Lösung M02A1

Lösungslogik

a) *Wirkstoffmenge und momentane Änderungsrate 8 Stunden nach Verabreichung:*
Wir zeichnen in der mitgegebenen Graphik eine Tangente im Punkt $P(8|f(8))$ ($f(8)$ aus Graphik ablesen) und tragen an die Tangente ein Steigungsdreieck an.

Zeitraum für Wirkstoffmenge 35 *mg:*
Wir ziehen eine Parallele zur x-Achse im Abstand 35. Die beiden Schnittpunkte mit dem Graphen geben die Zeit von und Zeit bis an.

Mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 *Stunden:*
Dies ist die Gesamtwirkstoffmenge innerhalb 4 Stunden geteilt durch 4. Wir ermitteln dies, indem wir die Kästchen unter der Kurve zählen, wobei ein Kästchen $5\,mg$ ist.

b) *Wirkstoffmenge langfristig:*
Gegeben ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von $890\,mg$.

Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge:
Eine Funktion des beschränkten Wachstums ist streng monoton steigend.

Momentane Änderungsrate von $1\frac{mg}{h}$*:*
Wir setzen $f'(t) = 1$ und lösen die Gleichung nach t auf.

Mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden:
Dies entspricht $\frac{1}{240}$ der Fläche unter der Kurve im Intervall $[0; 240]$.

Frage im Sachzusammenhang:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Wirkstoffmenge und momentane Änderungsrate 8 Stunden nach Verabreichung:*
Aus der Lösungsgraphik lesen wir ab:
$f(8) \approx 22{,}5$
$f'(8) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{3{,}7} \approx -2{,}16$
Die Wirkstoffmenge 8 Stunden nach Verabreichung beträgt etwa $22{,}5\,mg$ *bei einer momentanen Änderungsrate von* $-2{,}16\frac{mg}{h}$*.*

Zeitraum für Wirkstoffmenge 35 *mg:*
Aus der Graphik lesen wir ab:
$t_{wirk} = x_B - x_A = 6{,}3 - 0{,}7 = 5{,}6$
In der Zeit von $t = 0{,}7$ *und* $t = 6{,}3$ *beträgt die Wirkstoffmenge mindestens* $35\,mg$*.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 Stunden:

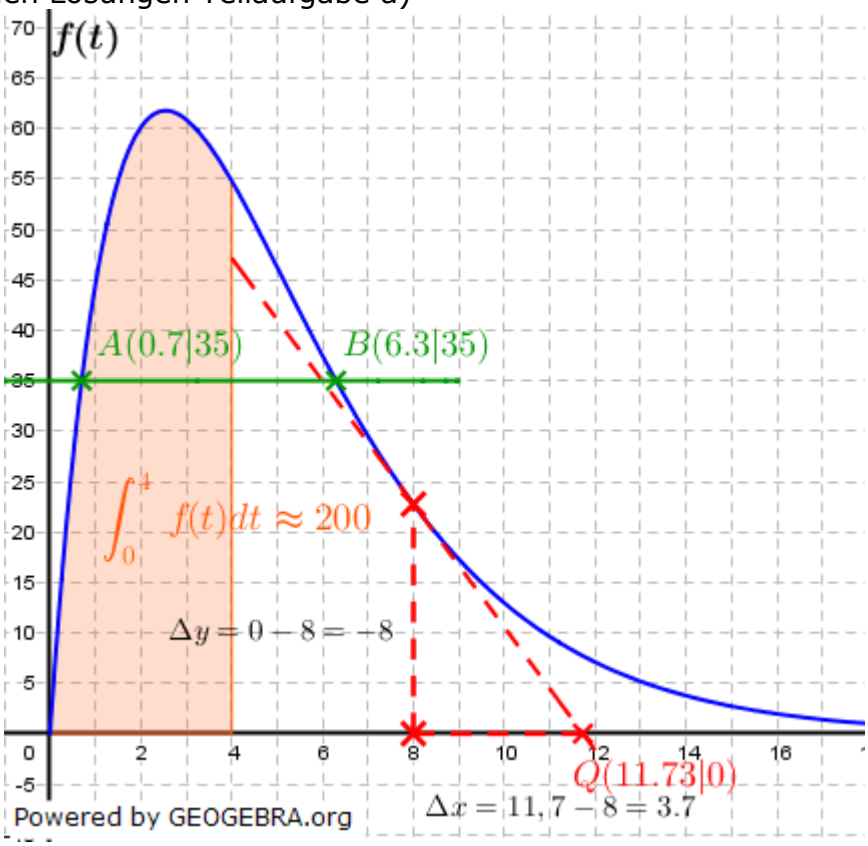
$\overline{w} = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt$

Aus der Graphik zählen wir im Intervall $[0;4]$ etwa 40 Kästchen unter dem Graphen von f. Ein Kästchen ist definiert mit $5\,mg$. Damit ist:

$\overline{w} = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot 5\cdot 40 = 50$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 Stunden beträgt etwa $50\,mg$.

