Aufgabe M02A1

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten durch den Graphen der Funktion f in Abbildung 1 (s. Anlage) beschrieben.
Dabei ist t die Zeit seit Verabreichung in Stunden und $f(t)$ die Wirkstoffmenge in mg.
Beantworten Sie die folgenden Fragen anhand des Graphen:
- Wie groß sind die Wirkstoffmenge und deren momentane Änderungsrate acht Stunden nach Verabreichung?
- In welchem Zeitraum beträgt die Wirkstoffmenge mindestens $35\,mg$?
- Wie groß ist die mittlere Wirkstoffmenge innerhalb der ersten vier Stunden?

b) Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05t});\ \ t \geq 0$$

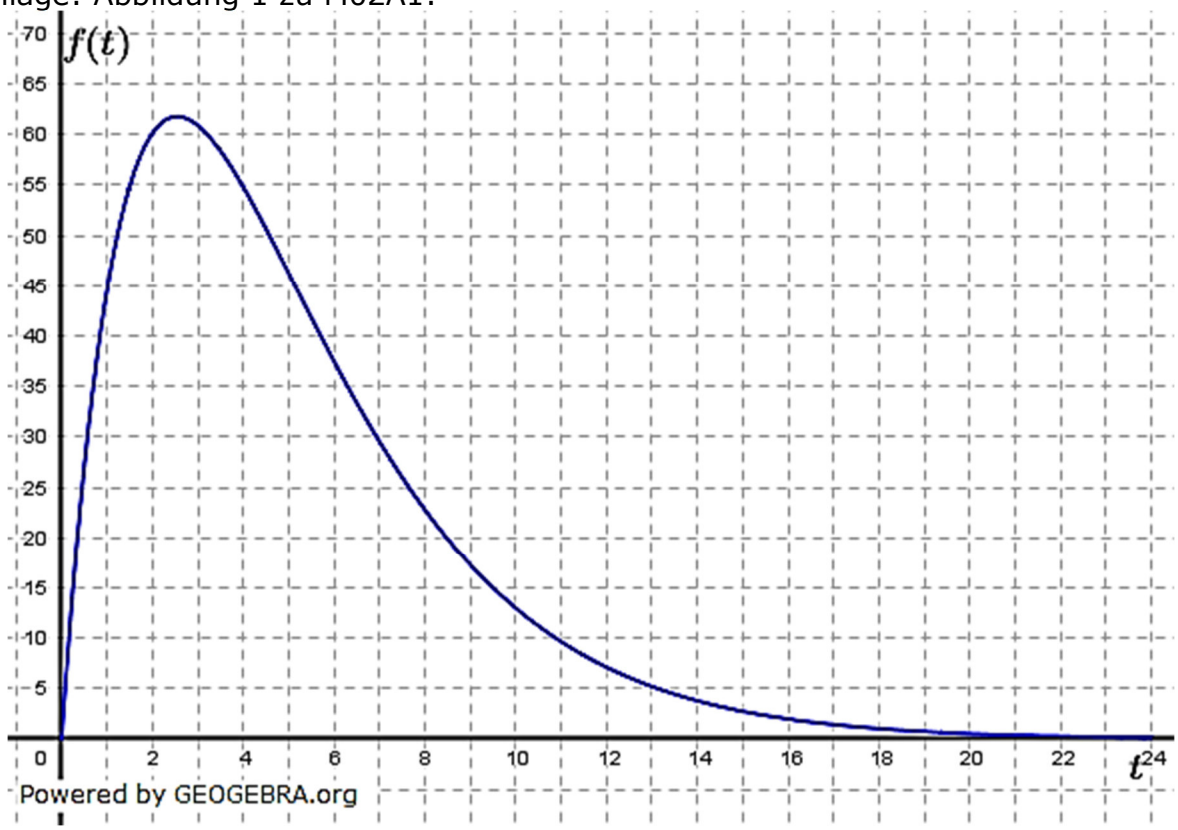
(t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg).
Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge ständig zunimmt.
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1\,\frac{mg}{min}$?
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden.
Gegeben ist die Gleichung $g(t+15) = g(t) + 30$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

Aufgabe M02A2

Der Graph jeder Funktion g_a mit $g_a(x) = ax^2 + 6x + 1;\ \ a \neq 0$ ist eine Parabel C_a .
Zeigen Sie, dass sich alle C_a im Punkt $P(0|1)$ berühren.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve S , auf der die Scheitelpunkte aller C_a liegen.
Welcher Punkt auf S ist kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Anlage: Abbildung 1 zu M02A1:



Lösung M02A1

Lösungslogik

a) *Wirkstoffmenge und momentane Änderungsrate 8 Stunden nach Verabreichung:*
Wir zeichnen in der mitgegebenen Graphik eine Tangente im Punkt $P(8|f(8))$ ($f(8)$ aus Graphik ablesen) und tragen an die Tangente ein Steigungsdreieck an.

