Lösung M072.1

Lösungslogik

a) *Minimale momentane Zuflussrate:*
Wir bestimmen den Tiefpunkt von z.

Zeitraum der Abnahme der Wassermenge im Stausee:
Dies ist der Zeitraum, in welchem die Differenzkurve aus Zufluss und Abfluss unterhalb der t-Achse verläuft.

Maximale momentane Änderungsrate:
Wir bestimmen das Maximum der Differenzkurve aus Zufluss und Abfluss.

b) *Wassermenge nach 12 Stunden im Stausee:*
Dies ist der Anfangsbestand von $2\,500\,000\,m^3$ zuzüglich dem Integral der Differenzkurve aus Zu- und Abflussrate im Intervall von 0 Uhr bis 12 Uhr.

Zunahme der Wassermenge im 24-Stunden-Zeitraum:
Dies ist die Flächenbilanz unter der Differenzkurve aus Zu- und Abfluss im Intervall von 0 Uhr bis 24 Uhr. Wegen der periodisch wiederkehrenden Differenzfunktion wiederholt sich der Vorgang alle 24 Stunden.

Wert der konstanten Abflussrate für $4\,180\,000\,m^3$ nach 14 Tagen:
Wir bestimmen zunächst die Differenz dieser Wassermenge und dem Anfangsbestand. Dieser Wert dividiert durch 14 ergibt die täglich zunehmende Wassermenge.
Die konstanten $25\,000\,m^3/h$ des Zuflusses abzüglich des gesuchten Abflusses in m^3/h multipliziert mit 24 Stunden ergibt dann die neue, gesuchte Abflussrate.
Zu berücksichtigen ist, dass sowohl $z(t)$ als auch $a(t)$ in m^3/h angegeben sind.

Klausuraufschrieb

a) *Minimale momentane Zuflussrate:*
Gegeben ist eine Sinuskurve mit einer Periode von $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.
Die minimalte Zuflussrate liegt im Tiefpunkt bei $t = \frac{3}{4}p = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$

$z(18) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 18\right) + 25 = 20 \cdot (-1) + 25 = 5$

Die minimale Zuflussrate beträgt etwa $5000\,m^3/h$ um etwa 18 Uhr.

Zeitraum der Abnahme der Wassermenge im Stausee:

$d(t) = z(t) - a(t)$

$d(t) = 20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25 - 19$

$d(t) = 0$

$20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6 = 0$

$t_1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 13{,}16 \qquad t_2 \overset{\text{WTR}}{\approx} 22{,}836$

Im Zeitraum von etwa $13{,}2$ Uhr bis etwa $22{,}8$ Uhr nimmt die Wassermenge im Stausee ab.

Maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge:
Die Differenzfunktion d hat dieselbe Periode wie die Ausgangsfunktion z. Das Maximum liegt bei $t = \frac{1}{4}p = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$.
$d(6) = 20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) + 6 = 20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 26$
$d(t)_{max} = 26$ *für t=6*
Die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt $26000\, m^3/h$ *um etwa* 6 *Uhr.*

b) *Wassermenge nach 12 Stunden im Stausee:*
$V = 2500 + \int_0^{12} \left(20 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6\right) dt = 2500 + \left[-20 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + 6t\right]_0^{12}$
$= 2500 - \frac{240}{\pi} \cdot \cos(\pi) + 72 — \left(-\frac{240}{\pi} \cdot \cos(0)\right) = 2500 + \frac{240}{\pi} + 72 + \frac{240}{\pi} = 2724{,}79$
Nach 12 *Stunden beträgt die Massermenge im Stausee etwa* $2.724.000\ m^3$*.*

Zunahme der Wassermenge im 24-Stunden-Zeitraum:
$d(t) = z(t) - a(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6$
Bestimmung der Periode:
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$
Die Änderungsrate der Wassermenge ist periodisch mit $p = 24$ Stunden.
$\int_0^{24} \left(20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6\right) dt = 2500 + \left[-20 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + 6t\right]_0^{24}$
$= -\frac{240}{\pi} \cdot \cos(2\pi) + 144 — \left(-\frac{240}{\pi} \cdot \cos(0)\right) = -\frac{240}{\pi} + 144 + \frac{240}{\pi} = 144$
Die Flächenbilanz der Änderungsrate im Intervall von 0 Uhr bis 24 Uhr beträgt $144\,000\, m^3$.
Wegen der Periodizität von 24 *Stunden des Graphen der Änderungsrate der Wassermenge nimmt die Wassermenge in jedem* 24*-Stunden-Zeitraum um* $144\,000\, m^3$ *zu.*

