Lösung M04A1

Lösungslogik

a) *Maximale Definitionsmenge von f:*
Maximale Definitionsmenge ist ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Definitionslücken.
Asymptoten von K:
Senkrechte Asymptoten den Definitionslücken, waagrechte Asymptoten über Untersuchung des globalen Verhaltens für $x \to \pm\infty$.
Schnittpunkt mit der x-Achse:
Berechnung über $f(x) = 0$.
Hochpunkt:
Bestimmung der Extremstelle über $f'(x) = 0$, y-Koordinate über $f(x_0)$.
Monotonie für $x < 0$:
Untersuchung von $f'(x)$ für $x < 0$.

b) *Volumen eines Körpers:*
Aufstellung der Tangentengleichung im Berührpunkt $B(2|f(2))$.
Schnittpunktbestimmung der Tangente mit den Koordinatenachsen.
Die rotierende Tangente erzeugt einen Kegel mit Volumen $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, dabei ist der y-Wert des Schnittpunktes mit der y-Achse die Höhe h und die Nullstelle der Tangente der Wert des Radius r.

c) *Nullstellen einer Integralfunktion:*
Wegen $I_C(C) = \int_C^C f(t)\,dt = 0$ ist C die erste Nullstelle. Das Integral zwischen C und der Nullstelle von K ist negativ. Rechts der Nullstelle von K gibt es eine Stelle C^*, bei der das Integral zwischen der Nullstelle und C^* positiv genau so groß ist negativ zuvor. Diese Stelle ist in der Stammfunktion somit einer zweite Nullstelle.
Graphische Darstellung siehe Klausuraufschrieb.

d) *Wert der Variablen u:*
Das Intergral über K im Intervall zwischen der Nullstelle und u soll den Wert $1\ FE$ haben. Hieraus ermitteln wir u.

Klausuraufschrieb

a) *Maximale Definitionsmenge von f:*
$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Asymptoten von K:
Senkrechte Asymptote in der Definitionslücke $x = 0$.
Waagrechte Asymptote:
$\lim\limits_{x \to |\infty|} f(x) = 0$
$y = 0$ ist waagrechte Asymptote.
Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 0$
$\frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3} = 0$
$\frac{8x-8}{x^3} = 0$
$8x - 8 = 0 \;\; => \;\; x = 1$
Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $N(1|0)$.

Hochpunkt:

$f'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{24}{x^4} = \frac{24-16x}{x^4}$

$24 - 16x = 0 \;\; => \;\; x = \frac{3}{2}$

$x^2 + 3x - 1 = 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{32}{27}$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{32}{27}\right)$.

Monotonie für $x < 0$:

$f'(x) = \frac{24-16x}{x^4}$

$f'(x) > 0$ für alle $x < 0$

K *ist für* $x < 0$ *streng monoton steigend.*

b) *Volumen eines Körpers:*

Tangentengleichung an K in $B(2|f(2))$

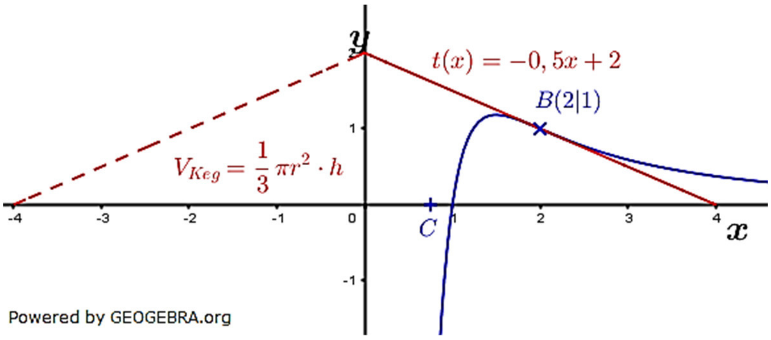
$t(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$

$f'(2) = \frac{24-32}{16} = -\frac{1}{2}$

$f(2) = \frac{8}{4} - \frac{8}{8} = 1$

$t(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x-2) + 1$

$\quad\;\; = -\frac{1}{2}x + 2$



Bei Rotation der Tangente um die x-Achse entsteht zwischen den Koordinatenachsen ein Kreiskegel, dessen Volumen sich über $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ bestimmt.

