Lösung M05A1

Lösungslogik

Maximale Änderungsrate:
Ablesen des Hochpunktes von Abb. 1.

Wassermenge im Tank nach $1{,}5$ Stunden:
Die Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen aus Abbildung 1 im Intervall von 0 bis $1{,}5$.

Maximale Wassermenge:
Die maximale Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen aus Abbildung 1 im Intervall von 0 bis 3.

Wassermenge nach 6 Stunden:
Der Tank ist leer.

Wasserhöhe im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses:
Wir bestimmen die Wassermenge zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ (maximale Zuflussrate Wassertanks).

Graph der Höhe des Wasserspiegels:
Die Änderungsrate ist eine Sinuskurve, der Bestand dann die Stammfunktion dieser Sinuskurve (- Kosinus). Da nach der Höhe im Tank gefragt ist, muss diese Stammfunktion durch 2 geteilt werden.

Klausuraufschrieb

Maximale Änderungsrate:
$f(t)_{max} = 4\, m^3/h$ (siehe Abb. 1)

Wassermenge im Tank nach $1{,}5$ Stunden:
Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen (Abb. 1) im Intervall $I = [0; 1{,}5]$. Es sind ca. 4 Kästchen (durch „Kästchenzählen" abgelesen). Jedes Kästchen entspricht $1\, m^3/h$.
Nach $1{,}5$ Stunden befinden sich etwa $4\, m^3$ Wasser im Tank.

Maximale Wassermenge:
Die maximale Wassermenge entspricht der Fläche unter dem Graphen (Abb. 1) im Intervall $I = [0; 3]$. Wegen $M_{[0;1,5]} = 4\, m^3$ ist $M_{[0;3]} = 8\, m^3$ (Symmetrieachse bei $t = 1{,}5$).
Die Wassermenge im Tank ist nach 3 Stunden mit $8\, m^3$ maximal.

Wassermenge nach 6 Stunden:
$M_{[0;3]} = 8\, m^3$; $M_{[3;6]} = -8\, m^3$ (Punktsymmetrie bei $t = 3$)
Der Tank ist leer.

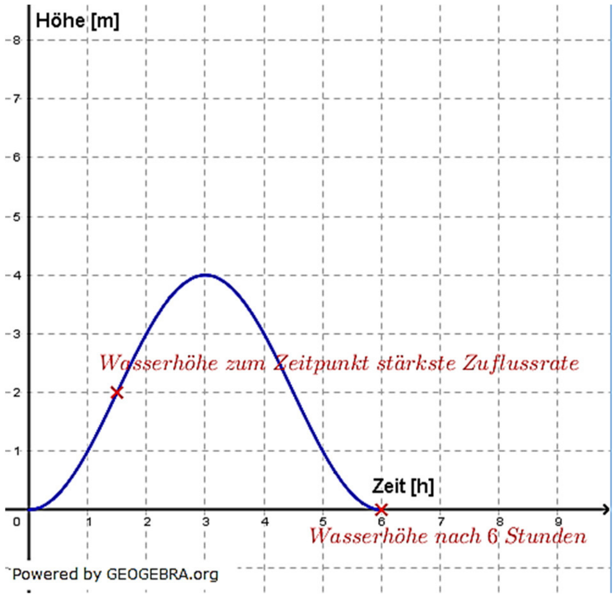
Wasserhöhe im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses:
Wassermenge zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ ist $4\, m^3$
Grundfläche des Tanks ist $2\, m^2$.
$h = \frac{V}{A} = \frac{4}{2}\, m = 2\, m.$
Das Wasser steht zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses $2\, m$ hoch im Tank.

Graph der Höhe des Wasserspiegels:

$f(t) = 4\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

$F(t) = -4\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t + 4 = V$

$h = \frac{V}{A} = \frac{-4\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t+4}{2} = -2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)t + 2$



Lösung M05A2

Lösungslogik

a) *Begründung, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist:*
$f(0)$ ist eine einfache, $g(0)$ eine doppelte Nullstelle.
Schnittpunkte von C und K:
Wir bilden $f(x) \cap g(x)$.

b) *Flächeninhalt eines Dreiecks:*
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
Mit $g = f(1) - g(1)$ und $h = 1$.
(Erläuternde Graphik siehe Klausuraufschrieb).

