

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 03

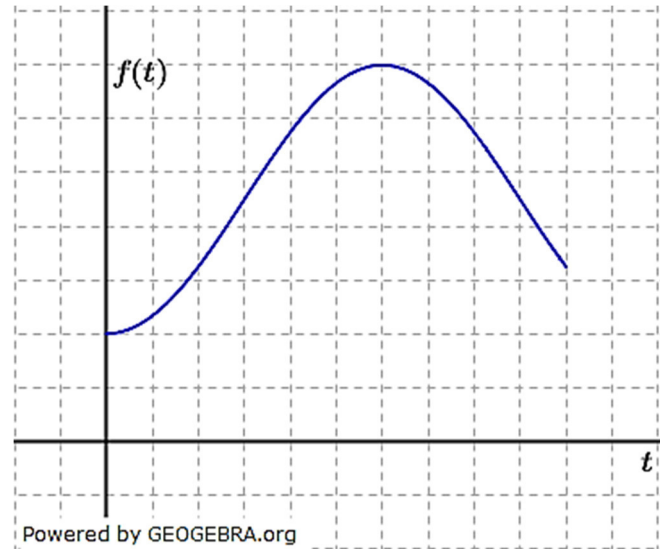
Aufgabe M03A1



Der Temperaturverlauf an einem Sommertag wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 18 - 10\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$; $0 \leq t \leq 24$ (t in Stunden nach Mitternacht, $f(t)$ in $^{\circ}\text{C}$).

Abgebildet ist ein Teil des Graphen von f . Ergänzen Sie in der Abbildung die Skalierungen der Koordinatenachsen.

Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr.



Aufgabe M02A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K .

- a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f auf Monotonie.
Skizzieren Sie K .
- b) Die y -Achse, die Gerade $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt.
- c) Der Graph K^* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K^* gehörenden Funktion f^* .
- d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0|4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden $y = 3$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 03

Lösung M03A1

Lösungslogik

Ergänzung der Skalierung:

An Hand der Funktionsgleichung bestimmen wir Minimum und Maximum des Graphen sowie dessen Periode. Über diese Werte ergibt sich dann die Skalierung.

Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr:

Wir berechnen $\frac{1}{18-6} \int_6^{18} f(t) dt$.

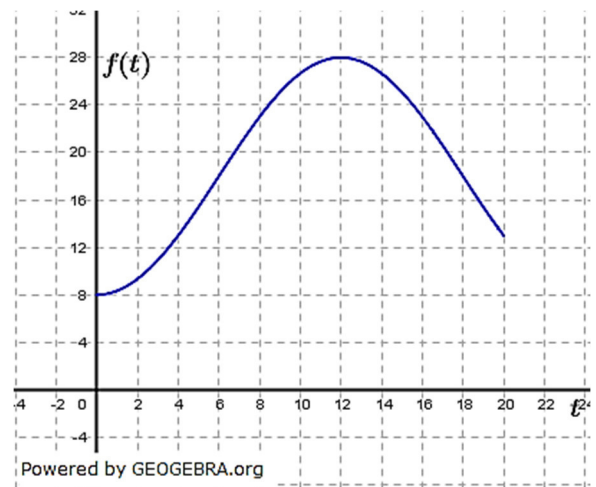
Klausuraufschrieb

Ergänzung der Skalierung:

Aus der Funktionsgleichung ergibt sich, dass die an der x -Achse gespiegelte Kosinuskurve um 18 Einheiten nach oben verschoben ist. Hieraus ergibt sich der y -Wert der Tiefpunkte zu $y_{TP} = 8$ und der y -Wert der Hochpunkte zu $y_{HP} = 28$.

Wegen $b = \frac{\pi}{12}$ ist $p = 24$.

Zugehörige Skalierung siehe nebenstehende Graphik.



Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{12} \cdot \int_6^{18} f(t) dt \\ &= \frac{1}{12} \cdot \int_6^{18} 18 - 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) dt \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left[18t - \frac{10 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)}{\frac{\pi}{12}} \right]_6^{18} = \frac{1}{12} \cdot \left[18t - \frac{120}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \right]_6^{18} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(18 \cdot 18 - \frac{120}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 18\right) - \left(18 \cdot 6 - \frac{120}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(324 - \frac{120}{\pi} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \left(108 - \frac{120}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right) \\ &= 27 + \frac{10}{\pi} - 9 + \frac{10}{\pi} = 18 + \frac{20}{\pi} \approx 24,366 \end{aligned}$$

Die Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr betrug etwa 24,4 °C.

Lösung M03A2

Lösungslogik

- a) *Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen:*
Schnittpunkte mit der x -Achse über $f(x) = 0$.
Schnittpunkt mit der y -Achse über $f(0)$.

Gleichung der Asymptote von K:

Untersuchung des globalen Verhaltens für $x \rightarrow \pm\infty$.

