Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 05

Aufgabe M05A1

Ein quaderförmiger Wassertank hat eine Grundfläche von $2\,m^2$ und ist zunächst leer.
Der Graph in der unteren Abbildung 1 gibt die momentane Zuflussrate des Wassers in Kubikmeter pro Stunde über einen Zeitraum von sechs Stunden wieder.
Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate des Wassers.
Ermitteln Sie mithilfe des Graphen die Wassermenge im Tank nach $1{,}5$ Stunden.
Geben Sie die maximale Wassermenge sowie die Wassermenge nach 6 Stunden an.
Wie hoch steht das Wasser im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses?
Skizzieren Sie unter Verwendung dieser Ergebnisse den Graphen, der die Höhe des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt in die untere Abbildung 2.

Abbildung 1

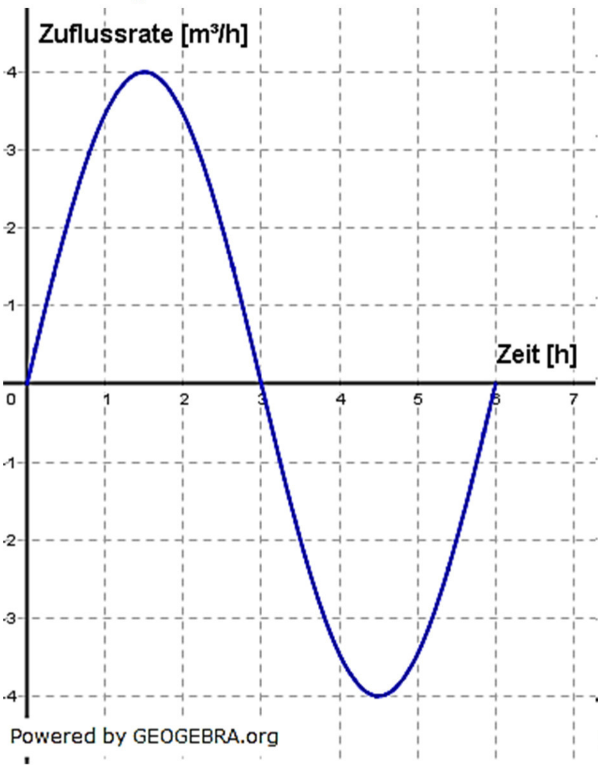
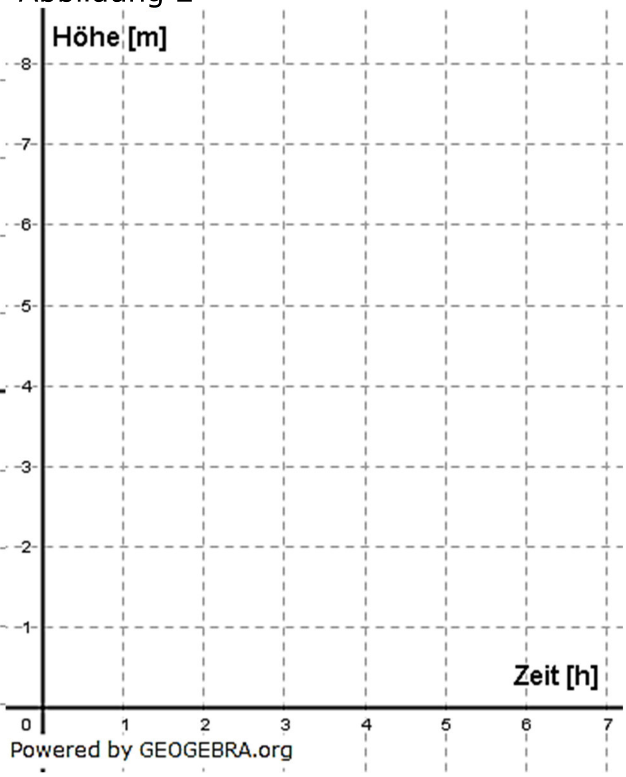
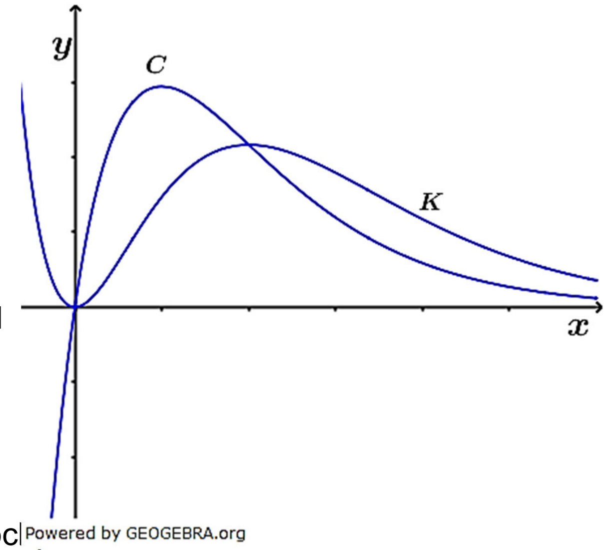


