



Aufgabe M04A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3}$.

Ein Teil des Graphen K ist abgebildet.

- a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f und Gleichungen der Asymptoten von K an.

K besitzt einen Schnittpunkt mit der x -Achse und einen Hochpunkt. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Untersuchen Sie f für $x < 0$ auf Monotonie.

- b) Die Tangente an K an der Stelle $x = 2$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Wenn dieses Dreieck um die y -Achse rotiert, entsteht ein Körper.

Berechnen Sie dessen Volumen.

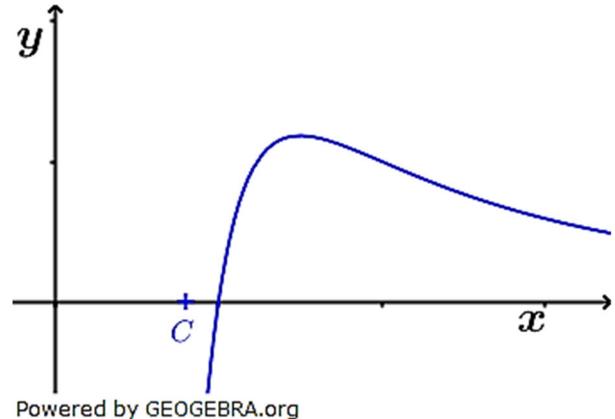
- c) Für die in der Abbildung eingetragene Stelle C wird die Integralfunktion I_C mit

$$I_C(x) = \int_C^x f(t) dt$$

betrachtet.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass I_C mindestens zwei Nullstellen besitzt.

- d) K begrenzt mit der x -Achse und der Geraden $x = u$ ($u > 1$) eine Fläche. Bestimmen Sie u so, dass diese Fläche den Inhalt $1 FE$ hat.



Aufgabe M04A2

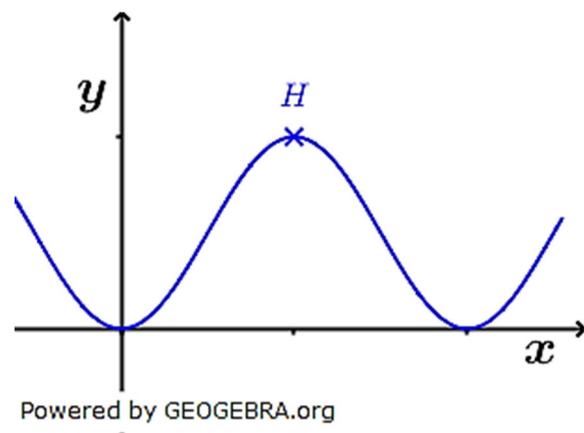
Abgebildet ist ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = (\sin(x))^2$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H .

Es gibt reelle Zahlen a, b, d , so dass gilt:

$$g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$$

Bestimmen Sie diese Zahlen.



Lösung M04A1

Lösungslogik

- a) *Maximale Definitionsmenge von f :*
 Maximale Definitionsmenge ist ganz \mathbb{R} mit Ausnahme der Definitionslücken.
Asymptoten von K :
 Senkrechte Asymptoten den Definitionslücken, waagrechte Asymptoten über Untersuchung des globalen Verhaltens für $x \rightarrow \pm\infty$.
Schnittpunkt mit der x -Achse:
 Berechnung über $f(x) = 0$.
Hochpunkt:
 Bestimmung der Extremstelle über $f'(x) = 0$, y -Koordinate über $f(x_0)$.
Monotonie für $x < 0$:
 Untersuchung von $f'(x)$ für $x < 0$.
- b) *Volumen eines Körpers:*
 Aufstellung der Tangentengleichung im Berührungspunkt $B(2|f(2))$.
 Schnittpunktbestimmung der Tangente mit den Koordinatenachsen.
 Die rotierende Tangente erzeugt einen Kegel mit Volumen $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, dabei ist der y -Wert des Schnittpunktes mit der y -Achse die Höhe h und die Nullstelle der Tangente der Wert des Radius r .
- c) *Nullstellen einer Integralfunktion:*
 Wegen $I_C(C) = \int_C^C f(t) dt = 0$ ist C die erste Nullstelle. Das Integral zwischen C und der Nullstelle von K ist negativ. Rechts der Nullstelle von K gibt es eine Stelle C^* , bei der das Integral zwischen der Nullstelle und C^* positiv genau so groß ist negativ zuvor. Diese Stelle ist in der Stammfunktion somit einer zweite Nullstelle.
 Graphische Darstellung siehe Klausuraufschrieb.
- d) *Wert der Variablen u :*
 Das Integral über K im Intervall zwischen der Nullstelle und u soll den Wert 1 FE haben. Hieraus ermitteln wir u .

Klausuraufschrieb

- a) *Maximale Definitionsmenge von f :*
 $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Asymptoten von K :
 Senkrechte Asymptote in der Definitionslücke $x = 0$.
 Waagrechte Asymptote:
 $\lim_{x \rightarrow |\infty|} f(x) = 0$
 $y = 0$ ist waagrechte Asymptote.
Schnittpunkt mit der x -Achse:
 $f(x) = 0$
 $\frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3} = 0$
 $\frac{8x-8}{x^3} = 0$
 $8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1$
 Der Schnittpunkt mit der x -Achse ist $N(1|0)$.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 04

Hochpunkt:

$$f'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{24}{x^4} = \frac{24-16x}{x^4}$$

$$24 - 16x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{32}{27}$$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H\left(\frac{3}{2} \mid \frac{32}{27}\right)$.

