Aufgabe M07A2.1

An einem Stausee wird der Zu- und Abfluss künstlich geregelt. Dabei wird die momentane Zuflussrate beschrieben durch die Funktion z mit

$$z(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25;\ \ t > 0$$

Die konstante Abflussrate wird beschrieben durch die Funktion a mit

$$a(t) = 19;\ \ t > 0.$$

(t in Stunden seit Beobachtunsbeginn, $z(t)$ und $a(t)$ in $1000\frac{m^3}{h}$).

a) Zunächst werden die ersten 24 Stunden nach Beobachtungsbeginn betrachtet.
Bestimmen Sie die minimale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum nimmt die Wassermenge im Stausee ab?
Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge.

b) Zu Beobachtungsbeginn befinden sich $2\,500\,000\,m^3$ Wasser im See.
Bestimmen Sie die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Wassermenge in jedem 24-Stunden-Zeitraum um $144\,000\,m^3$ zunimmt.
Welchen Wert müsste die konstante Abflussrate haben, damit nach Ablauf von 14 Tagen die Wassermenge im Stausee $4\,180\,000\,m^3$ betragen würde?

Aufgabe M07A2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$.

a) Die Gerade g durch den Hochpunkt H und den Tiefpunkt T des Graphen von f schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten P und Q.
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Strecke $\overline{HT}$ an der Strecke $\overline{PQ}$.

b) Begründen Sie, dass die Steigung von f keinen Wert kleiner als -3 annehmen kann.

c) Der Graph von f und die Gerade h mit der Gleichung $y = 2$ schließen eine Fläche ein. Diese Fläche rotiert um die Gerade h.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

d) Eine Parallele zur x-Achse schneidet aus dem Graphen von f ein Kurvenstück aus, das den Tiefpunkt enthält. Die Endpunkte dieses Kurvenstücks haben den Abstand $2{,}5$ voneinander.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parallelen.

Lösung M072.1

Lösungslogik

a) *Minimale momentane Zuflussrate:*
Wir bestimmen den Tiefpunkt von z.

Zeitraum der Abnahme der Wassermenge im Stausee:
Dies ist der Zeitraum, in welchem die Differenzkurve aus Zufluss und Abfluss unterhalb der t-Achse verläuft.

Maximale momentane Änderungsrate:
Wir bestimmen das Maximum der Differenzkurve aus Zufluss und Abfluss.

b) *Wassermenge nach 12 Stunden im Stausee:*
Dies ist der Anfangsbestand von $2\,500\,000\,m^3$ zuzüglich dem Integral der Differenzkurve aus Zu- und Abflussrate im Intervall von 0 Uhr bis 12 Uhr.

Zunahme der Wassermenge im 24-Stunden-Zeitraum:
Dies ist die Flächenbilanz unter der Differenzkurve aus Zu- und Abfluss im Intervall von 0 Uhr bis 24 Uhr. Wegen der periodisch wiederkehrenden Differenzfunktion wiederholt sich der Vorgang alle 24 Stunden.

Wert der konstanten Abflussrate für $4\,180\,000\,m^3$ nach 14 Tagen:
Wir bestimmen zunächst die Differenz dieser Wassermenge und dem Anfangsbestand. Dieser Wert dividiert durch 14 ergibt die täglich zunehmende Wassermenge.
Die konstanten $25\,000\,m^3/h$ des Zuflusses abzüglich des gesuchten Abflusses in m^3/h multipliziert mit 24 Stunden ergibt dann die neue, gesuchte Abflussrate.
Zu berücksichtigen ist, dass sowohl $z(t)$ als auch $a(t)$ in m^3/h angegeben sind.

Klausuraufschrieb

a) *Minimale momentane Zuflussrate:*
Gegeben ist eine Sinuskurve mit einer Periode von $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.
Die minimalte Zuflussrate liegt im Tiefpunkt bei $t = \frac{3}{4}p = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$
$z(18) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 18\right) + 25 = 20 \cdot (-1) + 25 = 5$
Die minimale Zuflussrate beträgt etwa $5000\,m^3/h$ um etwa 18 Uhr.
Zeitraum der Abnahme der Wassermenge im Stausee:
$d(t) = z(t) - a(t)$
$d(t) = 20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25 - 19$
$d(t) = 0$
$20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6 = 0$
$t_1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 13{,}16 \qquad t_2 \overset{\text{WTR}}{\approx} 22{,}836$
Im Zeitraum von etwa $13{,}2$ Uhr bis etwa $22{,}8$ Uhr nimmt die Wassermenge im Stausee ab.

Maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge:
Die Differenzfunktion d hat dieselbe Periode wie die Ausgangsfunktion z. Das Maximum liegt bei $t = \frac{1}{4}p = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$.
$d(6) = 20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) + 6 = 20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 26$
$d(t)_{max} = 26$ *für t=6*
Die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt $26000\, m^3/h$ *um etwa* 6 *Uhr.*

b) *Wassermenge nach 12 Stunden im Stausee:*
$V = 2500 + \int_0^{12} \left(20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6\right) dt = 2500 + \left[-20 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + 6t\right]_0^{12}$
$= 2500 - \frac{240}{\pi} \cdot \cos(\pi) + 72 — \left(-\frac{240}{\pi} \cdot \cos(0)\right) = 2500 + \frac{240}{\pi} + 72 + \frac{240}{\pi} = 2724{,}79$
Nach 12 *Stunden beträgt die Massermenge im Stausee etwa* $2.724.000\ m^3$*.*

Zunahme der Wassermenge im 24-Stunden-Zeitraum:
$d(t) = z(t) - a(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6$
Bestimmung der Periode:
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$
Die Änderungsrate der Wassermenge ist periodisch mit $p = 24$ Stunden.
$\int_0^{24} \left(20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6\right) dt = 2500 + \left[-20 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + 6t\right]_0^{24}$
$= -\frac{240}{\pi} \cdot \cos(2\pi) + 144 — \left(-\frac{240}{\pi} \cdot \cos(0)\right) = -\frac{240}{\pi} + 144 + \frac{240}{\pi} = 144$
Die Flächenbilanz der Änderungsrate im Intervall von 0 Uhr bis 24 Uhr beträgt $144\,000\, m^3$.
Wegen der Periodizität von 24 *Stunden des Graphen der Änderungsrate der Wassermenge nimmt die Wassermenge in jedem* 24*-Stunden-Zeitraum um* $144\,000\, m^3$ *zu.*

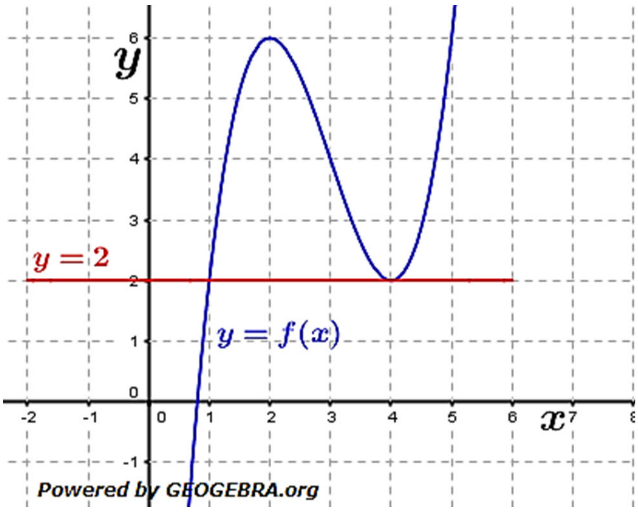
Wert der konstanten Abflussrate für $4\,180\,000\, m^3$ *nach 14 Tagen:*
$\frac{B(14)-B(0)}{14} = \frac{4180000-2500000}{14} = 120000$
Statt $144000\ m^3$ Wasserzunahme pro Tag dürfen es nur noch $120000\ m^3$ sein.
$(25 - a) * 24 = 120$
$25 - a = 5 \Longrightarrow\ a = 20$
Die konstante Abflussrate $a(t)$ *müsste einen Wert von* $20000\, m^3/h$ *haben.*

Lösung M07A2.2
Lösungslogik

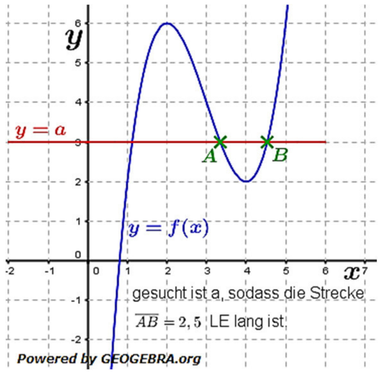
a) *Prozentualer Anteil von* $\overline{HT}$ *an* $\overline{PQ}$*:*
Wir bestimmen zunächst den Hoch- und Tiefpunkt von f mit dem GTR.
Wir stellen die Geradengleichung durch die Punkte H und T auf und bestimmen deren Schnittpunkte P und Q mit den Koordinatenachsen. Der prozentuale Anteil ist dann der Quotient aus der Länge von $\overline{HT}$ und der Länge von $\overline{PQ}$.

b) *Begründung, dass Steigung von f keinen Wert kleiner -3 hat:*
Wir bestimmen das Minimum von $f'(x)$ mit dem GTR.

c) *Volumen Rotationskörper:*
Situationsgrafik:
Berechnung des Volumens über Volumenintegrale. Hierzu haben wir zwei Möglichkeiten, einmal über „Obere Kurve" $(f(x))$ minus „Untere Kurve" $(y = 2)$.
Wenn wir allerdings um zwei Einheiten nach unten schieben, benötigen wir lediglich das Volumenintegral unter f im Intervall zwischen den dann entstehenden beiden Null-stellen.



d) *Gleichung einer Parallelen zur x-Achse:*
Situationsgrafik siehe Abbildung rechts:
Es muss gelten: $x_B - x_A = 2{,}5$ sowie
$f(x_A) = f(x_B) = a$ und damit $f(x_A) - f(x_B) = 0$, also
$f(x) - f(x + 2{,}5) = 0$



