Lösung M03A1

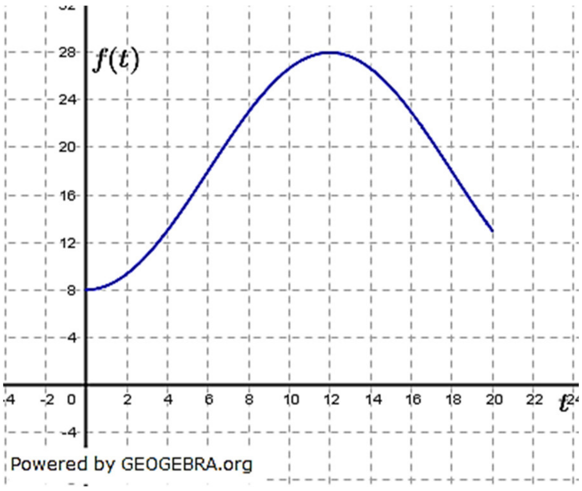
Lösungslogik

Ergänzung der Skalierung:
An Hand der Funktionsgleichung bestimmen wir Minimum und Maximum des Graphen sowie dessen Periode. Über diese Werte ergibt sich dann die Skalierung.

Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr:
Wir berechnen $\frac{1}{18-6}\int_6^{18} f(t)\,dt$.

Klausuraufschrieb

Ergänzung der Skalierung:
Aus der Funktionsgleichung ergibt sich, dass die an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve um 18 Einheiten nach oben verschoben ist. Hieraus ergibt sich der y-Wert der Tiefpunkte zu $y_{TP} = 8$ und der y-Wert der Hochpunkte zu $y_{HP} = 28$.
Wegen $b = \frac{\pi}{12}$ ist $p = 24$.
Zugehörige Skalierung siehe nebenstehende Graphik.



Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr:

$$
\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{12}\cdot\int_6^{18} f t\,dt \\
&= \frac{1}{12}\cdot\int_6^{18} 18-10cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)dt \\
&= \frac{1}{12}\cdot\left[18t-\frac{10sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)}{\frac{\pi}{12}}\right]_6^{18} = \frac{1}{12}\cdot\left[18t-\frac{120}{\pi}\cdot sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right]_6^{18} \\
&= \frac{1}{12}\cdot\left(18\cdot 18-\frac{120}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{12}18\right)-\left(18\cdot 6-\frac{120}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{12}6\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{12}\cdot\left(324-\frac{120}{\pi}sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)-\left(108-\frac{120}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= 27+\frac{10}{\pi}-9+\frac{10}{\pi} = 18+\frac{20}{\pi} \approx 24{,}366
\end{aligned}
$$

Die Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr betrug etwa $24{,}4\,°C$.

Lösung M03A2

Lösungslogik

a) *Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen:*
Schnittpunkte mit der x-Achse über $f(x) = 0$.
Schnittpunkt mit der y-Achse über $f(0)$.

Gleichung der Asymptote von K:
Untersuchung des globalen Verhaltens für $x \to \pm\infty$.

Monotonieverhalten von K:
Untersuchung ob Extremstellen vorhanden.

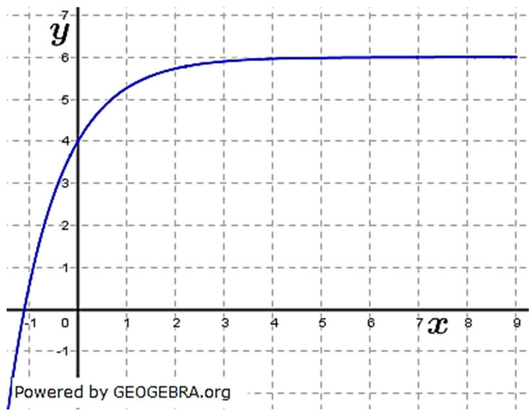
b) *Inhalt einer nach rechts offenen Fläche:*
Aus der Aufgabenstellung heraus ist die Fläche gesucht, die sich zwischen der Parallelen zur x-Achse $y = 6$ und dem Graphen von f befindet, also Fläche zwischen oberer und unterer Kurve.
$A = \lim\limits_{z \to \infty} \int_0^z 6 - f(x)\, dx$.