Monotonie für $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{24-16x}{x^4}$$

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x < 0$$

K ist für $x < 0$ streng monoton steigend.

b) **Volumen eines Körpers:**

Tangentengleichung an

K in $B(2|f(2))$

$$t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

$$f'(2) = \frac{24-32}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{8}{4} - \frac{8}{8} = 1$$

$$t(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}x + 2$$

Bei Rotation der

Tangente um die x -Achse

entsteht zwischen den Koordinatenachsen ein Kreiskegel, dessen Volumen

sich über $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ bestimmt.

$$t(0) = h; \quad t(x) = 0 \Rightarrow r$$

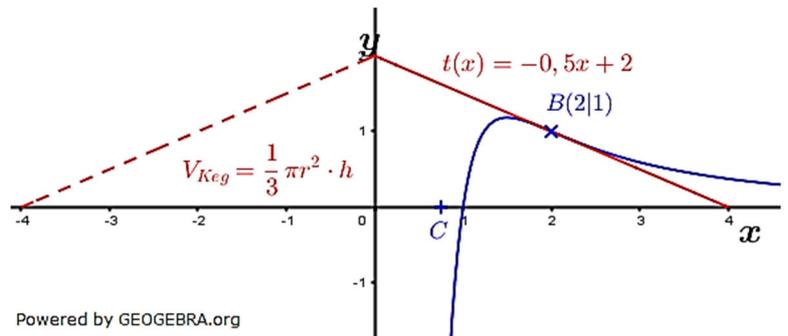
$$t(x) = 0:$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$r = 4; \quad h = 2$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi 4^2 \cdot 2 = \frac{32}{3}\pi \approx 33,51$$

Der Kreiskegel hat ein Volumen von etwa 33,5 VE.



c) **Nullstellen einer Integralfunktion:**

Wegen $I_C(C) = \int_C^C f(t) dt = 0$ liegt bei C die erste Nullstelle.

Aus a) folgte $N(1|0)$

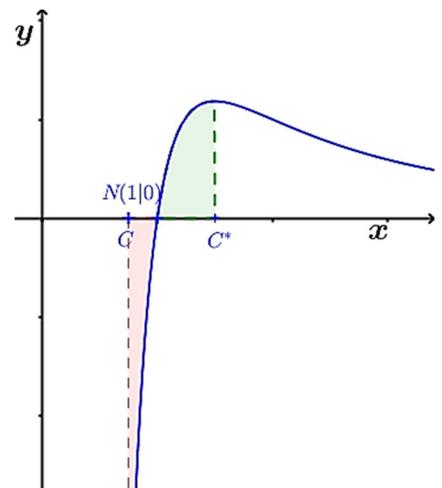
Aus nebenstehender Graphik ersichtlich:

$$\int_C^1 f(t) dt < 0$$

Es gibt eine Stelle C^* , sodass

$$\int_1^{C^*} f(t) dt > 0 = \left| \int_C^1 f(t) dt \right|$$

Somit liegt bei C^* eine weitere Nullstelle.



Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 04

d) Wert der Variablen u :

$$A = \int_1^u f(x) dx = 1$$

$$\left[-\frac{8}{x} + \frac{4}{x^2}\right]_1^u = -\frac{8}{u} + \frac{4}{u^2} - (-8 + 4) = -\frac{8}{u} + \frac{4}{u^2} + 4 = \frac{-8u+4+4u^2}{u^2}$$

$$\frac{-8u+4+4u^2}{u^2} = 1 \quad | \cdot u^2$$

$$-8u + 4 + 4u^2 = u^2$$

$$3u^2 - 8u + 4 = 0 \quad | :3$$

$$u^2 - \frac{8}{3}u + \frac{4}{3} = 0$$

$$u_{1,2} = +\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}} = +\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \quad | \text{ p/q-Formel}$$

$$u_1 = 2; \quad u_2 = \frac{2}{3}$$

Wegen $u > 1$ ist $u_1 = 2$ die Lösung.

Die Fläche unter K im Intervall $[1; 2]$ ist 1 FE groß.

Lösung M04A2

Lösungslogik

Koordinaten des Hochpunktes H :

Die $\sin^2(x)$ -Funktion hat eine Periode von $p = \pi$. Der Hochpunkt liegt bei $\frac{p}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Alternativ Bildung von g' und g'' und rechnerische Bestimmung des Hochpunktes.

Reelle Zahlen a , b und d :

Aus der gegebenen Graphik erkennen wir, dass es sich um eine nach oben verschobene, an der x -Achse gespiegelte Kosinuskurve handelt.

Klausuraufschrieb

Koordinaten des Hochpunktes H :

Periode der $\sin^2(x)$ -Funktion ist $p = \pi$.

Der Hochpunkt liegt in der Mitte bei $x_{HP} = \frac{p}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1.$$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H\left(\frac{\pi}{2} \mid 1\right)$.

Alternativ:

$$g'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$g''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$$

$$2\sin(x) \cdot \cos(x) = 0 \quad | \text{ Satz vom Nullprodukt}$$

$$\sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \pi$$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{2}; x_4 = \frac{3}{2}\pi$$

$$g''(0) = 2\cos^2(0) - 2\sin^2(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$g''(\pi) = 2\cos^2(\pi) - 2\sin^2(\pi) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1.$$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H\left(\frac{\pi}{2} \mid 1\right)$.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 04

Reelle Zahlen a , b und d :

$$|a| = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1 - 0}{2} = 0,5$$

$$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1 + 0}{2} = 0,5$$

$$p = \pi$$

$$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Die Kosinuskurve ist an der x -Achse gespiegelt.

$$a = -0,5$$

Die alternative Funktionsgleichung lautet $g(x) = -0,5 \cos(2x) + 0,5$.