Zeitraum für Wirkstoffmenge 35 *mg:*
Wir ziehen eine Parallele zur x-Achse im Abstand 35. Die beiden Schnittpunkte mit dem Graphen geben die Zeit von und Zeit bis an.

Mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 *Stunden:*
Dies ist die Gesamtwirkstoffmenge innerhalb 4 Stunden geteilt durch 4. Wir ermitteln dies, indem wir die Kästchen unter der Kurve zählen, wobei ein Kästchen $5\,mg$ ist.

b) *Wirkstoffmenge langfristig:*
Gegeben ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von $890\,mg$.

Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge:
Eine Funktion des beschränkten Wachstums ist streng monoton steigend.

Momentane Änderungsrate von $1\frac{mg}{h}$*:*
Wir setzen $f'(t) = 1$ und lösen die Gleichung nach t auf.

Mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden:
Dies entspricht $\frac{1}{240}$ der Fläche unter der Kurve im Intervall $[0; 240]$.

Frage im Sachzusammenhang:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Wirkstoffmenge und momentane Änderungsrate 8 Stunden nach Verabreichung:*
Aus der Lösungsgraphik lesen wir ab:
$f(8) \approx 22{,}5$
$f'(8) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{3{,}7} \approx -2{,}16$
Die Wirkstoffmenge 8 Stunden nach Verabreichung beträgt etwa $22{,}5\,mg$ *bei einer momentanen Änderungsrate von* $-2{,}16\frac{mg}{h}$*.*

Zeitraum für Wirkstoffmenge 35 *mg:*
Aus der Graphik lesen wir ab:
$t_{wirk} = x_B - x_A = 6{,}3 - 0{,}7 = 5{,}6$
In der Zeit von $t = 0{,}7$ *und* $t = 6{,}3$ *beträgt die Wirkstoffmenge mindestens* $35\,mg$*.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 Stunden:

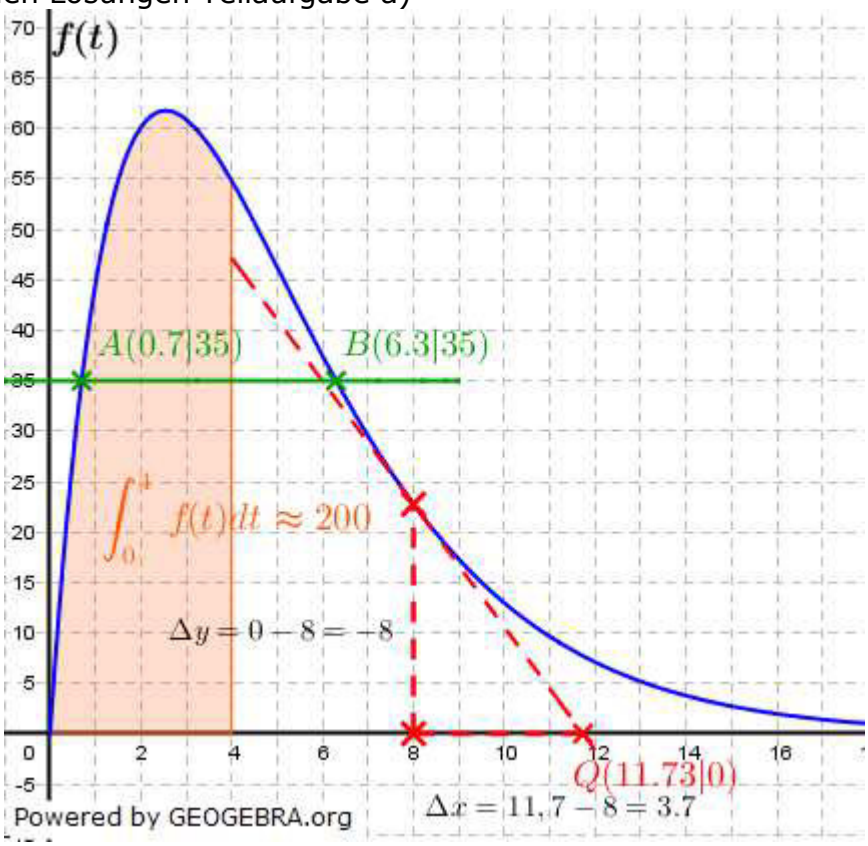
$\overline{w} = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt$

Aus der Graphik zählen wir im Intervall $[0;4]$ etwa 40 Kästchen unter dem Graphen von f. Ein Kästchen ist definiert mit $5\,mg$. Damit ist:

$\overline{w} = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot 5\cdot 40 = 50$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 Stunden beträgt etwa $50\,mg$.