c) *Spiegelung von K an der Geraden $y = 1$:*
Mit $-f(x)$ spiegeln wir K zunächst an der x-Achse ($y = 0$) und verschieben die gespiegelte Kurve dann um zwei Stellen nach oben (um zwei Stellen, da $y = 1$ durch die Spiegelung $y = -1$ wird).

d) *Funktionsgleichung einer Parabel:*
Die Gleichung der Parabel p sei $p(x) = ax^2 + bx + c$. Aus der Aufgabenstellung lesen wir ab:
Der Punkt $S(0|4)$ ist Berührpunkt:
$p(0) = 4;\ \ p'(0) = f'(0)$
Der Scheitel liegt auf der Geraden $y = 3$:
$p(p'(x) = 0) = 3$
Der Funktionswert der Parabel im Scheitelpunkt ist an der Stelle 3.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen:*
Nullstellen über $f(x) = 0$:
$6 - 2e^{-x} = 0 \quad | \quad +2e^{-x};\ :2$
$e^{-x} = 3 \quad | \quad ln$
$-x = ln(3)$
$x = -ln(3)$
$N_1(-\ln(3)|0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse über $f(0)$
$f(0) = 6 - 2e^0 = 4$
$S_y(0|4)$

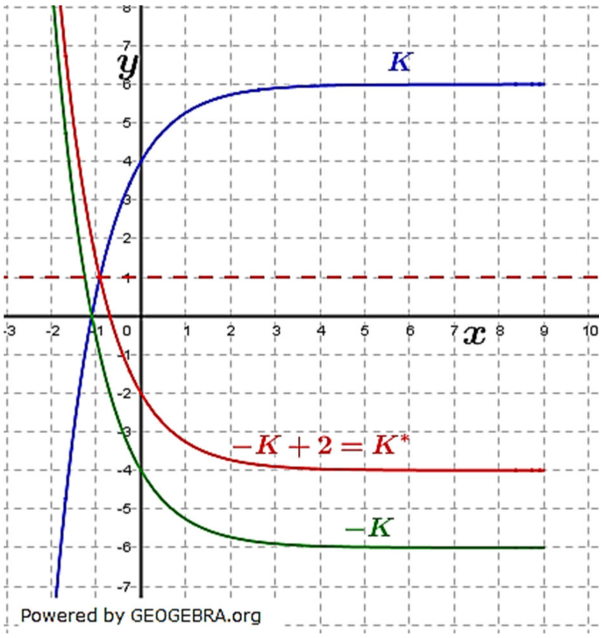


Gleichung der Asymptote von K:
Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 6$
K hat die waagrechte Asymptote $y = 6$.

Monotonieverhalten von K:
$f'(x) = 2e^{-x}$
Die Ableitungsfunktion hat keine Nullstellen, somit hat K keine Extremstellen.
$f'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
K ist streng monoton steigend.

b) *Inhalt einer nach rechts offenen Fläche:*
$A = \int_0^z (6 - (6 - 2e^{-x}))\, dx = [-2e^{-x}]_0^z = -2e^{-z} + 2e^0$
Wegen $\lim\limits_{z \to \infty} -2e^{-z} = 0$ ist $\lim\limits_{z \to \infty} \int_6^z (6 - f(x))\, dx = 2$
Der Inhalt der nach rechts offenen Fläche beträgt $2\ FE$.

c) *Spiegelung von K an der Geraden $y = 1$:*
Zunächst Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse:
$-f(x) = -6 + 2e^{-x}$
Dann Verschiebung der gespiegelten Kurve um zwei Stellen nach oben:
$f^*(x) = 2e^{-x} - 4$



d) *Funktionsgleichung einer Parabel:*
$p(x) = ax^2 + bx + c$
$p'(x) = 2ax + b$
$p(0) = 4;\ \ p'(0) = f'(0)$
$p(p'(x) = 0) = 3$
(1) $c = 4$
(2) $b = 2$
$p'(x) = 0$
$2ax + b = 0$
$2ax = -2$
$x = -\frac{1}{a}$
$p\left(-\frac{1}{a}\right) = 3 = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + 4$
$\frac{1}{a} - \frac{2}{a} + 4 = 3$
$-\frac{1}{a} = -1$
$a = 1$
Die Funktionsgleichung der Parabel lautet: $p(x) = x^2 + 2x + 4$