



Aufgabe M08A2.1

Ein Klimaforscher beschreibt die Entwicklung der globalen Durchschnittstemperatur modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(t) = 2,8e^{0,008t} - 0,03t + 11,1; \quad 0 \leq t \leq 200.$$

Dabei gibt t die Zeit in Jahren seit Beginn des Jahres 1900 und $f(t)$ die globale Durchschnittstemperatur in Grad Celsius an.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben anhand dieses Modells.

- a) Geben Sie die globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900 an.
Geben Sie die niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900 an.
In welchem Jahr wird die globale Durchschnittstemperatur 16°C überschreiten?
Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000.
Bestimmen Sie den Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im durch die Modellierung beschriebenen Zeitraum.
- b) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t + 10) - f(t) = 0,5$ führt.
Nachdem die globale Durchschnittstemperatur ihren niedrigsten Wert erreicht hat, steigt sie immer weiter an.
Zeigen Sie, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.
- c) Es werden Klimaschutzmaßnahmen geplant. Greifen diese zum Zeitpunkt t_0 , so bleibt die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur konstant bei dem Wert, der durch das Modell des Klimaforschers für t_0 vorausgesagt wird.
Bestimmen Sie den späteren Zeitpunkt t_0 , zu dem die Maßnahmen greifen müssen, damit die globale Durchschnittstemperatur $15,7^\circ\text{C}$ bis zum Beginn des Jahres 2050 nicht überschritten wird.
- d) Infolge alternativer Klimaschutzmaßnahmen kann der Verlauf der globalen Durchschnittstemperatur ab Beginn des Jahres 2020 durch beschränktes Wachstum modelliert werden. Der Graph der zugehörigen Funktion g schließt sich dabei ohne Knick an den Graphen der Funktion f an. Außerdem stellt sich nach diesem neuen Modell langfristig eine globale Durchschnittstemperatur von $16,8^\circ\text{C}$ ein.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g .

Aufgabe M08A2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = -ax^4 + 4ax^2$ gegeben.

- a) Begründen Sie, dass der Graph von f_a achsensymmetrisch zur y -Achse ist.
Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Funktion f_a unabhängig von a sind.
- b) Sowohl der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{32}{15}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ als auch der Graph von f_a schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit der x -Achse ein.
Bestimmen Sie a so, dass beide Flächen den gleichen Inhalt haben.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 08

Lösung M082.1

Lösungslogik

- a) *Globale Durchschnittstemperatur im Jahr 1900:*
Wir berechnen $f(0)$.
Niedrigste globale Durchschnittstemperatur:
Wir berechnen $f'(t)$, setzen $f'(t) = 0$ und lösen die Gleichung nach Null auf.
Globale Durchschnittstemperatur größer 16 °C:
Wir bilden $f(t) \cap y = 16$ und lösen die Gleichung nach t auf.
Momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000:
Wir berechnen $f'(100)$.
Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im beschriebenen Zeitraum:
Wir berechnen das Integral von $f(t)$ im Intervall $[0; 100]$ und dividieren das Ergebnis durch 100.
- b) *Fragestellung zu $f(t + 10) - f(t) = 0,5$:*
Siehe Klausuraufschrieb
Anstieg immer schneller nach Erreichen des Tiefpunktes:
Nachdem wir in Aufgabenteil a) den Zeitpunkt der tiefsten globalen Durchschnittstemperatur ermittelt haben, müssen wir nun nachweisen, dass $f'(t)$ für alle $t > 36,517$ streng monoton steigt.
- c) *Spätester Zeitpunkt zur Maßnahmeneinleitung für konstante momentane Änderungsrate:*
Ist die momentane Änderungsrate ab einem Zeitpunkt t_0 konstant, muss das Schaubild ab t_0 tangential weiter verlaufen. Gesucht ist also die Tangente an $f(t)$ im Berührungspunkt $B(t_0|f(t_0))$ wobei ein Punkt P dieser Tangente die Koordinaten $P(150|15,7)$ haben muss. Gesucht ist also die Tangente von einem bekannten Punkt aus an eine Kurve.
- d) *Aufgabenstellung zum beschränkten Wachstum $g(t) = S - a \cdot e^{-kt}$ ($t = 0$ im Jahr 2020) mit einer Schranke $S = 16,8$ und der Vorbedingung eines knickfreien Übergangs im Jahre 2020, somit $g'(0) = f'(120)$ und $a = S - f(120)$.*

