Lösung M01A1

Lösungslogik

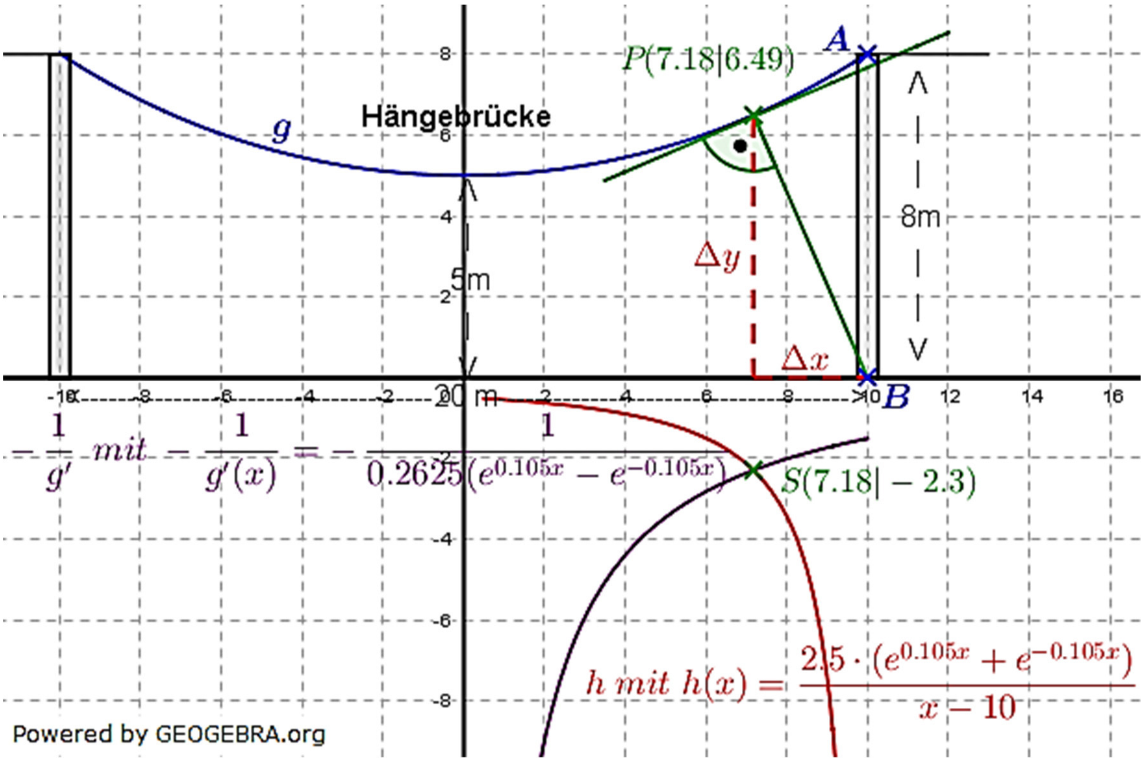
a) *Zuordnung der Schaubilder.*
Wir machen mit den einzelnen -Werten eine Punktprobe mit dem Punkt $P(0|f_k(0))$.
Achsensymmetrie von f_1:
Wir weisen nach, dass $f_1(x) = f_1(-x)$ ist.
Tiefpunkt von f_1:
Wir bilden $f_1{}'(x)$ und setzen $f_1'(x) = 0$.

b) *Fläche unter f_k:*
Wir bilden das Integral über $f_k(x)$ in Intervall $[0;\frac{1}{k}]$.

c) *Berechnung der Parameter a und k:*
Mithilfe zweier Punktproben mit $P(0|5)$ und $P(10|8)$ errechnen wir die Parameter a und k.

d) *Winkel, unter dem die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft:*
Wir bestimmen die Steigung $f'(10)$ des Graphen der Funktion im Punkt A und berechnen den Winkel über den $tan(f'(10))$.

e) *Nachweis einer Gleichung:*
Die nachfolgende Graphik beschreibt die Situation:



Wir bestimmen die Steigung der Normalen an $g(x)$, die durch den Punkt B verläuft mit $m_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = -\frac{1}{g\prime(x)}$.
In der Graphik sehen wir $-\frac{1}{g\prime}$ als negativen Reziprokwert der 1. Ableitung von g, sowie h aufgestellt über $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}$. Die beiden Graphen haben einen Schnittpunkt S, dessen x-Koordinate die x-Koordinate von P ist.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 01

Klausuraufschrieb

a) *Zuordnung der Schaubilder.*

$P\left(0\middle|f_{0,5}(0)\right);\quad Q(0|f_1(0));\quad R(0|f_2(0))$

Für $k=0{,}5$ gilt:

$f_{0,5}(0)=\frac{e^0+e^0}{2\cdot 0{,}5}=2$

Der blaue Graph a) gehört zur Funktion $f_{0,5}$.