Monotonieverhalten von K:

Untersuchung ob Extremstellen vorhanden.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 03

- b) *Inhalt einer nach rechts offenen Fläche:*
Aus der Aufgabenstellung heraus ist die Fläche gesucht, die sich zwischen der Parallelen zur x -Achse $y = 6$ und dem Graphen von f befindet, also Fläche zwischen oberer und unterer Kurve.
$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z 6 - f(x) dx.$$
- c) *Spiegelung von K an der Geraden $y = 1$:*
Mit $-f(x)$ spiegeln wir K zunächst an der x -Achse ($y = 0$) und verschieben die gespiegelte Kurve dann um zwei Stellen nach oben (um zwei Stellen, da $y = 1$ durch die Spiegelung $y = -1$ wird).
- d) *Funktionsgleichung einer Parabel:*
Die Gleichung der Parabel p sei $p(x) = ax^2 + bx + c$. Aus der Aufgabenstellung lesen wir ab:
Der Punkt $S(0|4)$ ist Berührungspunkt:
 $p(0) = 4; p'(0) = f'(0)$
Der Scheitel liegt auf der Geraden $y = 3$:
 $p'(p'(x) = 0) = 3$
Der Funktionswert der Parabel im Scheitelpunkt ist an der Stelle 3.

Klausuraufschrieb

- a) *Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen:*

Nullstellen über $f(x) = 0$:

$$\begin{array}{l|l} 6 - 2e^{-x} = 0 & +2e^{-x}; : 2 \\ e^{-x} = 3 & \ln \end{array}$$

$$-x = \ln(3)$$

$$x = -\ln(3)$$

$$N_1(-\ln(3)|0)$$

Schnittpunkt mit der y -Achse über $f(0)$

$$f(0) = 6 - 2e^0 = 4$$

$$S_y(0|4)$$

Gleichung der Asymptote von K :

$$\text{Wegen } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \text{ ist } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 6$$

K hat die waagrechte Asymptote $y = 6$.

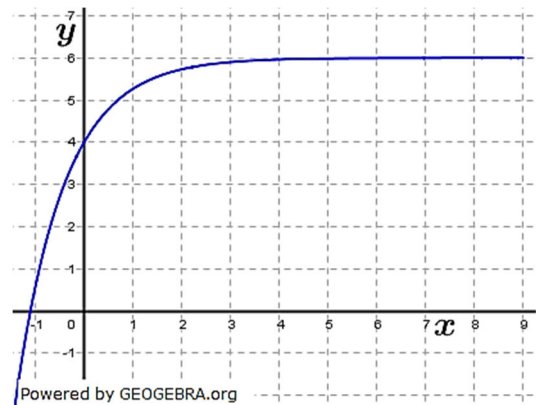
Monotonieverhalten von K :

$$f'(x) = 2e^{-x}$$

Die Ableitungsfunktion hat keine Nullstellen, somit hat K keine Extremstellen.

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

K ist streng monoton steigend.



- b) *Inhalt einer nach rechts offenen Fläche:*
$$A = \int_0^z (6 - (6 - 2e^{-x})) dx = [-2e^{-x}]_0^z = -2e^{-z} + 2e^0$$

Wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} -2e^{-z} = 0$ ist $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z (6 - f(x)) dx = 2$

Der Inhalt der nach rechts offenen Fläche beträgt 2 FE.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 03

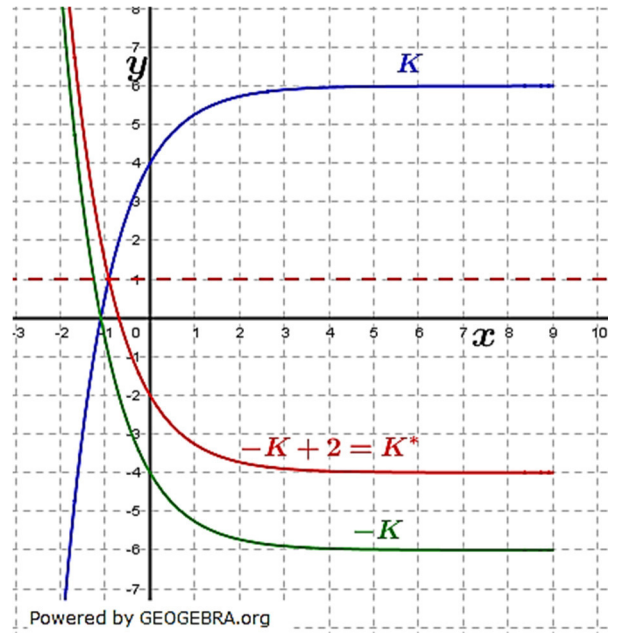
c) Spiegelung von K an der Geraden $y = 1$:

Zunächst Spiegelung von $f(x)$ an der x -Achse:

$$-f(x) = -6 + 2e^{-x}$$

Dann Verschiebung der gespiegelten Kurve um zwei Stellen nach oben:

$$f^*(x) = 2e^{-x} - 4$$



d) Funktionsgleichung einer Parabel:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$p(0) = 4; \quad p'(0) = f'(0)$$

$$p(p'(x) = 0) = 3$$

$$(1) \quad c = 4$$

$$(2) \quad b = 2$$

$$p'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -2$$

$$x = -\frac{1}{a}$$

$$p\left(-\frac{1}{a}\right) = 3 = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + 4$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{a} + 4 = 3$$

$$-\frac{1}{a} = -1$$

$$a = 1$$

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet: $p(x) = x^2 + 2x + 4$