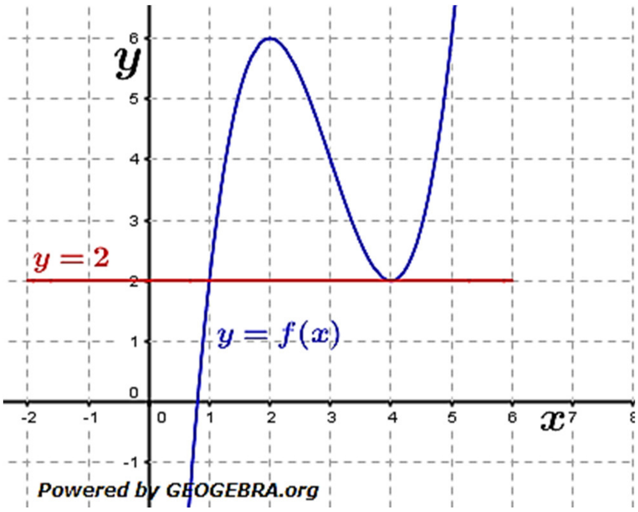
Wert der konstanten Abflussrate für $4\,180\,000\, m^3$ *nach 14 Tagen:*
$\frac{B(14) - B(0)}{14} = \frac{4180000 - 2500000}{14} = 120000$
Statt $144000\ m^3$ Wasserzunahme pro Tag dürfen es nur noch $120000\ m^3$ sein.
$(25 - a) * 24 = 120$
$25 - a = 5 \Longrightarrow\ a = 20$
Die konstante Abflussrate $a(t)$ *müsste einen Wert von* $20000\, m^3/h$ *haben.*

Lösung M07A2.2
Lösungslogik

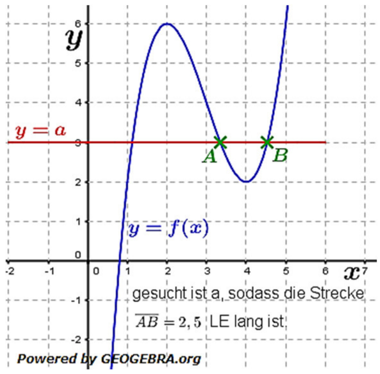
a) *Prozentualer Anteil von* $\overline{HT}$ *an* $\overline{PQ}$*:*
Wir bestimmen zunächst den Hoch- und Tiefpunkt von f mit dem GTR.
Wir stellen die Geradengleichung durch die Punkte H und T auf und bestimmen deren Schnittpunkte P und Q mit den Koordinatenachsen. Der prozentuale Anteil ist dann der Quotient aus der Länge von $\overline{HT}$ und der Länge von $\overline{PQ}$.

b) *Begründung, dass Steigung von f keinen Wert kleiner -3 hat:*
Wir bestimmen das Minimum von $f'(x)$ mit dem GTR.

c) *Volumen Rotationskörper:*
Situationsgrafik:
Berechnung des Volumens über Volumenintegrale. Hierzu haben wir zwei Möglichkeiten, einmal über „Obere Kurve" $(f(x))$ minus „Untere Kurve" $(y = 2)$.
Wenn wir   allerdings um zwei Einheiten nach unten schieben, benötigen wir lediglich das Volumenintegral unter f im Intervall zwischen den dann entstehenden beiden Null-stellen.



d) *Gleichung einer Parallelen zur x -Achse:*
Situationsgrafik siehe Abbildung rechts:
Es muss gelten: $x_B - x_A = 2{,}5$ sowie
$f(x_A) = f(x_B) = a$ und damit $f(x_A) - f(x_B) = 0$, also
$f(x) - f(x + 2{,}5) = 0$



<u>Klausuraufschrieb</u>
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$

a) *Prozentualer Anteil von $\overline{HT}$ an $\overline{PQ}$*
Extremstellen mit $f'(x) = 0$:
$3x^2 - 18x + 24 = 0 \qquad | \ :3$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$
$x_1 = 4; \quad x_2 = 2$
$f''(4) > 0$ => Tiefpunkt
$f''(2) < 0$ => Hochpunkt
$f(4) \overset{\text{WTR}}{=} 2; \quad f(2) \overset{\text{WTR}}{=} 6$
$T(4|2); \quad H(2|6)$

