Lösung M082.1

Lösungslogik

a) *Globale Durchschnittstemperatur im Jahr 1900:*
Wir berechnen $f(0)$.
Niedrigste globale Durchschnittstemperator:
Wir berechnen $f'(t)$, setzen $f'(t) = 0$ und lösen die Gleichung nach Null auf.
Globale Durchschnittstemperator größer $16\,°C$:
Wir bilden $f(t) \cap y = 16$ und lösen die Gleichung nach t auf.
Momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000:
Wir berechnen $f'(100)$.
Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im beschriebenen Zeitraum:
Wir berechnen das Integral von $f(t)$ im Intervall $[0; 100]$ und dividieren das Ergebnis durch 100.

b) *Fragestellung zu $f(t+10) - f(t) = 0{,}5$:*
Siehe Klausuraufschrieb
Anstieg immer schneller nach Erreichen des Tiefpunktes:
Nachdem wir in Aufgabenteil a) den Zeitpunkt der tiefsten globalen Durchschnittstemperatur ermittelt haben, müssen wir nun nachweisen, dass $f'(t)$ für alle $t > 36{,}517$ streng monoton steigt.

c) *Spätester Zeitpunkt zur Maßnahmeneinleitung für konstante momentane Änderungsrate:*
Ist die momentane Änderungsrate ab einem Zeitpunkt t_0 konstant, muss das Schaubild ab t_0 tangential weiter verlaufen. Gesucht ist also die Tangente an $f(t)$ im Berührpunkt $B\big(t_0 \big| f(t_0)\big)$ wobei ein Punkt P dieser Tangente die Koordinaten $P(150|15{,}7)$ haben muss. Gesucht ist also die Tangente von einem bekannten Punkt aus an eine Kurve.

d) Aufgabenstellung zum beschränkten Wachstum $g(t) = S - a \cdot e^{-kt}$ ($t = 0$ im Jahr 2020) mit einer Schranke $S = 16{,}8$ und der Vorbedingung eines knickfreien Übergangs im Jahre 2020, somit $g'(0) = f'(120)$ und $a = S - f(120)$.

Klausuraufschrieb

$f(t) = 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1;\;\; 0 \le t \le 200$

a) *Globale Durchschnittstemperatur im Jahr 1900:*
$f(0) = 2{,}8e^{0{,}008 \cdot 0} - 0{,}03 \cdot 0 + 11{,}1 = 2{,}8 + 11{,}1 = 13{,}9$
Die globale Durchschnittstemperatur im Jahr 1900 betrug $13{,}9\,°C$.
Niedrigste globale Durchschnittstemperator:
$f'(t) = 0{,}008 \cdot 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03$
$f'(t) = 0$:
$0{,}008 \cdot 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03 = 0$
$0{,}008 \cdot 2{,}8e^{0{,}008t} = 0{,}03 \qquad | \; :0{,}0224$
$e^{0{,}008t} = 1{,}3393 \qquad | \; ln$
$0{,}008t = \ln(1{,}3393) \qquad | \; :0{,}008$
$t = 36{,}517$
$f(36{,}517) \overset{\text{WTR}}{\approx} 13{,}75$

Die niedrigste globale Durchschnittstemperatur betrug etwa $13{,}75\,°C$ *im Verlaufe des Jahres* 1937*.*

Globale Durchschnittstemperator größer $16\,°C$*:*

$f(t) \cap y = 16$

$2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1 = 16$

$2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03t - 4{,}9 = 0$

$t \overset{\text{WTR}}{\approx} 152{,}3$

Im Verlaufe des Jahres 2052 *wird die globale Durchschnittstemperatur von* $16\,°C$ *überschritten.*

Momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000*:*

$f'(100) = 0{,}0024 \cdot e^{0{,}008 \cdot 100} - 0{,}03 = 0{,}0024 \cdot e^{0{,}8} - 0{,}03 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}023$

Die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000 *betrug etwa* $0{,}023\,°C/Jahr$*.*

Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur:

$\overline{m} = \frac{1}{200} \cdot \int_0^{200} f(t)\,dt = \frac{1}{200} \cdot \left[\frac{2{,}8 \cdot e^{0{,}008t}}{0{,}008} - 0{,}015t^2 + 11{,}1t\right]_0^{200}$

$\overline{m} = \frac{1}{200} \cdot \left[350e^{0{,}008t} - 0{,}015t^2 + 11{,}1t\right]_0^{200} \overset{\text{WTR}}{\approx} 15{,}02$

Der Mittelwert beträgt ca. $15{,}02\,°C$*.*

b) *Fragestellung zu* $f(t+10) - f(t) = 0{,}5$*:*

In welchem Zeitraum von 10 Jahren nimmt die globale Durchschnittstemperatur um $0{,}5\,°C$ zu.

Anstieg immer schneller nach Erreichen des Tiefpunktes:

$f'(t)$ streng monoton steigend für alle $t > 36{,}517$?