Für $k=1$ gilt:

$f_1(0)=\frac{e^0+e^0}{2}=1$

Der rote Graph b) gehört zur Funktion f_1.

Für $k=2$ gilt:

$f_{1,5}(0)=\frac{e^0+e^0}{4}=\frac{1}{2}$

Der grüne Graph c) gehört zur Funktion f_2.

Achsensymmetrie von f_1:

$f_1(x)=f_1(-x)$

$f_1(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f_1(x)$

Tiefpunkt von f_1:

$f_1(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})$

$f_1{}'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=0$

$e^x=e^{-x}\quad => \quad x=0$

$f_1(0)=1$ (siehe Aufgabenteil a)

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $TP(0|1)$.

b) *Fläche unter f_k:*

$$A_k=\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2k}\,dx=\int_0^{\frac{1}{k}}\left(\frac{e^{kx}}{2k}+\frac{e^{-kx}}{2k}\right)dx$$

$$=\left[\frac{e^{kx}}{2k^2}-\frac{e^{-kx}}{2k^2}\right]_0^{\frac{1}{k}}=\frac{e^1-e^{-1}}{2k^2}-\frac{e^0-e^0}{2k^2}=\frac{e-\frac{1}{e}}{2k^2}=\frac{\frac{e^2-1}{e}}{2k^2}=\frac{e^2-1}{2ek^2}$$

c) *Berechnung der Parameter a und k:*

Die Graphik weist die Punkt $g(0)=5$ und $g(10)=8$ auf.

$a\cdot\frac{e^0+e^0}{2k}=5$

$\frac{a}{k}=5$

$a=5k$

$a\cdot\frac{e^{10k}+e^{-10k}}{2k}=8$

$\frac{5k}{2k}\cdot\left(e^{10k}+e^{-10k}\right)=8$

$2{,}5\cdot\left(e^{10k}+e^{-10k}\right)-8=0$

$k\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}105$

$a=0{,}525$

$g(x)=0{,}525\cdot\frac{e^{0{,}105x}+e^{-0{,}105x}}{0{,}21}=2{,}5\cdot(e^{0{,}105x}+e^{-0{,}105x})$

d) *Winkel, unter dem die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft:*

$g'(x) = 2{,}5 \cdot (0{,}105 \cdot e^{0{,}105x} - 0{,}105 \cdot e^{-0{,}105x}) = 0{,}2625 \cdot (e^{0{,}105x} - e^{-0{,}105x})$

$g'(10) = 0{,}2625 \cdot (e^{1{,}05} - e^{-1{,}05}) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}658$

$tan(\alpha) = g'(10) = 0{,}658$

$\alpha = arctan(0{,}658) \overset{\text{WTR}}{\approx} 33\,°$

Die Brücke trifft im Punkt A unter $33\,°$ auf die waagrechte Plattform auf.

e) *Nachweis einer Gleichung:*

Steigung der Normalen durch B an $g(x)$:

$m_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{g(x)-0}{x-10}$ | Steigung durch die Punkte P und B

$m_n = -\frac{1}{g'(x)}$ | Steigung einer Normalen

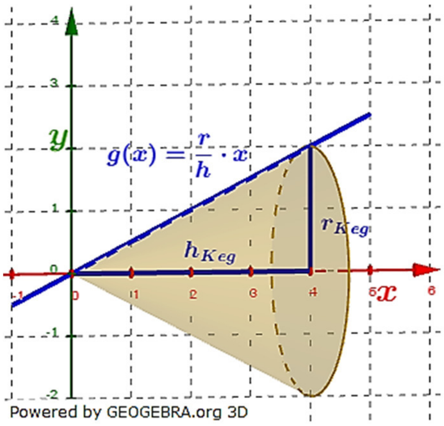
$-\frac{1}{g'(x)} = \frac{g(x)-0}{x-10}$

$-\frac{1}{0{,}2625 \cdot (e^{0{,}105x} - e^{-0{,}105x})} = \frac{2{,}5 \cdot (e^{0{,}105x} + e^{-0{,}105x})}{x-10}$ ***q.e.d.***

Lösung M01A2

Lösungslogik

Wir bilden das Volumenintegral unter einer Geraden g mit der Steigung $m = \frac{r}{h}$ im Intervall $[0; h]$.



Klausuraufschrieb

$V_{Keg} = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3\right]_0^h$

$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{1}{3} h^3 - 0\right) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ***q.e.d.***