Graphik zu den Lösungen Teilaufgabe a)



b) *Wirkstoffmenge langfristig:*

$g(t) = 80\cdot(1-e^{-0{,}05t})$; $t \geq 0$ ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von 80.

Langfristig beträgt die Wirkstoffmenge im Blut $80\,mg$.

Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge:

$f'(t) = 80\cdot 0{,}05\cdot e^{-0{,}05t} = 4\cdot e^{-0{,}05t}$

$f'(t) > 0$ für $t \geq 0$.

Momentane Änderungsrate von $1\frac{mg}{h}$:

$4e^{-0{,}05t} = 1 \quad | \quad :4$

$e^{-0{,}05t} = \frac{1}{4} \quad | \quad ln$

$-0{,}05t = ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad | \quad :-0{,}05$

$t \approx 27{,}73$

Etwa $28\,min$ nach Verabreichung beträgt die Änderungsrate $1\frac{mg}{h}$.

Mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden:

$$\overline{w} = \frac{1}{240}\int_0^{240} 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05t})\, dt = \frac{1}{240}\left[80t + \frac{80e^{-0{,}05t}}{0{,}05}\right]_0^{240}$$
$$= \frac{1}{240}[80t + 1600 \cdot e^{-0{,}05t}]_0^{240} = \frac{1}{240} \cdot 17600{,}1 \approx 73{,}33$$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten vier Stunden betrug etwa $73{,}3\, mg$.

Frage im Sachzusammenhang:
Mit $g(t+15) = g(t) + 30$ wird nach dem Zeitpunkt t gefragt, von welchem aus innerhalb von 15 Minuten die Wirkstoffmenge um $30\, mg$ zunimmt.

Lösung M02A2

Lösungslogik

Alle C_a berühren sich im Punkt $P(0|1)$:
Es muss gelten, dass $g_a(0) = 1$ für alle a und $g_{a_1}'(0) = g_{a_2}'(0)$.

Ortskurve aller Scheitelpunkte:
Wir bestimmen die Koordinaten der Scheitelpunkte S_a, stellen die x-Koordinate von S_a um nach a und setzen dieses a in die Ausgangsgleichung ein.

Punkt der Ortskurve, der kein Scheitelpunkt ist:
Prüfung der x-Koordinate der Scheitelpunkte aus Aufgabenteil zuvor, ob $x_S = 0$ möglich.

Klausuraufschrieb

Alle C_a berühren sich im Punkt $P(0|1)$:
$g_a'(x) = 2ax + 6; \quad g_a(0) = 1$
$g_{a_1}'(0) = g_{a_2}'(0)$
$2a_1 \cdot 0 + 6 = 2a_2 \cdot 0 + 6 \;\; => \;\; 6 = 6$ wahre Aussage
Wegen $P(0|1) \in C_a \wedge g_{a_1}'(0) = g_{a_2}'(0)$ berühren sich alle C_a im Punkt $P(0|1)$.

Ortskurve aller Scheitelpunkte:
$g_a'(x) = 0$:

$$2ax + 6 = 0$$
$$x = -\frac{3}{a}$$
$$a = -\frac{3}{x}$$
$$g_a\left(-\frac{3}{a}\right) = a \cdot \left(-\frac{3}{a}\right)^2 - \frac{18}{a} + 1 = \frac{9}{a} - \frac{18}{a} + 1 = 1 - \frac{9}{a}$$
$$S_a\left(-\frac{3}{a}\middle|1 - \frac{9}{a}\right)$$

$s(x)$:
$a \to g_a(x)$

$$s(x) = -\frac{3}{x} \cdot x^2 + 6x + 1$$
$$s(x) = 3x + 1$$

Der Graph S, auf dem alle Scheitelpunkte C_a liegen, hat die Funktionsgleichung $s(x) = 3x + 1$.

Punkt der Ortskurve, der kein Scheitelpunkt von C_a ist:
Die Scheitelkoordinaten sind $S_a\left(-\frac{3}{a}\middle|1 - \frac{9}{a}\right)$ (siehe vor).
$x_S = -\frac{3}{a}$ kann nicht Null werden.
Der Punkt $P(0|1)$ auf S ist kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de