Gerade durch H und T:

$g(x) = \frac{6-2}{2-4} \cdot (x-2) + 6$

$g(x) = -2(x-2) + 6 = -2x + 10$

Punkt P mit $g(x) = 0$:

$-2x + 10 = 0 \Longrightarrow \ x = 5 \Longrightarrow \ P(5|0)$

Punkt Q mit $g(0)$:

$g(0) = 10 \Longrightarrow \ Q(0|10)$

Länge von HT:

$l_{HT} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{20}$

Länge von PQ:

$l_{PQ} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$

Prozentualen Anteil $\overline{HT}$ an $\overline{PQ}$:

Wegen der Fragestellung ist $\overline{PQ}$ der Grundwert.

$\frac{l_{HT}}{l_{PQ}} \cdot 100\ \% = \sqrt{\frac{20}{125}} \cdot 100\ \% = 40\ \%$

Der Anteil der Strecke $\overline{HT}$ an der Strecke $\overline{PQ}$ beträgt $40\ \%$.

b) *Begründung, dass Steigung von g keinen Wert kleiner -3 hat:*

Die erste Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades führt zur Funktionsgleichung einer Parabel (2. Grades) mit einem Scheitel als globalem Extremum.

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \qquad | \quad :3$

$\frac{1}{3} f'(x) = x^2 - 6x + 8$

$\frac{1}{3} f'(x) = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1 \qquad | \quad \cdot 3$

$f'(x) = 3(x-3)^2 - 3$

Scheitelpunkt dieser Parabel ist $S(3|-3)$.

Im vorliegenden Fall ist der kleinste Funktionswert der Ableitungsfunktion ein globales Minimum mit $f'(x)_{min} = -3$ für $x = 3$.

c) *Volumen Rotationskörper:*

Funktion um zwei Einheiten nach unten schieben:

$f^*(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$

Nullstellen von f^*:

$f^*(x) = 0$

$x_1 \overset{\text{WTR}}{=} 1; \ x_2 \overset{\text{WTR}}{=} 4$

$V = \pi \cdot \int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 24x - 12)^2 dx$

$\quad = \pi \cdot \int_1^4 (x6 - 18x5 + 129x4 - 456x3 + 792x2 - 576x + 144) dx$

$\quad = \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7} - 3x^6 + \frac{129x^5}{5} - 114x^4 + 264x^3 - 288x^2 + 144x\right]_1^4$

$\quad \overset{\text{WTR}}{\approx} 65{,}4349$

Das Rotationsvolumen beträgt ca. $65{,}4\ VE$.

d) *Gleichung einer Parallelen zur x-Achse:*
Die Parallele zur x-Achse sei $y = a$
Die beiden Schnittpunkte von y und f seien A und B. Dann gilt:
(1) $x_B - x_A = 2{,}5$
(2) $f(x_A) = f(x_B) = a \Longrightarrow f(x_A) - f(x_B) = 0$
Aus (1) folgt $x_B = 2{,}5 + x_A$
$x_B \longrightarrow (2)$
(2) $f(x_A) - f(x_A + 2{,}5) = 0$
$x_A^3 - 9x_A^2 + 24x_A - 14 - ((x_A + 2{,}5)^3 - 9(x_A + 2{,}5)^2 + 24(x_A + 2{,}5) - 14) = 0$
$\cancel{x_A^3} - \cancel{9x_A^2} + \cancel{24x_A} - \cancel{14} - (\cancel{x_A^3} + 7{,}5x_A^2 + 18{,}75x_A + 15{,}625 - \cancel{9x_A^2} - 45x_A - 56{,}25 + \cancel{24x_A} + 60 - \cancel{14}) = 0$
$-7{,}5x_A^2 + 26{,}25x_A - 19{,}375 = 0$
$x_A \overset{\text{WTR}}{\approx} 2{,}44$
Da das Kurvenstück den Tiefpunkt enthalten soll, ist $x_A = 2{,}44$ der gesuchte Wert.
$f(2{,}44) \overset{\text{WTR}}{\approx} 5{,}49$
Die Parallele zur x-Achse mit $y = 5{,}5$ schneidet aus dem Graphen von f ein Kurvenstück der Länge $2{,}5\ LE$ aus, das den Tiefpunkt enthält.