Klausuraufschrieb

$$f(t) = 2,8e^{0,008t} - 0,03t + 11,1; \quad 0 \leq t \leq 200$$

- a) *Globale Durchschnittstemperatur im Jahr 1900:*

$$f(0) = 2,8e^{0,008 \cdot 0} - 0,03 \cdot 0 + 11,1 = 2,8 + 11,1 = 13,9$$

Die globale Durchschnittstemperatur im Jahr 1900 betrug 13,9 °C.

Niedrigste globale Durchschnittstemperatur:

$$f'(t) = 0,008 \cdot 2,8e^{0,008t} - 0,03$$

$$f'(t) = 0:$$

$$0,008 \cdot 2,8e^{0,008t} - 0,03 = 0$$

$$0,008 \cdot 2,8e^{0,008t} = 0,03 \quad | \quad : 0,0224$$

$$e^{0,008t} = 1,3393 \quad | \quad \ln$$

$$0,008t = \ln(1,3393) \quad | \quad : 0,008$$

$$t = 36,517$$

$$f(36,517) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 13,75$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 08

Die niedrigste globale Durchschnittstemperatur betrug etwa $13,75^\circ\text{C}$ im Verlaufe des Jahres 1937.

Globale Durchschnittstemperatur größer 16°C :

$$f(t) \cap y = 16$$

$$2,8e^{0,008t} - 0,03t + 11,1 = 16$$

$$2,8e^{0,008t} - 0,03t - 4,9 = 0$$

WTR

$$t \approx 152,3$$

Im Verlaufe des Jahres 2052 wird die globale Durchschnittstemperatur von 16°C überschritten.

Momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000:

$$f'(100) = 0,0024 \cdot e^{0,008 \cdot 100} - 0,03 = 0,0024 \cdot e^{0,8} - 0,03 \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,023$$

Die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000 betrug etwa $0,023^\circ\text{C}/\text{Jahr}$.

Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur:

$$\bar{m} = \frac{1}{200} \cdot \int_0^{200} f(t) dt = \frac{1}{200} \cdot \left[\frac{2,8 \cdot e^{0,008t}}{0,008} - 0,015t^2 + 11,1t \right]_0^{200}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{200} \cdot [350e^{0,008t} - 0,015t^2 + 11,1t]_0^{200} \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 15,02$$

Der Mittelwert beträgt ca. $15,02^\circ\text{C}$.

- b) Fragestellung zu $f(t + 10) - f(t) = 0,5$:

In welchem Zeitraum von 10 Jahren nimmt die globale Durchschnittstemperatur um $0,5^\circ\text{C}$ zu.

Anstieg immer schneller nach Erreichen des Tiefpunktes:

$f'(t)$ streng monoton steigend für alle $t > 36,517$?

Dies ist der Fall, wenn $f''(t) > 0$

$$f''(t) = 0,00018e^{0,008t}$$

Wegen $f''(t) > 0$ für $0 \leq t \leq 200$, ist $f'(t)$ monoton steigend. Da $f'(t)$ die Steigung von $f(t)$ ist, ist auch $f(t)$ monoton steigend, d.h., der Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur wird immer schneller.

- c) Spätester Zeitpunkt für konstante momentane Änderungsrate:

Zeitpunkt der Wirksamkeit einer konstanten Änderungsrate sei $P(150|15,7)$.

Berührungspunkt an Kurve sei $B(u|f(u))$, dann gilt:

$$t(x) = f'(u) \cdot x - u + f(u) \quad | \quad \text{Punkt-Steigungsform}$$

$$15,7 = f'(u) \cdot (150 - u) + f(u) \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P$$

$$f'(u) \cdot (150 - u) + f(u) - 15,7 = 0$$

$$(0,0224e^{0,008u} - 0,03) \cdot (150 - u) + 2,8e^{0,008u} - 0,03u + 11,1 - 15,7 = 0$$

$$3,36e^{0,008u} - 0,0224u \cdot e^{0,008u} - 4,5 + 0,03u + 2,8e^{0,008u} - 0,03u - 4,6 = 0$$

$$6,16e^{0,008u} - 0,0224u \cdot e^{0,008u} - 9,1 = 0$$

WTR

WTR

$$u_1 \approx 122,36; \quad u_2 \approx 174,08$$

Wegen $x_p = 150$ ist u_1 die einzige sinnvolle Lösung.