Abbildung 2



Aufgabe M04A2

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch $f(x) = 8x \cdot e^{-x}$ und $g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$. Deren Graphen sind in der nebenstehenden Skizze dargestellt.



a) Begründen Sie, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist. Berechnen Sie die Schnittpunkte von C und K.

b) Die Gerade $x = 1$ schneidet K in P und C in Q. P, Q und der Ursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hoc
Geben Sie ohne weitere Rechnung an, für welche Werte von a die Gleichung $g(x) = a$ keine, eine bzw. mehrere Lösungen hat.

d) Es gibt Stammfunktionen F von f und G von g , sodass $F(x) - G(x) = g(x)$ gilt. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von C und K eingeschlossen wird.

Lösung M05A1

Lösungslogik

Maximale Änderungsrate:

Ablesen des Hochpunktes von Abb. 1.

Wassermenge im Tank nach $1{,}5$ Stunden:

Die Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen aus Abbildung 1 im Intervall von 0 bis $1{,}5$.

Maximale Wassermenge:

Die maximale Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen aus Abbildung 1 im Intervall von 0 bis 3.

Wassermenge nach 6 Stunden:

Der Tank ist leer.

Wasserhöhe im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses:

Wir bestimmen die Wassermenge zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ (maximale Zuflussrate Wassertanks).

Graph der Höhe des Wasserspiegels:

Die Änderungsrate ist eine Sinuskurve, der Bestand dann die Stammfunktion dieser Sinuskurve (- Kosinus). Da nach der Höhe im Tank gefragt ist, muss diese Stammfunktion durch 2 geteilt werden.

Klausuraufschrieb

Maximale Änderungsrate:

$f(t)_{max} = 4\, m^3/h$ (siehe Abb. 1)

Wassermenge im Tank nach $1{,}5$ Stunden:

Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen (Abb. 1) im Intervall $I = [0; 1{,}5]$. Es sind ca. 4 Kästchen (durch „Kästchenzählen" abgelesen). Jedes Kästchen entspricht $1\, m^3/h$.

Nach $1{,}5$ Stunden befinden sich etwa $4\, m^3$ Wasser im Tank.

Maximale Wassermenge:

Die maximale Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen (Abb. 1) im Intervall $I = [0; 3]$. Wegen $M_{[0;1,5]} = 4\, m^3$ ist $M_{[0;3]} = 8\, m^3$ (Symmetrieachse bei $t = 1{,}5$).

Die Wassermenge im Tank ist nach 3 Stunden mit $8\, m^3$ maximal.

Wassermenge nach 6 Stunden:

$M_{[0;3]} = 8\, m^3$; $M_{[3;6]} = -8\, m^3$ (Punktsymmetrie bei $t = 3$)

Der Tank ist leer.

Wasserhöhe im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses:

Wassermenge zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ ist $4\, m^3$

Grundfläche des Tanks ist $2\, m^2$.

$h = \frac{V}{A} = \frac{4}{2}\, m = 2\, m.$

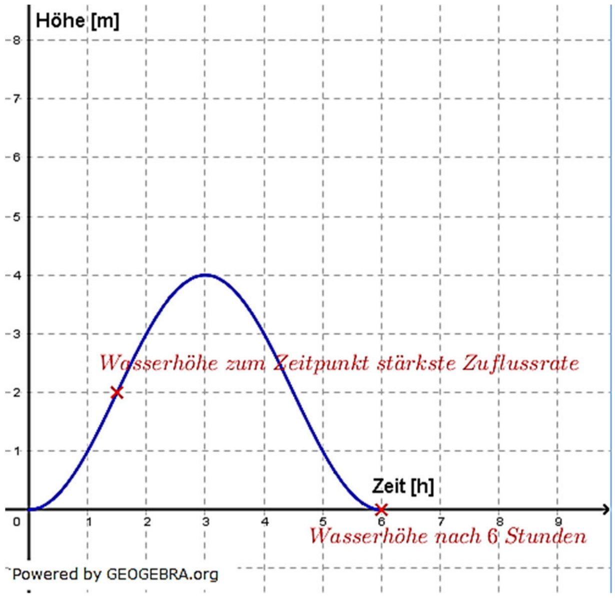
Das Wasser steht zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses $2\, m$ hoch im Tank.