<u>Klausuraufschrieb</u>
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$

a) *Prozentualer Anteil von $\overline{HT}$ an $\overline{PQ}$*
Extremstellen mit $f'(x) = 0$:
$3x^2 - 18x + 24 = 0 \qquad | \ :3$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$
$x_1 = 4; \quad x_2 = 2$
$f''(4) > 0$ => Tiefpunkt
$f''(2) < 0$ => Hochpunkt
$f(4) \overset{\text{WTR}}{=} 2; \quad f(2) \overset{\text{WTR}}{=} 6$
$T(4|2); \quad H(2|6)$

Gerade durch H und T:
$g(x)=\frac{6-2}{2-4}\cdot(x-2)+6$
$g(x)=-2(x-2)+6=-2x+10$
Punkt P mit $g(x)=0$:
$-2x+10=0 \Longrightarrow \ x=5 \Longrightarrow \ P(5|0)$
Punkt Q mit $g(0)$:
$g(0)=10 \Longrightarrow \ Q(0|10)$
Länge von HT:
$l_{HT}=\sqrt{(4-2)^2+(2-6)^2}=\sqrt{20}$
Länge von PQ:
$l_{PQ}=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}$
Prozentualen Anteil $\overline{HT}$ an $\overline{PQ}$:
Wegen der Fragestellung ist $\overline{PQ}$ der Grundwert.
$\frac{l_{HT}}{l_{PQ}}\cdot 100\ \%=\sqrt{\frac{20}{125}}\cdot 100\ \%=40\ \%$
Der Anteil der Strecke $\overline{HT}$ an der Strecke $\overline{PQ}$ beträgt $40\ \%$.

b) *Begründung, dass Steigung von g keinen Wert kleiner -3 hat:*
Die erste Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades führt zur Funktionsgleichung einer Parabel (2. Grades) mit einem Scheitel als globalem Extremum.
$f'(x)=3x^2-18x+24 \qquad | \quad :3$
$\frac{1}{3}f'(x)=x^2-6x+8$
$\frac{1}{3}f'(x)=(x-3)^2-9+8=(x-3)^2-1 \qquad | \quad \cdot 3$
$f'(x)=3(x-3)^2-3$
Scheitelpunkt dieser Parabel ist $S(3|-3)$.
Im vorliegenden Fall ist der kleinste Funktionswert der Ableitungsfunktion ein globales Minimum mit $f'(x)_{min}=-3$ für $x=3$.

c) *Volumen Rotationskörper:*
Funktion um zwei Einheiten nach unten schieben:
$f^*(x)=x^3-9x^2+24x-12$
Nullstellen von f^*:
$f^*(x)=0$
$x_1 \overset{\text{WTR}}{=} 1;\ x_2 \overset{\text{WTR}}{=} 4$
$V=\pi\cdot\int_1^4(x^3-9x^2+24x-12)^2dx$
$\quad=\pi\cdot\int_1^4(x6-18x5+129x4-456x3+792x2-576x+144)dx$
$\quad=\pi\cdot\left[\frac{x^7}{7}-3x^6+\frac{129x^5}{5}-114x^4+264x^3-288x^2+144x\right]_1^4$
$\quad\overset{\text{WTR}}{\approx} 65{,}4349$
Das Rotationsvolumen beträgt ca. $65{,}4\ VE$.

d) *Gleichung einer Parallelen zur x-Achse:*
Die Parallele zur x-Achse sei $y = a$
Die beiden Schnittpunkte von y und f seien A und B. Dann gilt:
(1) $x_B - x_A = 2{,}5$
(2) $f(x_A) = f(x_B) = a \Longrightarrow \; f(x_A) - f(x_B) = 0$
Aus (1) folgt $x_B = 2{,}5 + x_A$
$x_B \longrightarrow (2)$
(2) $f(x_A) - f(x_A + 2{,}5) = 0$
$x_A^3 - 9x_A^2 + 24x_A - 14 - ((x_A + 2{,}5)^3 - 9(x_A + 2{,}5)^2 + 24(x_A + 2{,}5) - 14) = 0$
$\cancel{x_A^3} - \cancel{9x_A^2} + \cancel{24x_A} - \cancel{14} - (\cancel{x_A^3} + 7{,}5x_A^2 + 18{,}75x_A + 15{,}625 - \cancel{9x_A^2} - 45x_A - 56{,}25 + \cancel{24x_A} + 60 - \cancel{14}) = 0$
$-7{,}5x_A^2 + 26{,}25x_A - 19{,}375 = 0$
$x_A \overset{\text{WTR}}{\approx} 2{,}44$
Da das Kurvenstück den Tiefpunkt enthalten soll, ist $x_A = 2{,}44$ der gesuchte Wert.
$f(2{,}44) \overset{\text{WTR}}{\approx} 5{,}49$
Die Parallele zur x-Achse mit $y = 5{,}5$ schneidet aus dem Graphen von f ein Kurvenstück der Länge $2{,}5\ LE$ aus, das den Tiefpunkt enthält.