Um im Jahre 2050 eine konstante globale Durchschnittstemperatur von $15,7^\circ\text{C}$ zu erreichen, müssen entsprechende Maßnahmen spätestens im Jahr 2022 eingeleitet werden.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 08

d) *Beschränktes Wachstum:*

$$g(t) = S - a \cdot e^{-kt}; \quad t \text{ in Jahren}$$

$$S = 16,8; \quad f(120) = g(120); \quad f'(120) = g'(120)$$

$$f(120) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 14,8$$

$$f'(120) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,029$$

$$g'(t) = a \cdot k e^{-kt}$$

$$g'(120) = a \cdot k \cdot e^{-120k}$$

$$f(120) = g(120)$$

$$(1) \quad 14,8 = 16,8 - a \cdot e^{-120k} \quad | \quad -16,8; \cdot (-1)$$

$$(1) \quad 2 = a \cdot e^{-120k} \quad | \quad : e^{-120k}$$

$$(1) \quad a = \frac{2}{e^{-120k}}$$

$$f'(120) = g'(120)$$

$$(2) \quad 0,029 = a \cdot k \cdot e^{-120k}$$

$$a \rightarrow (2)$$

$$(2) \quad 0,029 = \frac{2}{e^{-120k}} \cdot k \cdot e^{-120k} = 2k$$

$$(2) \quad k = 0,01425$$

$$k \rightarrow (1)$$

$$(1) \quad 2 = a \cdot e^{-120 \cdot 0,01425} = a \cdot e^{-1,71}$$

$$(1) \quad a = \frac{2}{e^{-1,71}} = 11,058$$

Die Funktionsgleichung lautet $g(t) = 16,8 - 11,06 \cdot e^{-0,01425t}$; $120 \leq t \leq 200$.

Lösung M08A1.2

Lösungslogik

a) *Begründung Achsensymmetrie:*

Siehe Klausuraufschrieb.

Nullstellen von f_a :

Wir setzen $f_a(x) = 0$ und lösen die Gleichung nach x auf.

b) *a für gleiche Flächen unter f_a und g :*

Wir berechnen die Fläche unter dem Graphen von g im Intervall $0 \leq x \leq 2$.

Wir setzen das Ergebnis gleich mit der Fläche unter dem Graphen von f_a im gleichen Intervall und lösen die Gleichung nach a auf.

Klausuraufschrieb

a) *Begründung Achsensymmetrie:*

Die gegebene Funktionsgleichung ist die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Diese Funktionsgleichung besitzt nur geradzahlige Potenzen von x , ist somit achsensymmetrisch.

Nullstellen von f_a :

$$-ax^4 + 4ax^2 = 0 \quad | \quad : a$$

$$-x^4 + 4x^2 = 0$$

$$x^2(4 - x^2) = 0$$

$$x_{1,2} = 0; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = -2$$

Alle Nullstellen von f_a sind unabhängig von a .

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 08

b) a für gleiche Flächen unter f_a und g :

$$A_g = \int_0^2 \frac{32}{15} \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{32}{15} \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{2}{\pi}\right]_0^2 = \left[-\frac{64}{15} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2$$
$$= -\frac{64}{15} \cdot \cos(\pi) + \frac{64}{15} \cdot \cos(0) = \frac{64}{15} + \frac{64}{15} = \frac{128}{15}$$

$$A_{f_a} = A_g$$

$$A_{f_a} = \int_0^2 -ax^4 + 4ax^2 dx = \left[-\frac{a}{5}x^5 + \frac{4}{3}ax^3\right]_0^2 = -\frac{32}{5}a + \frac{32}{3}a - 0 = \frac{-96+160}{15}a = \frac{64}{15}a$$

$$\frac{64}{15}a = \frac{128}{15}$$

$$a = \frac{128}{64} = 2$$