$t(0) = h; \;\; t(x) = 0 \;\; => \;\; r$

$t(x) = 0$:

$-\frac{1}{2}x + 2 = 0 \;\; => \;\; x = 4$

$r = 4; \;\; h = 2$

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi 4^2 \cdot 2 = \frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$

Der Kreiskegel hat ein Volumen von etwa $33{,}5\,VE$.

c) *Nullstellen einer Integralfunktion:*

Wegen $I_C(C) = \int_C^C f(t)\,dt = 0$ liegt bei C die erste Nullstelle.

Aus a) folgte $N(1|0)$

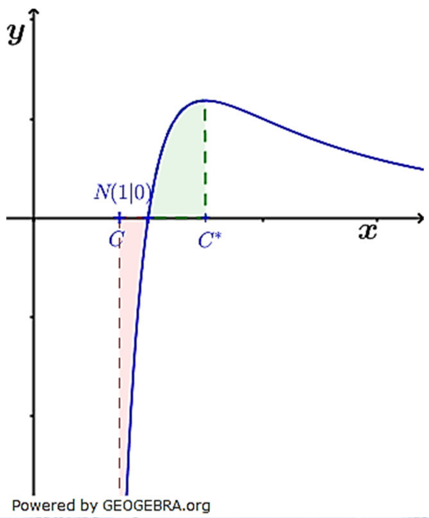
Aus nebenstehender Graphik ersichtlich:

$\int_C^1 f(t)\,dt < 0$

Es gibt eine Stelle C^*, sodass

$\int_1^{C^*} f(t)\,dt > 0 = \left|\int_C^1 f(t)\,dt\right|$

Somit liegt bei C^* *eine weitere Nullstelle.*



d) *Wert der Variablen u:*

$A = \int_1^u f(x)\,dx = 1$

$\left[-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\right]_1^u = -\frac{8}{u}+\frac{4}{u^2}-(-8+4) = -\frac{8}{u}+\frac{4}{u^2}+4 = \frac{-8u+4+4u^2}{u^2}$

$\frac{-8u+4+4u^2}{u^2} = 1 \qquad | \quad \cdot u^2$

$-8u+4+4u^2 = u^2$

$3u^2-8u+4 = 0 \qquad | \quad :3$

$u^2-\frac{8}{3}u+\frac{4}{3} = 0$

$u_{1,2} = +\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}-\frac{12}{9}} = +\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \qquad | \quad p/q$-Formel

$u_1 = 2; \quad u_2 = \frac{2}{3}$

Wegen $u > 1$ ist $u_1 = 2$ die Lösung.

Die Fläche unter K im Intervall $[1; 2]$ ist $1\ FE$ groß.

Lösung M04A2

Lösungslogik

Koordinaten des Hochpunktes H:

Die $\sin^2(x)$-Funktion hat eine Periode von $p = \pi$. Der Hochpunkt liegt bei $\frac{p}{2} = \frac{\pi}{2}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Alternativ Bildung von g' und g'' und rechnerische Bestimmung des Hochpunktes.

Reelle Zahlen a, b und d:

Aus der gegebenen Graphik erkennen wir, dass es sich um eine nach oben verschobene, an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve handelt.

Klausuraufschrieb

Koordinaten des Hochpunktes H:

Periode der $\sin^2(x)$-Funktion ist $p = \pi$.

Der Hochpunkt liegt in der Mitte bei $x_{HP} = \frac{p}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1.$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$.

Alternativ:

$g'(x) = 2sin(x) \cdot cos(x)$

$g''(x) = 2\,cos^2(x) - 2\,sin^2(x)$

$2sin(x) \cdot cos(x) = 0 \qquad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0; x_2 = \pi$

$cos(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3}{2}\pi$

$g''(0) = 2\,cos^2(0) - 2\,sin^2(0) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ Tiefpunkt

$g''(\pi) = 2\,cos^2(\pi) - 2\,sin^2(\pi) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ Tiefpunkt

$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ Hochpunkt

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1.$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$.

Reelle Zahlen a, b und d:
$|a| = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1-0}{2} = 0{,}5$
$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1+0}{2} = 0{,}5$
$p = \pi$
$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
Die Kosinuskurve ist an der x-Achse gespiegelt.
$a = -0{,}5$
Die alternative Funktionsgleichung lautet $g(x) = -0{,}5\, cos(2x) + 0{,}5$.