Dies ist der Fall, wenn $f''(t) > 0$

$f''(t) = 0{,}00018e^{0{,}008t}$

Wegen $f''(t) > 0$ *für* $0 \le t \le 200$*, ist* $f'(t)$ *monoton steigend. Da* $f'(t)$ *die Steigung von* $f(t)$ *ist, ist auch* $f(t)$ *monoton steigend, d.h., der Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur wird immer schneller.*

c) *Spätester Zeitpunkt für konstante momentane Änderungsrate:*

Zeitpunkt der Wirksamkeit einer konstanten Änderungsrate sei $P(150|15{,}7)$.

Berührpunkt an Kurve sei $B(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot x - u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsform

$15{,}7 = f'(u) \cdot (150 - u) + f(u)$ | Punktprobe mit P

$f'(u) \cdot (150 - u) + f(u) - 15{,}7 = 0$

$(0{,}0224e^{0{,}008u} - 0{,}03) \cdot (150 - u) + 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03u + 11{,}1 - 15{,}7 = 0$

$3{,}36e^{0{,}008u} - 0{,}0224u \cdot e^{0{,}008u} - 4{,}5 + 0{,}03u + 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03u - 4{,}6 = 0$

$6{,}16e^{0{,}008u} - 0{,}0224u \cdot e^{0{,}008u} - 9{,}1 = 0$

$u_1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 122{,}36;\quad u_2 \overset{\text{WTR}}{\approx} 174{,}08$

Wegen $x_P = 150$ ist u_1 die einzige sinnvolle Lösung.

Um im Jahre 2050 *eine konstante globale Durchschnittstemperatur von* $15{,}7\,°C$ *zu erreichen, müssen entsprechende Maßnahmen spätestens im Jahr* 2022 *eingeleitet werden.*

d) *Beschränktes Wachstum:*

$g(t) = S - a \cdot e^{-kt}$; t in Jahren

$S = 16{,}8$; $f(120) = g(120)$; $f'(120) = g'(120)$

$f(120) \overset{\text{WTR}}{\approx} 14{,}8$

$f'(120) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}029$

$g'(t) = a \cdot ke^{-kt}$

$g'(120) = a \cdot k \cdot e^{-120k}$

$f(120) = g(120)$

(1) $14{,}8 = 16{,}8 - a \cdot e^{-120k}$ | $-16{,}8;\ \cdot(-1)$

(1) $2 = a \cdot e^{-120k}$ | $: e^{-120k}$

(1) $a = \frac{2}{e^{-120k}}$

$f'(120) = g'(120)$

(2) $0{,}029 = a \cdot k \cdot e^{-120k}$

$a \to (2)$

(2) $0{,}029 = \frac{2}{e^{-120k}} \cdot k \cdot e^{-120k} = 2k$

(2) $k = 0{,}01425$

$k \to (1)$

(1) $2 = a \cdot e^{-120 \cdot 0{,}01425} = a \cdot e^{-1{,}71}$

(1) $a = \frac{2}{e^{-1{,}71}} = 11{,}058$

Die Funktionsgleichung lautet $g(t) = 16{,}8 - 11{,}06 \cdot e^{-0{,}01425t}$; $120 \leq t \leq 200$.

Lösung M08A1.2

Lösungslogik

a) *Begründung Achsensymmetrie:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Nullstelen von f_a:
Wir setzen $f_a(x) = 0$ und lösen die Gleichung nach x auf.

b) *a für gleiche Flächen unter f_a und g:*
Wir berechnen die Fläche unter dem Graphen von g im Intervall $0 \leq x \leq 2$.
Wir setzen das Ergebnis gleich mit der Fläche unter dem Graphen von f_a im gleichen Intervall und lösen die Gleichung nach a auf.

Klausuraufschrieb

a) *Begründung Achsensymmetrie:*
Die gegebene Funktionsgleichung ist die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Diese Funktionsgleichung besitzt nur geradzahlige Potenzen von x, ist somit achsensymmetrisch.

Nullstelen von f_a:

$-ax^4 + 4ax^2 = 0$ | $: a$

$-x^4 + 4x^2 = 0$

$x^2(4 - x^2) = 0$

$x_{1,2} = 0$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

Alle Nullstellen von f_a sind unabhängig von a.

b) *a für gleiche Flächen unter f_a und g:*

$A_g = \int_0^2 \frac{32}{15}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{32}{15}\pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{2}{\pi}\right]_0^2 = \left[-\frac{64}{15} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2$

$= -\frac{64}{15} \cdot \cos(\pi) + \frac{64}{15} \cdot \cos(0) = \frac{64}{15} + \frac{64}{15} = \frac{128}{15}$

$A_{f_a} = A_g$

$A_{f_a} = \int_0^2 -ax^4 + 4ax^2\, dx = \left[-\frac{a}{5}x^5 + \frac{4}{3}ax^3\right]_0^2 = -\frac{32}{5}a + \frac{32}{3}a - 0 = \frac{-96+160}{15}a = \frac{64}{15}a$

$\frac{64}{15}a = \frac{128}{15}$

$a = \frac{128}{64} = 2$