Graph der Höhe des Wasserspiegels:

$f(t) = 4\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

$F(t) = -4\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t + 4 = V$

$h = \frac{V}{A} = \frac{-4\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t+4}{2} = -2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t + 2$



Lösung M05A2

Lösungslogik

a) *Begründung, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist:*
$f(0)$ ist eine einfache, $g(0)$ eine doppelte Nullstelle.
Schnittpunkte von C und K:
Wir bilden $f(x) \cap g(x)$.

b) *Flächeninhalt eines Dreiecks:*
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
Mit $g = f(1) - g(1)$ und $h = 1$.
(Erläuternde Graphik siehe Klausuraufschrieb).

c) *Koordinaten des Hochpunkts von K:*
Wir bilden $g'(x) = 0$ und lösen die entstehende Gleichung nach x auf.
Anzahl Lösungen der Gleichung $g(x) = a$:
$g(x) = a$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand a.
Aus der Graphik lesen wir ab:
Für $a < 0$ gibt es keine Lösung.
Für $a = 0$ (die x-Achse selbst) gibt es eine Lösung.
Für $0 < a < f(x_{HP})$ gibt es drei Lösungen.
Für $a = f(x_{HP})$ gibt es zwei Lösungen.
Für $a > f(x_{HP})$ gibt es eine Lösung.

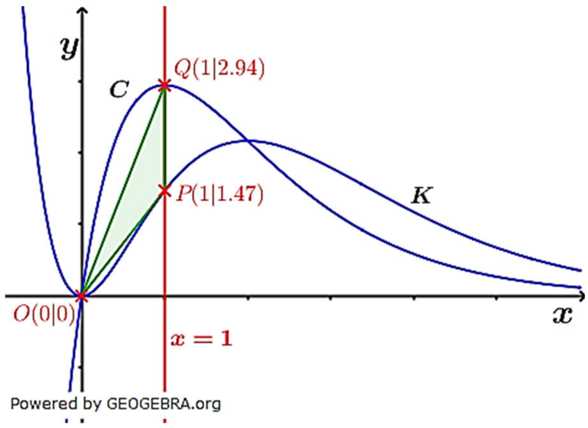
d) *Inhalt der Fläche, die von C und K eingeschlossen wird unter der Bedingung, dass $g(x)$ eine Stammfunktion von $F(x) - G(x)$ ist:*
Ist $g(x)$ eine Stammfunktion von $F(x) - G(x)$, so muss für die Fläche zwischen C und K gelten: $A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx = [F(x) - G(x)]_a^b$.
Da aber $F(x) - G(x) = g(x)$ sein soll, gilt somit $[F(x) - G(x)]_a^b = [g(x)]_a^b$.
a und b sind die x-Kooridnaten der beiden Schnittpunkte gemäß Aufgabenteil a).

Klausuraufschrieb

a) *Begründung, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist:*
$f(0)$ ist einfache Nullstelle => C ist der Graph von f.
$g(0)$ ist einfache Nullstelle => K ist der Graph von g.

Schnittpunkte von C und K:
$f(x) \cap g(x)$:
$8x \cdot e^{-x} = 4x^2 \cdot e^{-x} \quad | \quad : e^{-x}$
$4x^2 = 8x$
$4x^2 - 8x = 0$
$4x(x-2) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
$f(0) = 0; \quad f(2) = 16 \cdot e^{-2} = \frac{16}{e^2}$
Die beiden Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_1(0|0)$ und $S_2\left(2\middle|\frac{16}{e^2}\right)$.

b) *Flächeninhalt eines Dreiecks:*
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
$g = f(1) - g(1)$
$h = 1$
$f(1) = \frac{8}{e} \approx 2.94; \quad g(1) = \frac{4}{e} \approx 1{,}47$
$f(1) - g(1) = 2{,}94 - 1{,}47 = 1{,}47$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}47 \cdot 1 = 0{,}735$
Die Fläche des Dreiecks beträgt etwa $0{,}74\ FE$.



c) *Koordinaten des Hochpunkts von K:*
$g'(x) = 8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x} = 4e^{-x}(2x - x^2)$
$4e^{-x}(2x - x^2) = 0$
$2x - x^2 = 0$
$x(2-x) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
$x_2 = 2$ ist Stelle des Hochpunktes (siehe Graphik Aufgabenstellung).
$g(2) = 4 \cdot 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{16}{e^2} \approx 2{,}17$
Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H(2|2{,}17)$.

Anzahl Lösungen der Gleichung $g(x) = a$:
$g(x) = a$ ist Parallele zur x-Achse im Abstand a.
Es gilt:

Wert von a	Anzahl Nullstellen	Einfluss
$a < 0$	0	*Parallele unterhalb x-Achse*
$a = 0$	1	*Die x-Achse selbst*
$0 < a < 2{,}17$	3	Parallelen oberhalb x-Achse bis zum Hochpunkt
$a = 2.17$	2	Parallele durch den Hochpunkt
$a > 2.17$	1	Parallele oberhalb des Hochpunkts

d) *Inhalt der Fläche, die von* C *und* K *eingeschlossen wird unter der Bedingung, dass* $g(x)$ *eine Stammfunktion von* $F(x)-G(x)$ *ist:*
$A=\int_0^2 \big(f(x)-g(x)\big)\,dx=[F(x)-G(x)]_0^2=[g(x)]_0^2=4\cdot 2^2\cdot e^{-2}-0=\frac{16}{e^2}$
$A\approx 2{,}17$
Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt etwa $2{,}17\ FE$.