Graphik zu den Lösungen Teilaufgabe a)



b) *Wirkstoffmenge langfristig:*

$g(t) = 80\cdot(1 - e^{-0{,}05t})$; $t \geq 0$ ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von 80.

Langfristig beträgt die Wirkstoffmenge im Blut $80\,mg$.

Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge:

$f'(t) = 80\cdot 0{,}05\cdot e^{-0{,}05t} = 4\cdot e^{-0{,}05t}$

$f'(t) > 0$ für $t \geq 0$.

Momentane Änderungsrate von $1\frac{mg}{h}$:

$4e^{-0{,}05t} = 1 \quad | \quad :4$

$e^{-0{,}05t} = \frac{1}{4} \quad | \quad ln$

$-0{,}05t = ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad | \quad :-0{,}05$

$t \approx 27{,}73$

Etwa $28\,min$ nach Verabreichung beträgt die Änderungsrate $1\frac{mg}{h}$.

Mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden:

$$\overline{w} = \frac{1}{240}\int_0^{240} 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05t})\, dt = \frac{1}{240}\left[80t + \frac{80e^{-0{,}05t}}{0{,}05}\right]_0^{240}$$
$$= \frac{1}{240}[80t + 1600 \cdot e^{-0{,}05t}]_0^{240} = \frac{1}{240} \cdot 17600{,}1 \approx 73{,}33$$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten vier Stunden betrug etwa $73{,}3\, mg$.

Frage im Sachzusammenhang:
Mit $g(t+15) = g(t) + 30$ wird nach dem Zeitpunkt t gefragt, von welchem aus innerhalb von 15 Minuten die Wirkstoffmenge um $30\, mg$ zunimmt.

Lösung M02A2

Lösungslogik

Alle C_a berühren sich im Punkt $P(0|1)$:
Es muss gelten, dass $g_a(0) = 1$ für alle a und $g_{a_1}'(0) = g_{a_2}'(0)$.

Ortskurve aller Scheitelpunkte:
Wir bestimmen die Koordinaten der Scheitelpunkte S_a, stellen die x-Koordinate von S_a um nach a und setzen dieses a in die Ausgangsgleichung ein.

Punkt der Ortskurve, der kein Scheitelpunkt ist:
Prüfung der x-Koordinate der Scheitelpunkte aus Aufgabenteil zuvor, ob $x_S = 0$ möglich.

Klausuraufschrieb

Alle C_a berühren sich im Punkt $P(0|1)$:
$g_a'(x) = 2ax + 6; \quad g_a(0) = 1$
$g_{a_1}'(0) = g_{a_2}'(0)$
$2a_1 \cdot 0 + 6 = 2a_2 \cdot 0 + 6 \;\; => \;\; 6 = 6$ wahre Aussage
Wegen $P(0|1) \in C_a \wedge g_{a_1}'(0) = g_{a_2}'(0)$ berühren sich alle C_a im Punkt $P(0|1)$.

Ortskurve aller Scheitelpunkte:
$g_a'(x) = 0$:

$$2ax + 6 = 0$$
$$x = -\frac{3}{a}$$
$$a = -\frac{3}{x}$$
$$g_a\left(-\frac{3}{a}\right) = a \cdot \left(-\frac{3}{a}\right)^2 - \frac{18}{a} + 1 = \frac{9}{a} - \frac{18}{a} + 1 = 1 - \frac{9}{a}$$
$$S_a\left(-\frac{3}{a}\middle|1 - \frac{9}{a}\right)$$

$s(x)$:
$a \to g_a(x)$

$$s(x) = -\frac{3}{x} \cdot x^2 + 6x + 1$$
$$s(x) = 3x + 1$$

Der Graph S, auf dem alle Scheitelpunkte C_a liegen, hat die Funktionsgleichung $s(x) = 3x + 1$.

Punkt der Ortskurve, der kein Scheitelpunkt von C_a ist:
Die Scheitelkoordinaten sind $S_a\left(-\frac{3}{a}\middle|1 - \frac{9}{a}\right)$ (siehe vor).
$x_S = -\frac{3}{a}$ kann nicht Null werden.
Der Punkt $P(0|1)$ auf S ist kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de