 8$$

$$2,5 \cdot (e^{10k} + e^{-10k}) - 8 = 0$$

WTR

$$k \approx 0,105$$

$$a = 0,525$$

$$g(x) = 0,525 \cdot \frac{e^{0,105x} + e^{-0,105x}}{0,21} = 2,5 \cdot (e^{0,105x} + e^{-0,105x})$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 01

d) Winkel, unter dem die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft:
 $g'(x) = 2,5 \cdot (0,105 \cdot e^{0,105x} - 0,105 \cdot e^{-0,105x}) = 0,2625 \cdot (e^{0,105x} - e^{-0,105x})$

$$g'(10) = 0,2625 \cdot (e^{1,05} - e^{-1,05}) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,658$$

$$\tan(\alpha) = g'(10) = 0,658$$

$$\alpha = \arctan(0,658) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 33^\circ$$

Die Brücke trifft im Punkt A unter 33° auf die waagrechte Plattform auf.

e) Nachweis einer Gleichung:

Steigung der Normalen durch B an $g(x)$:

$$m_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{g(x) - 0}{x - 10} \quad | \quad \text{Steigung durch die Punkte P und B}$$

$$m_n = -\frac{1}{g'(x)} \quad | \quad \text{Steigung einer Normalen}$$

$$-\frac{1}{g'(x)} = \frac{g(x) - 0}{x - 10}$$

$$-\frac{1}{0,2625 \cdot (e^{0,105x} - e^{-0,105x})} = \frac{2,5 \cdot (e^{0,105x} + e^{-0,105x})}{x - 10}$$

q.e.d.

Lösung M01A2

Lösungslogik

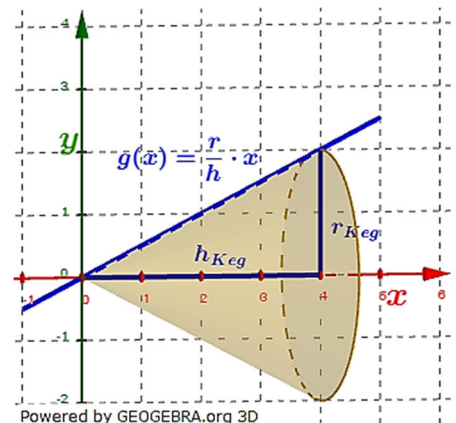
Wir bilden das Volumenintegral unter einer Geraden g mit der Steigung $m = \frac{r}{h}$ im Intervall $[0; h]$.

Klausuraufschrieb

$$V_{Keg} = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3\right]_0^h$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{1}{3} h^3 - 0\right) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

q.e.d.



Powered by GEOGEBRA.org 3D