c) *Koordinaten des Hochpunkts von K:*
Wir bilden $g'(x) = 0$ und lösen die entstehende Gleichung nach x auf.
Anzahl Lösungen der Gleichung $g(x) = a$:
$g(x) = a$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand a.
Aus der Graphik lesen wir ab:
Für $a < 0$ gibt es keine Lösung.
Für $a = 0$ (die x-Achse selbst) gibt es eine Lösung.
Für $0 < a < f(x_{HP})$ gibt es drei Lösungen.
Für $a = f(x_{HP})$ gibt es zwei Lösungen.
Für $a > f(x_{HP})$ gibt es eine Lösung.

d) *Inhalt der Fläche, die von C und K eingeschlossen wird unter der Bedingung, dass $g(x)$ eine Stammfunktion von $F(x) - G(x)$ ist:*
Ist $g(x)$ eine Stammfunktion von $F(x) - G(x)$, so muss für die Fläche zwischen C und K gelten: $A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = [F(x) - G(x)]_a^b$.
Da aber $F(x) - G(x) = g(x)$ sein soll, gilt somit $[F(x) - G(x)]_a^b = [g(x)]_a^b$.
a und b sind die x-Kooridnaten der beiden Schnittpunkte gemäß Aufgabenteil a).

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 05

Klausuraufschrieb

a) *Begründung, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist:*

$f(0)$ ist einfache Nullstelle => C ist der Graph von f.
$g(0)$ ist einfache Nullstelle => K ist der Graph von g.

Schnittpunkte von C und K:

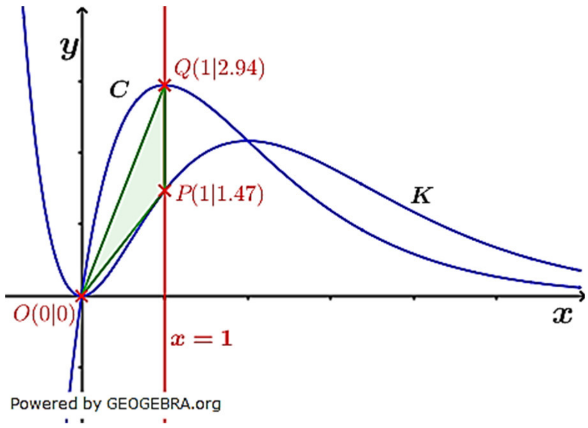
$f(x) \cap g(x)$:
$8x \cdot e^{-x} = 4x^2 \cdot e^{-x} \quad | \quad : e^{-x}$
$4x^2 = 8x$
$4x^2 - 8x = 0$
$4x(x-2) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
$f(0) = 0; \quad f(2) = 16 \cdot e^{-2} = \frac{16}{e^2}$

Die beiden Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_1(0|0)$ und $S_2\left(2\middle|\frac{16}{e^2}\right)$.

b) *Flächeninhalt eines Dreiecks:*

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
$g = f(1) - g(1)$
$h = 1$
$f(1) = \frac{8}{e} \approx 2.94; \quad g(1) = \frac{4}{e} \approx 1{,}47$
$f(1) - g(1) = 2{,}94 - 1{,}47 = 1{,}47$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}47 \cdot 1 = 0{,}735$

Die Fläche des Dreiecks beträgt etwa $0{,}74\ FE$.



c) *Koordinaten des Hochpunkts von K:*

$g'(x) = 8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x} = 4e^{-x}(2x - x^2)$
$4e^{-x}(2x - x^2) = 0$
$2x - x^2 = 0$
$x(2-x) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$
$x_2 = 2$ ist Stelle des Hochpunktes (siehe Graphik Aufgabenstellung).
$g(2) = 4 \cdot 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{16}{e^2} \approx 2{,}17$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H(2|2{,}17)$.

Anzahl Lösungen der Gleichung $g(x) = a$:

$g(x) = a$ ist Parallele zur x-Achse im Abstand a.
Es gilt:

Wert von a	Anzahl Nullstellen	Einfluss
$a < 0$	0	*Parallele unterhalb x-Achse*
$a = 0$	1	*Die x-Achse selbst*
$0 < a < 2{,}17$	3	Parallelen oberhalb x-Achse bis zum Hochpunkt
$a = 2.17$	2	Parallele durch den Hochpunkt
$a > 2.17$	1	Parallele oberhalb des Hochpunkts

d) *Inhalt der Fläche, die von* C *und* K *eingeschlossen wird unter der Bedingung, dass* $g(x)$ *eine Stammfunktion von* $F(x)-G(x)$ *ist:*

$A=\int_0^2\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=[F(x)-G(x)]_0^2=[g(x)]_0^2=4\cdot 2^2\cdot e^{-2}-0=\frac{16}{e^2}$

$A\approx 2{,}17$

Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt etwa $2{,}17\ FE$.